21世纪高等院校规划教材

JIN DAI XIN HAO CHU LI LI LUN YU FANG FA

近代信号处理理论与方法

张明友 吕 明 编著

国防工業出版社
http://www.ndip.cn

21 世纪高等院校规划教材

近代信号处理理论与方法

张明友 吕明 编著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

近代信号处理理论与方法/张明友,吕明编著.—北京:国防工业出版社,2005.1
21世纪高等院校规划教材
ISBN 7-118-03691-9

Ⅰ.近... Ⅱ.①张...②吕... Ⅲ.信号处理-高等学校-教材 Ⅳ.TN911.7

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第115331号

国防工業出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号)
(邮政编码 100044)
新艺印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本787×1092 1/16 印张21½ 492千字
2005年1月第1版 2005年1月北京第1次印刷
印数:1—4000册 定价:32.00元

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474
发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

内容简介

本书主要包括信号参量估计理论、线性最佳滤波、功率谱分析技术、自适应滤波、自适应阵列处理、时频分析和小波变换等内容，它们是雷达、通信、声纳、电子对抗、图像处理和自动控制等学科博士研究生、硕士研究生和工程技术人员必须学习与掌握的信号处理的近代理论与技术。

目前，国内外对上述各内容均有多部专著，也有若干现代信号理论的著作，内容很详尽，专业性较强，使初学者望而生畏，更难以在规定学时内完成教学。为此，我们编写这部较为浅显并精练的教材，以适应于通信与电子类研究生的需求。

本书可供通信与电子类专业的研究生作教材，也可供专业技术人员作参考书。

前　　言

信号与信息处理学科是信息科学的重要组成部分，该学科的状况能反映目前科技发展的整体水平。

近年来，近代信号处理的理论与方法获得了惊人的发展，主要表现在新的统计特征的出现和应用；二阶矩概念与应用的新发展；各种现代谱估计方法新的改进与随机信号的时空处理；自适应信号处理理论与应用的新成果；以小波变换为代表的非平稳随机信号分析与处理和方法的发展以及以神经网络为代表的非线性处理的理论和方法的发展等。目前，近代信号处理的理论与方法已经广泛应用于雷达、声纳、通信、自动化、地球物理、航空航天、生物医学、天文、机械工程等各种领域中。

鉴于信号与信息处理学科的迅猛发展与广泛应用，作为电子工程与信息学科的硕士、博士研究生，迫切要求学习与掌握近代信号处理理论与方法。近二十年来，我们先后采用过 A. V. Oppenheim 的《数字信号处理》和 S. Haykin 的《自适应滤波器原理》作为教材，也自编过《近代数字信号处理理论与方法》教材，但总感到还不能全面反映近代信号与信息处理迅速发展的总体内容。为此，我们编写了本教材。

《近代信号处理理论与方法》主要包括信号参量估计基本理论、线性滤波、功率谱分析技术、自适应滤波、自适应阵列处理、时频分析和小波变换等内容。它们是雷达、通信、声纳、电子对抗、图像处理和自动控制等学科博士研究生、硕士研究生和工程技术人员必须学习与掌握的近代信号处理的理论与方法。

目前，国内外对上述各内容均有多部专著，也有若干现代信号理论的著作，内容很详尽，专业性较强，但初学者有点望而生畏，更难以在规定学时内完成教学。为此，我们编写这部较为浅显并精练的教材，以适应于通信与电子类研究生的需求。在编写时我们注意了以下几点：

1. 坚持由浅入深的原则。取材精练，循序渐进，我们认真参阅了国内外大量优秀著作，诸如 S. Haykin 的《自适应滤波器原理》、何振亚的《自适应信号处理》、张贤达的《现代信号处理》和王宏禹的《非平稳随机信号分析与处理》等。从中吸取了若干精辟的论述，因此本书能充分反映近代先进的信号处理理论与方法。

2. 为了给读者以完整的近代信号处理理论与方法的概念，注意了各章之间承上启下的衔接。

3. 为了便于对基本概念、基本理论的理解，我们力图突出概念性阐述，尽量避免繁琐的数学推导。

4. 本书附有大量问题，以供读者练习。

本书献给今年刚病故的向敬成教授，一年前，我们共同策划了本教材。本书第 1、2、3、4、6 章由张明友教授编写，第 5 章由吕明副教授编写。在编写过程中得到了王建国教

授、肖先赐教授、汪学刚教授、夏铁骑和张伟两位博士研究生、郑小亮、张红波、谭舒和李辉四位硕士研究生的大力帮助，在此，对他们一并表示谢意。

本书可供通信与电子类专业的研究生作教材，也可供专业技术人员参考使用。

由于作者水平有限，难免有疏漏与不当之处，敬请读者提出批评指正。

作　者

目　　录

第 1 章　信号参量估计理论

在统计学中，随机变量的性质不能靠子样本数据来精确确定。从有限个观察样本只能得到所研究参量的估计值。

参量估计就是利用样本数据来估计某些特定的参量(或称参数)。有两种参量估计的方法：点估计和区间估计。在点估计中，通常是寻求一估计量(或称估计子)，并将给出待定参量的单个估计量，这一估计方法叫点估计。在区间估计中，我们确定的是待定参量可能位于的某个区间。把这样一种区间估计方法称为置信区间估计。

为了衡量各种估计的性能，需对估计的性质作若干定义。因为选择不同的最佳估计准则，得到的估计误差就不同。因此，我们将在本章中首先介绍误差的定义、分类和信号参量估计性能，然后讨论信号估计的基本理论中至关重要的各种最佳估计准则的选择等内容。

1.1　误差的定义和分类

设$\{x(t)\}$是一个与未知参量$\boldsymbol{\alpha}$有关的随机信号，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是可以利用的随机样本数据。如果 n 个样本的某函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可以用来估计参量$\boldsymbol{\alpha}$，则称该样本函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是参量$\boldsymbol{\alpha}$的一个估计量，记作$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，用$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$去估计参量$\boldsymbol{\alpha}$的方法称为点估计。

例如，考虑由信号 s 加零均值高斯白噪声 w_i 组成的观测样本为

$$x_i=s+w_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

由于观测样本中的白噪声 w_i 的均值为零，所以信号 s 的一个可能估计是样本均值，即

$$\hat{s}(x_1,x_2,\cdots,x_n)/n=\overline{x}$$

因此 s 的估计量为

$$\hat{s}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)/n$$

因此，根据子样值计算的参量估计，其精度可由如下定义的均方误差来描述：

$$\text{均方误差}=E[(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha})^2] \tag{1-1}$$

其中$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$是$\boldsymbol{\alpha}$的估计量。展开式(1-1)，得

$$E[(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha})^2]=E\{(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}]+E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}]-\hat{\boldsymbol{\alpha}})^2\}=$$
$$E[(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}])]^2+2E[(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}])(E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}]-\boldsymbol{\alpha})]+E[(E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}]-\boldsymbol{\alpha})^2]$$

上式的中间一项有等于零的因子，即

$$E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}-E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}]]=E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}]-E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}]=0$$

因此，均方误差可以简化为

$$均方误差 = E[(\hat{\alpha} - E[\hat{\alpha}])^2] + E[(E[\hat{\alpha}] - \alpha)^2] \tag{1-2}$$

其中，式(1-2)第一部分是描述误差中随机部分的方差项，即

$$Var[\hat{\alpha}] = E[(\hat{\alpha} - E[\hat{\alpha}])^2] = E[\hat{\alpha}^2] - E^2[\hat{\alpha}] \tag{1-3}$$

式(1-2)第二部分是描述误差中系统部分的偏差(又称系统误差)项的平方，即

$$b^2[\hat{\alpha}] = E[(E[\hat{\alpha}] - \alpha)^2] \tag{1-4}$$

因此，均方误差是估计的方差和偏差的平方两项之和，即

$$E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2] = Var[\hat{\alpha}] + b^2(\hat{\alpha}) \tag{1-5}$$

一般说来，估计的误差与被估计参量使用相同的工程单位比较方便。因此，取式(1-3)到式(1-5)的正平方根，就能做到这一点。式(1-3)的平方根是估计的标准差，称为标准误差(或称随机误差)，其表达式为

$$标准误差 = \sigma[\hat{\alpha}] = \sqrt{E[\hat{\alpha}^2] - E^2[\hat{\alpha}]} \tag{1-6}$$

式(1-4)的平方根直接确定了偏差(系统误差)，即

$$偏差 = b(\hat{\alpha}) = E[\hat{\alpha}] - \alpha \tag{1-7}$$

式(1-5)的平方误差之和的平方根，称为均方根误差，即

$$均方根误差 = \sqrt{E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2]} = \sqrt{\sigma^2[\hat{\alpha}] + b^2(\hat{\alpha})} \tag{1-8}$$

为了更方便起见，常将估计误差归一化，即用被估量除以误差，因此分别得

$$归一化标准误差 = \varepsilon_r = \frac{\sigma[\hat{\alpha}]}{\alpha} = \frac{\sqrt{E[\hat{\alpha}^2] - E^2[\hat{\alpha}]}}{\alpha} \tag{1-9a}$$

$$归一化偏差 = \varepsilon_b = \frac{b(\hat{\alpha})}{\alpha} = \frac{E[\hat{\alpha}]}{\alpha} - 1 \tag{1-9b}$$

$$归一化均方误差 = \varepsilon = \frac{\sqrt{\sigma^2[\hat{\alpha}] + b^2[\hat{\alpha}]}}{\alpha} = \frac{\sqrt{E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2]}}{\alpha} \tag{1-9c}$$

1.2 信号参量估计的性能

我们知道，利用随机信号的一个样本数据构造估计量(或称估计子)时，每次所得的估计值都可能不同，也就是说，信号参量的估计量是一个随机变量。既然估计量是随机变量，它就具有均值、方差等统计数字特征，我们可以利用这些特征对估计的性能进行比较、评价。为便于衡量随后讨论的各种估计的性能，我们先对常用的估计的性能若干标准作一介绍。

1.2.1 无偏性

n 维观测向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 由 n 个随机变量构成，由 $\boldsymbol{x}$ 构成的某个参量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 也是一个随机变量。若一个估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 的均值等于待估计参量的真值，即对所有 $\boldsymbol{\alpha}$ 恒有

$$E[\hat{\alpha}] = \alpha \tag{1-10}$$

则称 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的无偏估计量，若 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 满足关系式

$$\lim_{n \to \infty} E[\hat{\alpha}] = \alpha \tag{1-11}$$

则称 $\hat{\alpha}$ 为渐近无偏估计。“渐近”一词是指样本数 n 趋向无限大时的极限性能。

若式(1-10)不成立，则 $\hat{\alpha}$ 是 α 的一个有偏估计量，而且

$$b[\hat{\alpha}]=E[\hat{\alpha}]-\alpha \tag{1-12}$$

式中 $b(\hat{\alpha})$ 称为偏差。

由此可见，估计量的无偏性保证估计值分布在被估计参量的均值附近，是估计量应具有的一种良好性质。

1.2.2 一致性

当用以构成一种估计量 $\hat{\alpha}$ 的观测样本数 n 增大时，估计量的密度函数在真值附近越来越集中，即方差越来越小。具体地说，若当 $n\to\infty$ 时，估计量 $\hat{\alpha}$ 的估计值趋向于参量真值 α，则称 $\hat{\alpha}$ 为参量 α 的一致估计量。所以，若 $\hat{\alpha}$ 是一致估计量，则对于任意小正数 δ，有

$$\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\alpha}-\alpha|>\delta)=0 \qquad (对所有\ \delta>0) \tag{1-13}$$

可见，$\hat{\alpha}$ 依概率收敛于 α。

估计的一致性是与极限性能相联系的，仅当样本数 n 很大时才适用。

若随着样本数 n 增加，估计均方误差的极限等于零，即

$$\lim_{n\to\infty}E[(\hat{\alpha}-\alpha)^2]=0 \tag{1-14}$$

则称 $\hat{\alpha}$ 是均方一致的。若 $\hat{\alpha}$ 是无偏的，则

$$E[\varepsilon]=E[\hat{\alpha}-\alpha]=E[\hat{\alpha}]-E[\alpha]=0$$

估计误差 ε 是零均值的，均方误差 $E[\varepsilon^2]=E[(\hat{\alpha}-\alpha)^2]$ 就是 ε 的方差。式(1-14)表明，随着样本数 n 的增加，一致估计量估计误差的方差减小并趋于零。

式(1-13)定义的简单一致性和式(1-14)定义的均方一致性是常用的两种一致性定义，二者并无矛盾。实际上，常用式(1-14)来检验估计量是否具有一致性。

1.2.3 充分性

设未知参量的估计量 $\hat{\alpha}=\hat{\alpha}(x)$。我们希望 $\hat{\alpha}(x)$ 含有 x 中有关参量 α 的尽可能多的信息，这就引出充分估计量的定义。

如果存在观测向量 x 的一个估计量 $\hat{\alpha}(x)$，使得似然函数 $p(x/\alpha)$ 分解成

$$p(x|\alpha)=p(\hat{\alpha}|\alpha)\cdot h(x) \quad (h(x)\geqslant 0) \tag{1-15}$$

其中 $p(\hat{\alpha}/\alpha)$ 为 α 已知条件下估计量 $\hat{\alpha}$ 的概率密度，函数 $h(x)$ 与 α 无关，则称 $\hat{\alpha}(x)$ 是 α 的一个充分估计量。

充分估计量的意义是：没有别的估计量可以提供比充分估计量更多的有关参量 α 的信息，或者说，估计量 $\hat{\alpha}(x)$ 体现了含在观测数据 x 中有关参量 α 的全部有用信息。这一事实就是充分估计量这一名词的由来。

1.2.4 有效性

一个无偏估计量的均值等于参量真值，如果估计量的方差越小，则它取其均值附近数值的概率就越大。因此总希望估计量的方差尽可能地小，所以有效估计量就是具有最小方差的估计量。最小方差将由下面将讨论的克拉美-罗(Cramer-Rao)不等式给出。

若一个估计量是有效估计量，则它必定是充分估计量。然而，若有效估计量不存在，充分估计量仍然可以存在。因此，与有效性相比，充分性是受限较少的一种性质。

以上四点就是评价估计量时经常采用的性能标准。

1.2.5 克拉美-罗不等式

一个估计量最基本的特征体现在偏差和方差上。精确地表示均方误差往往是困难的。在这些情况下，希望得到均方误差可能达到的一个下界。正是克拉美-罗不等式给出了估计的均方误差下界，也就是说，此下界就是有效估计量的均方误差，实际的估计均方误差不可能再低于它。

克拉美-罗不等式适用于估计非随机参量的情况。对于随机参量的估计，类似的不等式也存在，可参考有关书籍。在此，我们仅讨论对一个未知非随机参量的估计情况。

定理 令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为一样本向量，$p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的条件概率密度函数。若 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 是一个无偏估计量，且 $\partial p(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{\alpha})/\partial\boldsymbol{\alpha}$ 存在，则

$$Var\left[\hat{\boldsymbol{\alpha}}\right]=E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha}]^2\geqslant\frac{1}{E\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\ln p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})\right]^2} \tag{1-16}$$

式中

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\ln p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})=K(\boldsymbol{\alpha})(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha}) \tag{1-17}$$

式中 $K(\boldsymbol{\alpha})$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的某个不包含 $\boldsymbol{x}$ 的正函数。

证明：由假设条件知：$E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}]=\boldsymbol{\alpha}$ 或 $E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha}]=0$。因此，有

$$E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha}]=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha})p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=0$$

上式两边对 $\boldsymbol{\alpha}$ 求偏微分，有

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha}]=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha})p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}[(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha})p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$$

上式给出

$$-\int_{-\infty}^{\infty}p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}[(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha})p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0 \tag{1-18}$$

另一方面，由复合函数的求导法可得

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})=[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\ln p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})]p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha}) \tag{1-19}$$

由于 $p(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{\alpha})$ 是条件密度函数，故

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{p}(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1 \tag{1-20}$$

将式(1-19)与式(1-20)代入式(1-18)，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}[\ln p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})]p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1$$

利用 $p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})=\sqrt{p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})}\cdot\sqrt{p(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\alpha})}$，上式可改写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}[\ln p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha})\sqrt{p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha})}][(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha})\sqrt{p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha})}]\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1 \quad (1\text{-}21)$$

根据 Schwartz 不等式

$$[\int_{-\infty}^{\infty}g(y)h(y)\mathrm{d}y]^2\leqslant[\int_{-\infty}^{\infty}g^2(y)\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}h^2(y)\mathrm{d}y \quad (1\text{-}22)$$

当 $g(y)$和$h(y)$ 线性相关时，即

$$h(y)=kg(y) \quad (1\text{-}23)$$

时，不等式取等号。将式(1-21)两端平方，并改写为式(1-22)的形式，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\ln p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha})]^2 p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha})^2 p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant 1$$

或等价也有

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha})^2 p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\ln p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha})]^2 p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\boldsymbol{x}} \quad (1\text{-}24)$$

而且，只有当式(1-17)成立时，上式才取等号。注意到 $E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}]=\boldsymbol{\alpha}$，于是有

$$Var[\hat{\boldsymbol{\alpha}}]=E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha}]=\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha})^2 p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad (1\text{-}25a)$$

和

$$E[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\ln p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha})]^2=\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\ln p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha})]^2 p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad (1\text{-}25b)$$

综合式(1-24)与式(1-25)可直接得式(1-16)。我们称式(1-16)为克拉美–罗不等式，该式的右端便是无偏估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 的均方差下限。即克拉美–罗限。式(1-16)表明，任何无偏估计量的均方差不可能小于一个特定的下限，这个下限取决于似然函数 $p(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{\alpha})$。

例 1.1 假设观测波形在观测时间$[0,T]$内可表示为

$$x(t)=s(t,\alpha)+w_i \qquad (0\leqslant t\leqslant T)$$

式中 $s(t,\alpha)$ 为幅值为 a 的矩形脉冲信号，w_i 为零均值高斯白噪声样本函数。

试利用矩法估计脉冲信号的幅度，并判断其估计性能。

解：

(1) 取样值可写为

$$x_i=a+w_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

式中，x_i 是 $x(t)$ 的独立取样值(或称观测样本)，w_i 为白噪声样本，n 为样本数。因为噪声是零均值的，所以 a 就是观测波形 $x(t)$ 的均值。根据矩法，应当用样本均值作为 a 的估计量，于是有

$$\hat{a}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

(2) $\hat{a}$ 的期望为

$$E[\hat{a}]=E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+w_i)]=a+E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_i]$$

由于噪声样本 w_i 是零均值的,. 所以上式第二项等于零，于是

$$E[\hat{a}]=a$$

故估计量 $\hat{a}$ 是无偏的。另一方面，估计误差为

$$\varepsilon = \hat{a} - a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i$$

显然，ε 的方差为

$$Var[\varepsilon] = \sigma_w^2 / n$$

其中 σ_w^2 是噪声样本的方差。由于当 n 趋于无穷时，估计误差的方差趋于零。因此样本均值估计量 $\hat{a}$ 是均匀一致的。

(3) 观测样本 $x_i = a + w_i$ 的均值估计量为

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

其中噪声样本 w_i 是零均值的高斯随机变量，因而观测样本 x_i 是均值为 a 的高斯随机变量。样本均值估计量 $\hat{a}$ 也是高斯分布的。

由于 x_i 是独立样本，因此似然函数 $p(\boldsymbol{x}/a)$ 是 n 个一维高斯密度函数的连乘，即

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{2\pi\sigma_w^2})^{1/2}\exp[-\frac{1}{2\sigma_w^2}(x_i - a)^2]$$

考虑到 $\hat{a}$ 为高斯分布，则根据公式：

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha}) = p(\hat{\boldsymbol{\alpha}}|\boldsymbol{\alpha}) \cdot h(\boldsymbol{x})$$

可将 $p(\boldsymbol{x}/a)$ 分解为

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha}) = (\frac{1}{2\pi\boldsymbol{\sigma}_w^2/n})^{1/2}\exp[-\frac{(\hat{a}-a)^2}{2\boldsymbol{\sigma}_w^2/n}]\times$$
$$(\frac{2\pi\boldsymbol{\sigma}_w^2}{n})^{1/2}\left\{\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{2\pi\boldsymbol{\sigma}_w^2})^{1/2}\exp\left[(n\hat{a}^2 - \sum_{i=1}^{n}x_i^2)\Big/2\sigma_w^2\right]\right\}$$

式中第一个因子是给定 a 时，估计量 $\hat{a}$ 的概率密度，第二个因子显然与 a 无关，因此 $\hat{a}$ 是充分估计量。

(4) 已证得 $\hat{a}$ 是无偏的，现在只需证明 $\hat{a}$ 满足式(1-17)即可。如前所述，似然函数为

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{2\pi\sigma_w^2})^{1/2}\exp[-\frac{1}{2\sigma_w^2}(x_i - a)^2] =$$
$$(\frac{1}{2\pi\sigma_w^2})^{1/2}\exp[-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2]$$

对数似然函数为

$$\ln p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha}) = \ln(\frac{1}{2\pi\sigma_w^2})^{n/2} - \frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$$

上式对 a 求导，得

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = \frac{n}{\sigma_w^2}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - a) =$$
$$\frac{n}{\sigma_w^2}(\hat{a} - a)$$