

信息与电子学科百本精品教材工程

新编电气与电子信息类本科规划教材

电磁场与微波技术

任伟 赵家升 编著 官伯然 主审

<http://www.phei.com.cn>



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

新编电气与电子信息类本科规划教材

电磁场与微波技术

任 伟 赵家升 编著
官伯然 主审

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书共分八章。主要内容包括：时变电磁场基础，平面电磁波基础，传输线理论，波导与谐振腔，平面、圆柱及圆球波函数，微波滤波器，天线基础。

本书包含了多于96个学时的内容，可作为高等院校电磁场与电磁波、微波原理或微波技术与天线等本科课程的教材，也可作为非电磁场与微波技术专业研究生的教学用书或参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与微波技术/任伟,赵家升编著. —北京:电子工业出版社,2005.3

(新编电气与电子信息类本科规划教材)

ISBN 7-121-00941-2

I. 电... II. ①任...②赵... III. ①电磁场—高等学校—教材 ②微波技术—高等学校—教材

IV. 0441.4②TN015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 010754 号

责任编辑:韩同平

印 刷:北京牛山世兴印刷厂

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

经 销:各地新华书店

开 本:787×1092 1/16 印张:18.75 字数:480 千字

印 次:2005 年 3 月第 1 次印刷

印 数:4000 册 定价:24.50 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010) 68279077。质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

信息与电子学科百本精品教材工程

《新编电气与电子信息类本科规划教材》

专业基础课教材编委会

主任委员： 谢克明（太原理工大学）

副主任委员： 刘志军（山东大学）

王绪本（成都理工大学）

胡先福（电子工业出版社）

委 员： 黄 虎 刘 健 刘志军 林育兹 李 琳

任 伟 王卫东 夏路易 许开宇 韩同平

编辑出版组

主 任： 胡先福

成 员： 王 颖 凌 毅 韩同平 张孟玮

冉 哲 李 岩 李维荣 张 昱

《新编电气与电子信息类本科规划教材》参编院校

(按拼音排序)

- ▶ 安徽大学
- ▶ 北京联合大学
- ▶ 北华大学
- ▶ 常州工学院
- ▶ 成都理工大学
- ▶ 哈尔滨工程大学
- ▶ 杭州电子科技大学
- ▶ 合肥工业大学
- ▶ 合肥电子工程学院
- ▶ 湖北工业大学
- ▶ 湖南科技大学
- ▶ 河海大学
- ▶ 河北工业大学
- ▶ 扬州大学
- ▶ 华北电力大学
- ▶ 淮海工学院
- ▶ 桂林电子工业学院
- ▶ 桂林工学院
- ▶ 广西工学院
- ▶ 济南大学
- ▶ 南京邮电学院
- ▶ 南京工业大学
- ▶ 南昌大学
- ▶ 南华大学
- ▶ 南通大学
- ▶ 内蒙古科技大学
- ▶ 山东大学
- ▶ 山东理工大学
- ▶ 山东科技大学
- ▶ 青岛大学
- ▶ 上海第二工业学院
- ▶ 上海海运学院
- ▶ 太原理工大学
- ▶ 太原重型机械学院
- ▶ 天津理工大学
- ▶ 厦门大学
- ▶ 西南科技大学
- ▶ 西安建筑科技大学
- ▶ 武汉工业学院
- ▶ 云南大学

前 言

本教材由外国专家、加拿大籍客座教授任伟博士担任主编，力求写成一本书充分吸收国外优秀教学方法和经典教材优点的《电磁场与微波技术》，而不是国内已有教材的改写或翻版。

本书共分八章。第1章时变电磁场基础，特色在于改变用静电学介绍差分法的传统写法而直接引入了时域有限差分法，另外，将各种坐标系中的单位矢量及其相互转换关系讲得一清二楚。第2章平面电磁波基础，写得深入浅出。第3章传输线理论，突出了阻抗匹配，特色在于包括了时域的内容。第4章波导与谐振腔，不在数学上纠缠，而是着重概念和应用。第5、6章分别为平面、圆柱及圆球波函数，对电磁场与电磁波用到的数学基础进行了讲解，同时改变许多学生学完电磁场与电磁波以后只知道平面波而不知道柱面波和球面波的现状。第7章对微波滤波器做了较为详细的介绍。第8章天线基础，突出了电荷加速度产生电磁辐射和复镜像法。

本书是两位作者分别在日本九州大学、加拿大 McMaster 大学和电子科技大学长期从事相关课程教学的结晶。电磁场部分包含了 48~80 学时电磁场与电磁波课程的内容，微波技术部分也包含了 48~80 学时微波技术课程教学内容，授课教师容易根据本校教学需要和课时数进行取舍。本书也可作为非电磁场与微波技术专业研究生的教学用书或参考书。

正如 David M. Pozar 在《微波工程》一书的前言中提及的：教育（尤其是高等教育）应该是理解的积累，而不是事实的累积。因此本教材将强调基本概念、典型解法和主要应用，而避免手册式的写法。手册式的写法汇集大量的材料（也许是相当有用的材料），而较少分析和解释。我们将尝试清晰地表述基础的数学，基本的概念，以使读者能领会并理解怎样用基本概念得到有用的结果的过程，从而在将来的实际工作中创造性地运用电磁场和微波技术课程中学到的知识和技能，分析和解决实际问题。从认识论的角度出发，人们对事物的认识总是波浪式前进、螺旋式上升的。所以，一些重要的内容将在多处提及。例如：本教材的平面波概念将在三处以不同的角度讨论，这一写法亦符合大文豪苏东坡“八面受敌”的治学方法。大学永远是做学问的所在！

这本书的最大特点是新颖：体系结构是新的，许多章节的写法是新的，反映了电磁学的最新进展。例如：用时域有限差分法讲透什么是旋度。又如用了三章的篇幅讲透分离变量法的同时，又提及怎样突破分离变量法的局限来解决分离变量法所不能解决的问题。在快速多极法广泛应用的今天，讲透各种波函数很有现实意义。由于 Matlab 的普及，贝塞尔函数等特殊函数将不再是教学难点，因为它们和三角函数一样都是 Matlab 的库函数，因而圆柱和圆球波函数正在变成易教易学的内容。电磁场和微波技术教学的一大难点是，学生学习时普遍感到概念比较抽象，电磁场看不见，摸不着，涉及到的数学较多。为此，我们将向授课老师提供时域有限差分法的 Matlab 程序以演示电磁波传播的动态图像，使学生看见每一瞬时的场分布。另外，我们还将提供大量例题和习题，由教师和学生自己用 Matlab 画图以感受电磁场的一些重要物理量随参数的变化情况。数学处理方面，我们从更基础的偏导数、线积分、面积分讲起，贝塞尔函数等特殊函数也不再讲其级数解之类的内容，而直接告知学生

用 Matlab 怎么算。

本书的核心参考书是 R. F. Harrington 的《时谐电磁场》和 David M. Pozar 的《微波工程》，这两本书是国际上公认的优秀教科书。本教材模仿了这两本书的写法，有很多内容取材于这两本书。另外还参考了 J. A. Stratton 的《电磁理论》，R. E. Collin 的《微波工程基础》和 Jia-Sheng Hong 与 M. I. Lancaster 的《微带滤波器及其射频/微波应用》。为了使本书在学生走上工作岗位或考上研究生后仍然有用，本书的参考文献较全面而具体地告知读者每一章每一节可看什么书。

本书第 1、2、8 章由赵家升编写，王圆协助，任伟执笔 1.8、2.8 和 8.1 节；第 3~7 章和前言由任伟撰写。全书由任伟负责学术创意、拟定大纲和统稿。

赵家升教授是任伟的恩师，本书的写作是在赵老师的指导下进行的。没有赵老师的鼓励、扶持和亲自参与，任伟要主编本书是不可能的。感谢韩同平编辑的指导和帮助。杭州电子科技大学研究生杜铁钧、徐广成、焦志伟、潘伟良对任伟编著部分的文档整理做了大量工作，王丹、董志龙、姚军烈、王凯、焦伟、吴欣慧、高雪平、沈建国、何丹、郑青根、王韬对书稿进行了认真校对，在此一并感谢。任伟感谢祖国和人民的哺育和爱护，感谢父母（任志钦和刘淑霞）的养育之恩，感谢妻子和儿子（Min and Yale）的爱。

特别感谢官伯然博士百忙之中担任本书主审，并提出了许多有价值的修改意见。感谢李金新老师、李齐良老师、宋强老师和张弘老师对本书初稿提出宝贵意见。任伟非常感谢方华、薛安克、孙玲玲、郭林松、黄良、胡建萍、唐向宏、谢书琴、邵根富、王颖、秦会斌、张蜀章、陈显尊、王晓军、王凤英、向伯先、余健、吴信宝、吴健、马兴启、敬忠良、金亚秋、钱梦禄、水永安、方大纲、傅君眉、郭旗、龙云亮、宋如华、杨义先、章毅、成孝予、徐建华、尧德中、潘锦、胡皓全、王秉中、潘威炎、薛良金、林为干的指导和支持。感谢国家自然科学基金、教育部、人事部、浙江省自然科学基金和浙江省教育厅的资助。

由于作者水平有限，书中肯定会有一些缺点和错误，恳请广大读者和专家予以指正。

任 伟

于杭州电子科技大学

目 录

| | |
|-------------------------------------|--------|
| 第 1 章 时变电磁场基础 | (1) |
| 1.1 矢量分析 | (2) |
| 1.1.1 矢量代数 | (2) |
| 1.1.2 常用坐标系 | (5) |
| 1.1.3 偏导数与标量的梯度 | (9) |
| 1.1.4 面积分与矢量的散度 | (13) |
| 1.1.5 线积分与矢量的旋度 | (16) |
| 1.1.6 拉普拉斯运算 | (20) |
| 1.1.7 亥姆霍兹定理 | (21) |
| 1.2 电磁场中的基本物理量及基本实验定律 | (21) |
| 1.2.1 电荷及电荷密度 | (21) |
| 1.2.2 电磁场的场量——电场强度和磁感应强度 | (24) |
| 1.2.3 电磁场中媒质的组成关系 | (30) |
| 1.3 法拉第电磁感应定律 | (44) |
| 1.4 位移电流 | (49) |
| 1.5 麦克斯韦方程组 | (51) |
| 1.5.1 麦克斯韦方程组的微分形式 | (51) |
| 1.5.2 麦克斯韦方程组的积分形式 | (52) |
| 1.5.3 麦克斯韦方程组的复数形式 | (53) |
| 1.6 电磁场边界条件——惟一性定理与镜像法 | (57) |
| 1.6.1 边界条件 | (57) |
| 1.6.2 惟一性定理 | (60) |
| 1.6.3 镜像法 | (60) |
| 1.7 坡印廷定理和坡印廷矢量 | (61) |
| 1.8 电磁场时域有限差分法的简单介绍 | (64) |
| 习题 | (70) |
| 第 2 章 平面电磁波基础 | (74) |
| 2.1 波动方程 | (75) |
| 2.2 无界空间的均匀平面波 | (76) |
| 2.2.1 理想介质中的均匀平面波 | (76) |
| 2.2.2 导电介质中的均匀平面波 | (82) |
| 2.3 平面波的极化 | (86) |
| 2.3.1 平面波的极化概念 | (86) |
| 2.3.2 平面波的极化形式 | (87) |
| 2.3.3 Poincaré 极化球和 Stokes 参数 | (89) |

| | | |
|------------|-------------------------|-------|
| 2.4 | 平面波对不同媒质分界面的垂直入射 | (91) |
| 2.4.1 | 对理想导体的垂直入射 | (92) |
| 2.4.2 | 对理想介质的垂直入射 | (95) |
| 2.4.3 | 对导电介质的垂直入射 | (98) |
| 2.5 | 均匀平面波对多层媒质分界面的垂直入射 | (101) |
| 2.6 | 均匀平面波对分界面的斜入射 | (104) |
| 2.6.1 | 垂直极化波对理想介质表面的斜入射 | (104) |
| 2.6.2 | 平行极化波对理想介质表面的斜入射 | (108) |
| 2.6.3 | 全反射与临界角 | (109) |
| 2.6.4 | 全透射与布儒斯特角 | (110) |
| 2.6.5 | 垂直极化波对理想导体表面的斜入射 | (110) |
| 2.6.6 | 平行极化波对理想导体表面的斜入射 | (113) |
| 2.7 | 相速度与群速度 | (114) |
| 2.8 | 无界均匀各向异性媒质中的平面波 | (116) |
| | 习题 | (118) |
| 第3章 | 传输线理论 | (121) |
| 3.1 | 电磁波解的分类 | (122) |
| 3.2 | 传输线 | (123) |
| 3.2.1 | 传输线的场分析 | (123) |
| 3.2.2 | 传输线的分布参数电路分析 | (125) |
| 3.3 | 同轴传输线、带状线与微带线 | (127) |
| 3.3.1 | 同轴传输线 | (127) |
| 3.3.2 | 带状线 | (129) |
| 3.3.3 | 微带线 | (132) |
| 3.4 | 端接负载的传输线 | (135) |
| 3.5 | 用电抗元件进行阻抗匹配 | (138) |
| 3.5.1 | 单枝节匹配网络 | (138) |
| 3.5.2 | 双枝节匹配网络 | (139) |
| 3.5.3 | 三枝节匹配网络 | (140) |
| 3.6 | 多节 $\lambda/4$ 变换器 | (141) |
| 3.6.1 | $\lambda/4$ 变换器 | (141) |
| 3.6.2 | 小反射理论 | (142) |
| 3.6.3 | 多节 $\lambda/4$ 变换器的近似理论 | (143) |
| 3.7 | 瞬态传输线 | (144) |
| 3.7.1 | 传输线上波的来回反射图 | (144) |
| 3.7.2 | 利用拉普拉斯变换式计算瞬态响应 | (146) |
| | 习题 | (148) |
| 第4章 | 波导与谐振腔 | (149) |
| 4.1 | 规则波导中的场分析 | (150) |
| 4.1.1 | 亥姆霍兹方程 | (150) |
| 4.1.2 | 波导场方程 | (151) |
| 4.1.3 | TE波和TM波的纵、横关系式 | (152) |

| | | |
|------------|-----------------------------|--------------|
| 4.2 | 波导的传输特性 | (153) |
| 4.2.1 | 矩形波导中的场分量 | (153) |
| 4.2.2 | 矩形波导的传输特性 | (157) |
| 4.2.3 | 相速度和波导波长 | (160) |
| 4.2.4 | 群速度 | (161) |
| 4.2.5 | 波阻抗 | (162) |
| 4.3 | 矩形波导的 TE_{10} 模 | (163) |
| 4.3.1 | 矩形波导的 TE_{10} 模的场方程 | (163) |
| 4.3.2 | 矩形波导的壁面电流分布 | (163) |
| 4.3.3 | 矩形波导的传输功率和功率容量 | (163) |
| 4.3.4 | 矩形波导的损耗 | (164) |
| 4.3.5 | 矩形波导的激励和耦合 | (165) |
| 4.4 | 矩形谐振腔 | (166) |
| 4.4.1 | 谐振回路的基本性质 | (166) |
| 4.4.2 | 微波谐振腔基本参数 | (167) |
| 4.5 | 圆柱形波导与圆柱形谐振腔 | (170) |
| 4.5.1 | 圆柱形波导 | (170) |
| 4.5.2 | 圆柱形谐振腔的场方程 | (172) |
| 4.5.3 | 采用一个以上的模式激励的微波滤波器 | (175) |
| 4.6 | 波导的工程设计 | (179) |
| 4.6.1 | 矩形波导的尺寸选择 | (179) |
| 4.6.2 | 圆波导的尺寸选择 | (180) |
| | 习题 | (181) |
| 第5章 | 平面波函数 | (182) |
| 5.1 | 平板介质波导 | (183) |
| 5.1.1 | 标量波函数 | (183) |
| 5.1.2 | 平板介质波导 | (184) |
| 5.2 | 导体涂层平板波导 | (188) |
| 5.3 | 复模与泄漏模 | (189) |
| 5.3.1 | 复模 | (189) |
| 5.3.2 | 泄漏模 | (191) |
| 5.3.3 | 再论色散方程 | (192) |
| 5.4 | 谱域伽略金法 | (193) |
| 5.4.1 | 微带线简介 | (193) |
| 5.4.2 | 伽略金法 | (194) |
| 5.4.3 | 电流基函数 | (197) |
| | 习题 | (197) |
| 第6章 | 圆柱波函数和圆球波函数 | (200) |
| 6.1 | 标量圆柱波函数与柱面波 | (201) |
| 6.2 | 圆球波函数与球面波 | (204) |
| 6.3 | 光纤 | (206) |
| 6.3.1 | 柱坐标中光纤的波方程 | (207) |

| | | |
|------------|-------------------------|--------------|
| 6.3.2 | 光纤中的模式分布 | (209) |
| 6.3.3 | 模式性质与截止条件 | (211) |
| 6.3.4 | 线性极化模式 | (215) |
| 6.4 | 各向异性媒质的标量圆柱波函数 | (219) |
| | 习题 | (222) |
| 第7章 | 微波滤波器的基本概念与理论 | (223) |
| 7.1 | 微波滤波器的基本概念 | (224) |
| 7.2 | 传递函数 | (226) |
| 7.2.1 | 概要 | (226) |
| 7.2.2 | 复平面的极点和零点 | (226) |
| 7.2.3 | Butterworth(最大平坦)响应 | (227) |
| 7.2.4 | Chebyshev 响应 | (228) |
| 7.2.5 | 椭圆函数响应 | (229) |
| 7.2.6 | 高斯(最大平坦群延迟)响应 | (230) |
| 7.2.7 | 全通响应 | (231) |
| 7.3 | 低通原型滤波器及其元件 | (232) |
| 7.3.1 | Butterworth 低通原型滤波器 | (233) |
| 7.3.2 | Chebyshev 低通原型滤波器 | (234) |
| 7.3.3 | 椭圆函数低通原型滤波器 | (235) |
| 7.3.4 | 高斯低通原型滤波器 | (237) |
| 7.3.5 | 全通、低通原型滤波器 | (238) |
| 7.4 | 频率变换 | (239) |
| 7.4.1 | 低通变换 | (239) |
| 7.4.2 | 高通变换 | (240) |
| 7.4.3 | 带通变换 | (241) |
| 7.4.4 | 带阻变换 | (241) |
| 7.5 | 导抗倒量变换器 | (242) |
| 7.5.1 | 导抗(阻抗或导纳)倒量变换器 | (242) |
| 7.5.2 | 采用导抗倒量变换器的滤波器 | (243) |
| 7.5.3 | 导抗倒量变换器的实现 | (245) |
| 7.6 | Richards 变换和 Kuroda 恒等式 | (247) |
| 7.6.1 | Richards 变换 | (247) |
| 7.6.2 | Kuroda 恒等式 | (248) |
| 7.6.3 | 耦合线等效电路 | (249) |
| | 习题 | (251) |
| 第8章 | 天线基础 | (252) |
| 8.1 | 天线导引 | (253) |
| 8.1.1 | 天线的类型 | (253) |
| 8.1.2 | 辐射机理 | (256) |
| 8.2 | 电偶极子的辐射 | (258) |
| 8.2.1 | 电偶极子的近区场 | (259) |
| 8.2.2 | 电偶极子的远区场 | (260) |
| 8.3 | 磁偶极子的辐射 | (262) |

| | |
|-------------------------|-------|
| 8.4 天线的基本参数 | (264) |
| 8.5 对称天线 | (268) |
| 8.5.1 对称天线上的电流分布 | (268) |
| 8.5.2 对称天线的辐射场 | (269) |
| 8.5.3 半波对称天线 | (270) |
| 8.6 天线阵 | (271) |
| 8.6.1 方向图相乘原理 | (271) |
| 8.6.2 均匀直线阵 | (272) |
| 8.7 其他类型天线简要分析 | (273) |
| 8.7.1 缝隙天线 | (273) |
| 8.7.2 微带天线 | (274) |
| 8.7.3 反射面天线 | (276) |
| 8.8 垂直电偶极子在半空间上的场 | (281) |
| 8.8.1 镜像理论 | (281) |
| 8.8.2 远区场 | (281) |
| 8.9 水平电偶极子在半空间上的场 | (284) |
| 习题 | (285) |
| 参考文献 | (287) |

第1章

时变电磁场基础

众所周知，静止电荷产生静电场，其特征是电场强度只是空间坐标的函数，不随时间变化。恒定电流产生的恒定磁场，它的强度也只是空间坐标的函数，而不随时间变化。这是宏观电磁现象的特殊情况，它们的特点是静电场和恒定磁场虽然可以共处于一个空间，但它们却是相互无关、各自独立的。当电荷和电流随时间变化时，所产生的电场和磁场也是随时间变化的，称为时变电磁场。此时，时变电场要产生时变磁场，时变磁场要产生时变电场，两者不再相互独立，而是构成了统一的时变电磁场。

本章将首先介绍矢量分析，然后介绍电磁场的基本物理量和媒质的电磁特性；从基本实验定律出发，引入麦克斯韦方程组，进而讨论电磁能量关系，并介绍一些电磁场问题的解法。读者可从本书参考文献[1~9]中任选一本作为本章学习的参考书。与全书其余章节一样，我们的叙述力争像晶体一样透明，使很难理解的电磁场问题简单化。

本章教学安排也可将静电学、静磁学作为附录详细讲解或根本不讲，在本书所配的电子课件中有较为详细的时变电磁场基础的附录。目前这种安排是一种中庸的设计，既考虑到与大学物理电磁学内容的接轨又快速进入麦克斯韦方程。读者应重视从静电学、静磁学到时变电磁场整个理论体系的展开，掌握矢量分析的概念和运算。理解并掌握电磁场的基本概念，学会计算一些典型分布的电磁场。

1.1 矢量分析

在电磁场与电磁波理论中,为研究某些物理量(比如电位、电场强度、磁场强度等)的空间分布和变化规律,引入“场”的概念。所谓“场”,是指在每一时刻,在空间的每一点都有一物理量的确定值与之对应,则此空间中构成了该物理量的场。若该物理量是标量(仅有一个确定的大小),这种场就称为标量场,例如温度场、密度场、电位场等。若 A 物理量是矢量(既有一个确定的大小 $|A|$, 又有一个确定的方向 $e_A = A/|A|$), 这种场就称为矢量场,例如重力场、速度场、电场和磁场等。

电磁场是矢量场,矢量分析是研究电磁场的重要数学工具。

1.1.1 矢量代数

1. 矢量之间可以进行加法(或减法)运算

两矢量相加(或相减)是一个矢量。即

$$A + B = C$$

$$A - B = A + (-B)$$

且矢量相加服从加法的交换律和结合律。即

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

2. 矢量与标量之间可以进行乘法(或除法)运算

矢量 A 乘以标量 s 得矢量 B 。即

$$B = sA$$

矢量 B 的大小变为矢量 A 的大小的 s 倍,其方向则与 s 的正负有关。若 $s > 0$, 则 B 与 A 同向;若 $s < 0$, 则 B 与 A 反向。

3. 点积

两矢量之间的乘积有两种有用的定义,即点积(或标积)和叉积(或矢积)。

两个矢量的点积是一个标量,其值为两个矢量的大小与它们之间夹角 θ 的余弦之积,表示为

$$A \cdot B = |A| \cdot |B| \cos\theta = AB \cos\theta \quad (1.1.1)$$

$A \cdot B$ 的图示如图 1.1.1 所示。

矢量的点积服从乘法的交换律和分配律。即

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

从式(1.1.1)可看出:

若 $A \cdot B = 0$, 则表明 A 与 B 相互垂直;

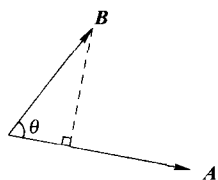


图 1.1.1 $A \cdot B$ 的图示

若 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB$, 则表明 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相互平行。

在式(1.1.1)中, $B \cos \theta$ 是矢量 \mathbf{B} 在矢量 \mathbf{A} 方向上的分量, 有

$$B \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{A} = \mathbf{e}_A \cdot \mathbf{B} \quad (1.1.2)$$

式中, $\mathbf{e}_A = \mathbf{A}/A$, 称为方向 \mathbf{A} 的单位矢量。

在直角坐标系中, 矢量 \mathbf{A} 可以表示为

$$\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z$$

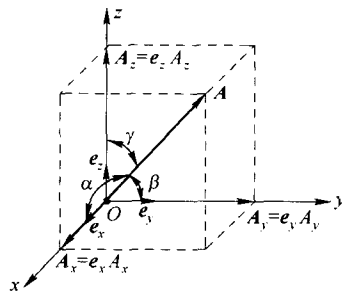
式中, e_x, e_y 和 e_z 分别为 x, y 和 z 轴方向上的单位矢量。因此有

$$e_x \cdot \mathbf{A} = |e_x| |\mathbf{A}| \cos \alpha = A_x$$

$$e_y \cdot \mathbf{A} = |e_y| |\mathbf{A}| \cos \beta = A_y$$

$$e_z \cdot \mathbf{A} = |e_z| |\mathbf{A}| \cos \gamma = A_z$$

式中, $\cos \alpha, \cos \beta$ 和 $\cos \gamma$ 是矢量 \mathbf{A} 的方向余弦, α, β 和 γ 分别是矢量 \mathbf{A} 与坐标轴 x, y 和 z 之间的夹角, 如图 1.1.2 所示。



直角坐标系各单位矢量之间的点积为

$$\begin{cases} e_x \cdot e_y = e_y \cdot e_z = e_z \cdot e_x = 0 \\ e_x \cdot e_x = e_y \cdot e_y = e_z \cdot e_z = 1 \end{cases} \quad (1.1.3)$$

1.1.2 $\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z$ 的图示

[例 1.1.1] 已知 $\mathbf{A} = e_x 6 + e_y 2 + e_z 5, \mathbf{B} = e_x 2 + e_y 4 + e_z 7$

求: (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$; (b) \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 之间的夹角。

解: (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (e_x 6 + e_y 2 + e_z 5) \cdot (e_x 2 + e_y 4 + e_z 7)$
 $= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$
 $= 6 \times 2 + 2 \times 4 + 5 \times 7$
 $= 55$

$$(b) \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{55}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 5^2} \sqrt{2^2 + 4^2 + 7^2}} = 0.821$$

故

$$\theta = \arccos(0.821) = 34.79^\circ$$

4. 叉积

两矢量的叉积是一个矢量, 其大小为两个矢量的大小与它们之间夹角 θ 的正弦之积, 它的方向垂直于包含两个矢量的平面。用单位矢量 e_n 表示, 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = e_n |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta = e_n AB \sin \theta \quad (1.1.4)$$

其图示如图 1.1.3 所示。因此叉积又称矢积。

矢量的叉积服从乘法的分配律和反交换律。即

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

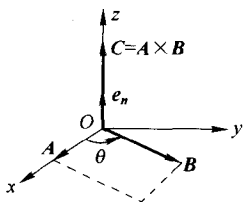


图 1.1.3 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的图示

从式(1.1.4)可以看出:

若 $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = 0$, 则表明 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相互平行;

若 $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$, 则表明 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相互垂直。

由两矢量的叉积定义可方便地得出直角坐标系各单位矢量的叉积为

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \quad (1.1.5)$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \quad (1.1.6)$$

直角坐标系中, 两矢量的叉积为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \times (\mathbf{e}_x B_x + \mathbf{e}_y B_y + \mathbf{e}_z B_z) \\ &= \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x A_x B_x + \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y A_x B_y + \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z A_x B_z + \\ &\quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x A_y B_x + \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y A_y B_y + \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z A_y B_z + \\ &\quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x A_z B_x + \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y A_z B_y + \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z A_z B_z \\ &= \mathbf{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{e}_z (A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

上式可用行列式简明地表示为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.1.8)$$

【例 1.1.2】 已知空间一点 $P(x, y, z)$ 处的矢量为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x 4 + \mathbf{e}_y 6 + \mathbf{e}_z 10, \quad \mathbf{B} = \mathbf{e}_x 7 + \mathbf{e}_y 12 + \mathbf{e}_z 8$$

求: (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$; (b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$; (c) 包含 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的平面的法向单位矢量;

(d) 以 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为两相邻边的平行四边形的面积。

解: (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 4 \times 7 + 6 \times 12 + 10 \times 8 = 180$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 4 & 6 & 10 \\ 7 & 12 & 8 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_x (6 \times 8 - 10 \times 12) + \mathbf{e}_y (10 \times 7 - 4 \times 8) + \mathbf{e}_z (4 \times 12 - 6 \times 7) \\ &= -\mathbf{e}_x 72 + \mathbf{e}_y 38 + \mathbf{e}_z 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \text{由 } \cos \theta &= \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{180}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 10^2} \sqrt{7^2 + 12^2 + 8^2}} \\ &= \frac{180}{\sqrt{152} \sqrt{257}} = 0.911 \end{aligned}$$

$$\text{得} \quad \theta = \cos^{-1}(0.911) = 24.4^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \mathbf{e}_n &= \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta} = \frac{-\mathbf{e}_x 72 + \mathbf{e}_y 38 + \mathbf{e}_z 6}{\sqrt{152} \sqrt{257} \sin 24.4^\circ} \\ &= \frac{-\mathbf{e}_x 72 + \mathbf{e}_y 38 + \mathbf{e}_z 6}{81.65} \\ &= -\mathbf{e}_x 0.882 + \mathbf{e}_y 0.465 + \mathbf{e}_z 0.074 \end{aligned}$$

$$(d) S_{AB} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin\theta = \sqrt{152} \sqrt{257} \sin 24.4^\circ = 81.65$$

1.1.2 常用坐标系

为了定量研究某物理量的空间分布和变化规律,选用适当的坐标系往往可以使问题得到简化。在电磁理论中,应用最为广泛的是直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。这些坐标系的坐标轴之间相互正交,故称为正交坐标系。

1. 直角坐标系

直角坐标系由相互正交的三条有向直线和这三条直线的交点构成,三条直线分别称为 x 、 y 和 z 轴,交点称为坐标原点。直角坐标系如图 1.1.4 所示。空间一点 P 的坐标由变量 x 、 y 和 z 确定,点 P 即是 $x = \text{常数}$ 、 $y = \text{常数}$ 和 $z = \text{常数}$ 的三个坐标面的交点。在直角坐标系中, x 、 y 和 z 方向坐标的单位都是一样的,给定了一个点的坐标,也就惟一确定了从坐标原点到该点的向径。反之亦然。在直角坐标系中, x 、 y 、 z 轴方向的单位矢量分别为 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 和 \mathbf{e}_z ,它们相互垂直正交,且符合 $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$ 的右手螺旋关系。其特征是 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 和 \mathbf{e}_z 都是常矢量,方向不随点 P 的位置改变而改变。

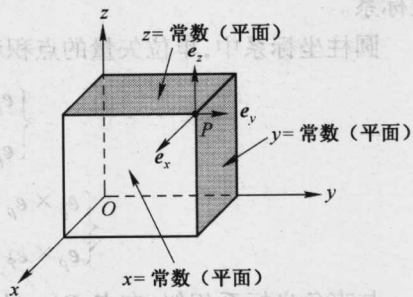


图 1.1.4 直角坐标系

给定了单位矢量之后,任意矢量可以由这些单位矢量表示成分量形式,如图 1.1.2 所示。这里提醒读者注意,两个矢量相等当且仅当其大小相等、方向相同即可,并不要求它们有相同的起点和终点。

由点 $P(x, y, z)$ 分别沿各坐标轴方向取微分长度元 dx 、 dy 和 dz ,则得直角坐标系中的矢量微分长度元为

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \quad (1.1.9)$$

微分面积元为

$$\begin{cases} dS_x = \mathbf{e}_x dy dz & (\text{与 } \mathbf{e}_x \text{ 垂直的平面}) \\ dS_y = \mathbf{e}_y dx dz & (\text{与 } \mathbf{e}_y \text{ 垂直的平面}) \\ dS_z = \mathbf{e}_z dx dy & (\text{与 } \mathbf{e}_z \text{ 垂直的平面}) \end{cases} \quad (1.1.10)$$

微分体积元为

$$dV = dx dy dz \quad (1.1.11)$$

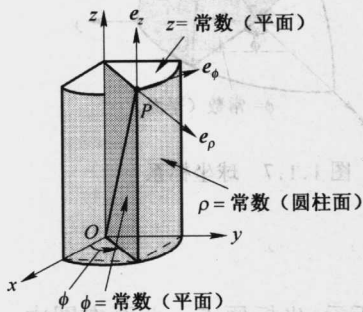


图 1.1.5 圆柱坐标系

2. 圆柱坐标系

圆柱坐标系的三个坐标变量是 ρ 、 ϕ 和 z ,如图 1.1.5 所示。三个坐标轴的交点为坐标原点。 ρ 是位置矢量 \mathbf{OP} 在 xOy 平面上的投影, ϕ 是通过 P 点、以 z 轴为界的半平面与 xOz 平面之间的夹角, z 与直角坐标系中的 z 一致。圆柱坐标系的三个坐标面分别是:

$\rho = \text{常数}$,以 z 轴为轴线、半径为 ρ 的圆柱面;

$\phi = \text{常数}$,以 z 轴为界的半平面;