北京市高等教育精品教材立项项目

# 泛函分析 第2版

江泽坚　孙善利

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

## 内容提要

本书是作者根据高等学校数学与力学教学指导委员会审定的“泛函分析教材编写大纲”为数学类本科各专业学生编写的泛函分析教材。第一版于1994年出版以来受到许多高校师生的欢迎。这次新版主要针对高等教育改革对各门课程提出新的要求,适应泛函分析课时压缩新情况,对第1版内容进行适当调整。将 $F$ - 空间,序列弱收敛,序列弱$^*$收敛,弱拓扑,广义函数等加上 * 号,供有能力者选学。原来定理及其证明做了相应改写,保证删去加 * 号内容后,教材体系不受影响。同时鉴于商空间及对偶理论的重要性,在第三章§6增加了关于商空间及其对偶的内容。新版教材仍然内容适中,深浅适宜,简明扼要,论述清晰,保持了第1版的特色。

本书适合作为高等学校数学系“泛函分析”课程的教材。

**图书在版编目(CIP)数据**

泛函分析/江泽坚,孙善利 .—2版 .—北京:高等教育出版社,2005.5

ISBN 7-04-016619-4

Ⅰ.泛... Ⅱ.①江...②孙... Ⅲ.泛函分析-高等学校-教材 Ⅳ.O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第026867号

**策划编辑** 李蕊 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 郝林
**版式设计** 王莹 **责任校对** 殷然 **责任印制** 朱学忠

**出版发行** 高等教育出版社
**社址** 北京市西城区德外大街4号
**邮政编码** 100011
**总机** 010-58581000

**经销** 北京蓝色畅想图书发行有限公司
**印刷** 北京鑫海金澳胶印有限公司

**开本** 787×960 1/16
**印张** 15.5
**字数** 290 000

**购书热线** 010-58581118
**免费咨询** 800-810-0598
**网址** http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
**网上订购** http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn

**版次** 1994年5月第1版
2005年5月第2版
**印次** 2005年5月第1次印刷
**定价** 19.70元



**物料号 16619-00**

# 第2版前言

本书第1版于1994年出版以后一直在吉林大学使用,也在四川大学,辽宁大学,东北师范大学,北京航空航天大学等高等学校使用过,受到这些高校师生的欢迎.使用本书的同人向我们提出过一些宝贵意见.对此我们表示衷心的感谢,也感谢出版社给我们修订本书和表达谢意的机会.

这次新版保持原书的基本内容和特色,同时吸收好的意见,对个别地方作了修改.为适应泛函分析课时压缩的新情况,也对第1版部分内容进行适当修订.

1. 将$F$-空间,序列弱收敛,序列弱$^*$收敛,弱拓扑,广义函数等内容加上*号,供有能力者选学.原来涉及这部分内容的定理及其证明做了相应改写,以保证删去加*号内容后,教材体系不受影响.

2. 鉴于商空间及对偶理论的重要性,在第三章§6增加了关于商空间及其对偶的内容.

3. 借再版机会补充上第1版曾遗漏的参考文献.

尽管做了努力,仍恐有许多不足,还望海内同人指正.

编者

2004年12月

# 序

本书是为数学系本科学生写的教材，其内容大体如高等学校数学、力学教材编审委员会函数论泛函分析编审组于 1990 年 11 月在南京大学召开的会议上制订的《泛函分析教材编写大纲》。

我们认为所讲的主要内容应该是本科数学类各专业所共同必需的，不应该因为个别专业或少数方向的需要而使大多数学生增加负担。我们删去了自伴算子谱分解定理的证明，只介绍谱射影算子族，谱分解定理的结论，以及与之有关的自伴算子函数演算。而对于一般紧算子的 Riesz－Schauder 理论以及紧自伴算子的谱分解定理则予以详细的证明。

鉴于在学习本课程时，学生在偏微分方程、概率论以及计算方法等方面的知识都还完全不知道或者不很熟悉，所以我们常常偏向以线性代数、数学分析，也偶尔以初等 Fourier 分析、逼近论、积分方程（虽然学生也很少知道，但它比较好懂）等为背景来引出泛函分析的一些基本概念和定理。例如，关于共轭算子理论，算子的值域与零空间的关系，紧算子理论的讲解。正因为学生们知道 $L^1$ 与 $L^2$ 之 Fourier 变换的初等理论，也可能听说过它在一般 $L^p$ 空间上推广的困难，所以我们介绍广义函数论时就偏重于急减函数空间 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 上的广义函数，希望用广义 Fourier 变换来说明广义函数的意义和重要性，但是回避了过于艰深的卷积理论。我们尽量以学生最熟悉的知识为背景来讲抽象的概念和结果。我们同意前人的提法，认为线性泛函与在无穷维空间上引进坐标的思想有关，而对偶理论则有如无穷维线性空间上的解析几何学。这符合历史发展，当年 H. Hahn 正是对扩张定理作了这方面的应用以后才提出当今所谓对偶空间的概念。此外，这样讲也或者可能使初学者更直观地理解对偶理论的意义和应用。有鉴于弱拓扑的特殊重要性，我们稍稍走出初等范围，先举例说明序列弱收敛不足以描述一般的弱拓扑，然后一般地介绍局部凸的线性拓扑空间。

以上所说种种思虑目下还多属于主观愿望，是否真有助于初学者，仍有待于实践的证明，还望海内同人不吝赐教。

最后，我们感谢参加评审的南京大学、复旦大学、华东师范大学、云南大学、

湘潭大学的同志,他们对本书提出许多宝贵意见,特别是郑维行教授仔细阅读手稿,指出了一些错误与不当之处。我们谨在此表示衷心的感谢。

编者

1992年12月于长春

# 目　　录

# 第一章　距离线性空间

## §1　选择公理，良序定理，Zorn 引理

我们熟知数学归纳法，它是关于可数多个命题，或者说关于与正整数 $n$ 有关的定理 $P(n)$ 的证明方法．但如我们要讨论的是不可数个命题，那怎么办呢？设想我们要证明一个定理 $P(\alpha)$ 对一切 $\alpha\in\mathscr{A}$ 皆成立，这里 $\mathscr{A}$ 未必是可数集，我们就需要一个比数学归纳法更一般的方法．

假定集合 $\mathscr{A}$ 中任意两个元素 $a,b$ 之间总有先后次序，并且

(1) 若 $a$ 在 $b$ 之先，则 $b$ 便不在 $a$ 之先．

(2) 若 $a$ 在 $b$ 之先，$b$ 又在 $c$ 之先，则 $a$ 在 $c$ 之先．

这样的集合 $\mathscr{A}$ 叫做**有序集**．以下把 $a$ 在 $b$ 之先记作 $a<b$．

更重要的是我们还时常要求 $\mathscr{A}$ 是**良序的**，即

$\mathscr{A}$ 的任何非空子集 $\mathscr{S}$ 都必有一个属于 $\mathscr{S}$ 的最先的元素．

取 $\mathscr{S}=\mathscr{A}$，则良序集 $\mathscr{A}$ 便总有最先的元素，这个元素记作 $\alpha_0$．

**定理 1.1**　对良序集 $\mathscr{A}$，如果

(1) $P(\alpha_0)$ 为真，这里 $\alpha_0$ 是 $\mathscr{A}$ 中最先的元素．

(2) 若 $P(\alpha)$ 对一切 $\alpha,\alpha_0<\alpha<\beta$，为真，则 $P(\beta)$ 亦真．

那么 $P(\alpha)$ 对一切 $\alpha\in\mathscr{A}$ 皆真．

**证**　若定理不真，则集合 $\mathscr{S}=\{\alpha\in\mathscr{A}:P(\alpha)$ 不真$\}$ 非空．从 $\mathscr{A}$ 是良序的知 $\mathscr{S}$ 有最先的元素 $\alpha_*$．

由(1)有 $\alpha_0<\alpha_*$．显然当 $\alpha_0<\alpha<\alpha_*$ 时，$P(\alpha)$ 为真．由(2)便知 $P(\alpha_*)$ 亦真，这与 $\alpha_*\in\mathscr{S}$ 矛盾．证毕．

人们把这个定理叫做**超限归纳法**．

但是，是否每个集合都能赋予一个先后次序并且使之成为良序集呢？答案是肯定的，这叫做**良序定理**．它可以用所谓 Zermelo 的**选择公理**来证明．(参见[13]第 14 章，§7，定理 2)

**选择公理**　设 $\mathscr{N}=\{N\}$ 是一个非空集合构成的族，则必存在定义在 $\mathscr{N}$ 上的函数 $f$，使得对一切 $N\in\mathscr{N}$ 都有 $f(N)\in N$．

B. Russell 说得很有意思，对于无穷多双鞋子，选择公理显然是对的．例如，我们可以说都选取右脚的鞋子．但是对于无穷多双袜子呢？那就很不显然了．

选择公理远不如欧氏几何学上的公理那样直观.它多年来在数学界引起极大的争论,迫使每个搞数学的人必须对它表态.由于选择公理与世所公认的公理系统 $ZF$ 既是相容的,又是独立的;更由于没有选择公理,现今泛函分析的基石,如 Hahn - Banach 定理,Banach - Alaoglu 定理等的证明就将失去了依据(参见[21]),所以我们承认选择公理和与之等价的良序定理以及下文的 Zorn 引理.今后在需要的时候,将按照我们的方便而随意引用其中一个.

**定义 1.1** 对一族元素 $\mathscr{X}$,如果在某些对元素$(a,b)$上有二元关系,记作 $a\prec b$.它具有性质:

$a\prec a$;

若 $a\prec b$ 且 $b\prec a$,则 $a=b$;

若 $a\prec b$ 且 $b\prec c$,则 $a\prec c$;

则称 $\mathscr{X}$ 按照关系$\prec$为**部分有序的**.

**例 1** 设 $\mathscr{X}$ 是某个非空集合 $E$ 之一切子集的集合.定义 $A\prec B$,若 $A,B\in\mathscr{X}$ 且 $A\subset B$.那么 $\mathscr{X}$ 按$\prec$为部分有序集.

应该指出,这是最直观,但也是最典型、最常见的部分有序集.

**定义 1.2** 设 $\mathscr{X}$ 按$\prec$为部分有序集.

(1) 对 $\mathscr{S}\subset\mathscr{X}$,若有 $p\in\mathscr{X}$,使 $x\prec p$ 对一切 $x\in\mathscr{S}$都成立,则称 $p$ 为 $\mathscr{S}$的**上界**.

(2) 设 $\mathscr{S}\subset\mathscr{X}$,如果对 $\mathscr{S}$中任意两个元素 $x,y$,必有 $x\prec y$ 或 $y\prec x$,则称 $\mathscr{S}$ 是**完全有序的**.

(3) $m\in\mathscr{X}$ 称为 $\mathscr{X}$ 的**极大元**,如果对任何 $x\in\mathscr{X}$,当 $m\prec x$,必有 $x=m$.

**例 2** 对复数 $z=x+\mathrm{i}y$, $w=u+\mathrm{i}v$,定义 $z\prec w$,当 $x\leqslant u$ 且 $y\leqslant v$.可见复平面是部分有序的,而实轴、虚轴及某些直线则是完全有序的.

**定理 1.2**(Zorn **引理**,1935) 设 $\mathscr{X}$ 为非空的部分有序集.如果 $\mathscr{X}$ 的任何完全有序的子集都有一个上界在 $\mathscr{X}$ 中,则 $\mathscr{X}$ 必含有极大元.

可以证明 Zorn 引理和选择公理是等价的.参见[44],第 6 页.

## §2 线性空间,Hamel 基

**定义 2.1** 设 $X$ 是非空集合,$K$ 是数域(实数域或复数域).如果在 $X$ 上定义了**加法运算**,即对 $X$ 中每对元素 $x,y$ 都对应 $X$ 中一个元素 $z$,用 $z=x+y$ 表示;又定义了**数乘运算**,即对每个数 $\alpha\in K$ 和每个元素 $x\in X$ 都对应 $X$ 中一个元素 $u$,用 $u=\alpha x$ 表示;而且满足如下公设:

(1) $x+y=y+x$.

(2) $x+(y+z)=(x+y)+z$.

(3) $X$ 中存在唯一的元素,用 $\theta$ 表示,使对每个 $x\in X$, $x+\theta=x$,$\theta$ 称为 $X$

中**零元**.

(4) 对 $X$ 中每个元素 $x$,都存在唯一的元素,用 $-x$ 表示,使 $x+(-x)=\theta$.

(5) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

(6) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

(7) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$.

(8) $1x=x$.

这里 $x,y,z\in X,\alpha,\beta\in K$.则称 $X$ 按上述加法和数乘成为复(当 $K$ 为复数域)或实(当 $K$ 为实数域)**线性空间**.通常又称为**向量空间**.空间中的元素又称为**向量**或**点**.

今后如不特别指明,"线性空间"既可以是复的,亦可以是实的,其中的"数" $\alpha,\beta$ 则按所论空间是复或实的而定.任何复线性空间必然也是实线性空间.

容易证明,在线性空间 $X$ 中对所有向量 $x$ 和数 $\alpha$ 都有

$$0x=\theta,$$
$$(-1)x=-x,$$
$$\alpha\theta=\theta.$$

为了方便起见,今后我们记 $x-y$ 代替 $x+(-y)$.不难证明下述消去律在线性空间 $X$ 中成立.

$$x+y=x+z\Rightarrow y=z,$$
$$\alpha x=\alpha y \text{ 且 } \alpha\neq 0\Rightarrow x=y,$$
$$\alpha x=\beta x \text{ 且 } x\neq\theta\Rightarrow\alpha=\beta.$$

**定义 2.2** 线性空间 $X$ 中的一个非空子集 $M$ 称为 $X$ 中的**线性流形**,如果对任意的 $x,y\in M$ 与数 $\alpha$,都有 $x+y,\alpha x\in M$.

如果 $M$ 是 $X$ 的一个线性流形,不难看出线性空间定义中的八条公设在 $M$ 中亦成立,因此 $M$ 本身也成为线性空间.$X$ 的线性流形称为**真**的,如果它不是全空间 $X$.只由一个零元组成的集合也是线性流形,我们用 $\{\theta\}$ 表示它.

设 $x_1,\cdots,x_n$ 是线性空间 $X$ 中的 $n$ 个元素,$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 $n$ 个数,形如 $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$ 的元素称为元素 $x_1,\cdots,x_n$ 的**线性组合**.

设 $S$ 是线性空间 $X$ 的任意非空子集,考虑 $S$ 中元素的所有线性组合形成的集合 $M$.易见它是 $X$ 的一个线性流形,称为由 $S$ 张成的线性流形,记为 $M=\mathrm{Sp}\{S\}$.容易验证下述论断成立.

(1) $M$ 是 $X$ 中包含 $S$ 的所有的线性流形的交.

(2) $M$ 是 $X$ 中包含 $S$ 的最小线性流形,即如果 $N$ 是 $X$ 中包含 $S$ 的线性流形,则 $N$ 亦包含 $M$.

线性空间中最重要的概念是线性相关与线性无关.

**定义 2.3** 线性空间 $X$ 中有限的向量集合 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 说是**线性相关**的，如果存在不全为零的数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，使 $\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n=\theta$. 否则，就称其为**线性无关**的，这时关系 $\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n=\theta$ 蕴含 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$. 一个无穷的向量集合 $S$ 称为线性无关的，如果 $S$ 的每个有限子集都是线性无关的. 否则，$S$ 称为线性相关的.

容易看出，包含一个线性相关子集的集合一定线性相关，线性无关集一定不包含零向量.

**定义 2.4** 设 $X$ 是线性空间，如果存在正整数 $n$，使 $X$ 包含由 $n$ 个向量组成的线性无关集，而且 $X$ 中每 $n+1$ 个向量的集合都是线性相关的，则 $X$ 称为**有限维**的，如此的 $n$ 称为 $X$ 的**维数**，有时记作 $\dim X=n$.

只有零向量的线性空间也称为有限维的，即零维的. 如果 $X$ 不是有限维的，就称为**无穷维**的，这时记作 $\dim X=\infty$.

正如我们将要看到的，在泛函分析中最感兴趣的空间是无穷维的，但是考虑有限维空间却经常是有益的.

**定义 2.5** 线性空间 $X$ 中的有限子集 $S$ 称为 $X$ 的**基**，如果 $S$ 是线性无关的，而且 $S$ 张成的线性流形就是整个 $X$.

在线性代数中我们已经知道：线性空间 $X$ 是 $n$ 维的，当且仅当 $X$ 有一个由 $n$ 个元素组成的基. $n$ 维线性空间的每个基都含有 $n$ 个元素.

有限维线性空间 $X$ 的任意一个线性流形 $M$ 亦是有限维的，而且 $\dim M\leqslant\dim X$.

参见[2]，第六章.

**定义 2.6** 设 $X$ 是线性空间. 给定 $X$ 的两个线性流形 $M,N$，我们用 $M+N$ 表示所有形如 $m+n$，$m\in M$，$n\in N$ 之元素的集合，称之为 $M$ 与 $N$ 的**和**. 如果还有 $M\cap N=\{\theta\}$，即 $M$ 与 $N$ 有唯一公共元 $\theta$，则以 $M\oplus N$ 代替 $M+N$，称之为 $M$ 与 $N$ 的**直接和**.

如果 $X=M\oplus N$，则称 $M$ 与 $N$ 是**代数互补**的线性流形，$N$ 是 $M$ 在 $X$ 中的一个**代数补**.

**定理 2.1** 设 $M,N$ 是线性空间 $X$ 的线性流形，则 $X=M\oplus N$ 当且仅当对每个 $x\in X$ 有唯一表达式

$$x=m+n,\quad m\in M,n\in N. \tag{2.1}$$

**证** 假设 $X=M\oplus N$，则每个 $x\in X$ 可以表为

$$x=m+n,\quad m\in M,n\in N.$$

如果又有 $m_1\in M$，$n_1\in N$，使

$$x=m_1+n_1,$$

则

$$m+n=m_1+n_1,$$

从而

$$m-m_1=n_1-n\in M\cap N.$$

由假设,$M\cap N=\{\theta\}$,故

$$m-m_1=n_1-n=\theta,$$

即 $m_1=m,n_1=n$.

反之,如果每个 $x\in X$ 有形如(2.1)的唯一表达式,则 $X=M+N$.假如 $x\in M\cap N$,则 $x$ 形如(2.1)的表达式为

$$x=x+\theta,\text{及 } x=\theta+x.$$

根据假设,表达式是唯一的,故 $x=\theta$.从而 $M\cap N=\{\theta\}$.证毕.

**定理 2.2** 如果 $X=M\oplus N$,则

$$\dim X=\dim M+\dim N.$$

**证** 如果 $M$ 和 $N$ 有一个是无穷维的,则 $X$ 亦是无穷维的,结论自然成立.故不妨设 $M$ 和 $N$ 都是有限维的.

设$\{m_1,\cdots,m_j\}$是 $M$ 的基,$\{n_1,\cdots,n_k\}$是 $N$ 的基.因为 $X=M+N$,则$\{m_1,\cdots,m_j,n_1,\cdots,n_k\}$张成 $X$.又因 $M\cap N=\{\theta\}$,可知$\{m_1,\cdots,m_j,n_1,\cdots,n_k\}$线性无关.于是$\{m_1,\cdots,m_j,n_1,\cdots,n_k\}$是 $X$ 的一个基.从而

$$\dim X=j+k=\dim M+\dim N.$$

证毕.

给定线性空间 $X$ 的一个线性流形 $M$,是否一定存在 $M$ 在 $X$ 中的代数补?为了回答这个问题,我们需要引进 Hamel 基的概念.

**定义 2.7** 设 $X$ 是具有非零元的线性空间.$X$ 的子集 $H$ 称为 $X$ 的 Hamel 基,如果

(1) $H$ 是线性无关的;

(2) $H$ 张成的线性流形是整个空间 $X$.

与有限维线性空间的基不同,Hamel 基的存在性不是明显的.

**定理 2.3** 设 $X$ 是线性空间,$S$ 是 $X$ 中任意的线性无关子集,则存在 $X$ 的一个 Hamel 基 $H$,使 $S\subset H$.

**证** 设$\mathscr{S}$是 $X$ 中所有包含 $S$ 之线性无关子集的族,则$\mathscr{S}$按集合的包含关系是部分有序集,即如果 $M,N\in\mathscr{S}$,且 $M\subset N$,则 $M\prec N$.显然$\mathscr{S}$是非空的(因 $S\in\mathscr{S}$).如果 $\mathscr{S}_0$ 是$\mathscr{S}$的完全有序子集,则 $\mathscr{S}_0$ 中所有集合的并仍是 $X$ 中包含 $S$ 的线性无关子集,即这个并仍在$\mathscr{S}$中,它是 $\mathscr{S}_0$ 的上界.因此$\mathscr{S}$满足 Zorn 引理条件,故$\mathscr{S}$中必有极大元,记为 $H$.则 $H\supset S$,且 $H$ 是线性无关的.如果 $H$ 张成的线性流

形不是$X$,则存在$X$中元$x$,它不在$H$张成的线性流形中.这样$H$与$x$的并仍是$X$中包含$S$的线性无关子集,$H$又是它的真子集.这和$H$是$\mathscr{S}$的极大元矛盾.所以$H$张成的线性流形是整个空间$X$.总之,$H$就是$X$的Hamel基.证毕.

由这个定理可见:任何非零线性空间必有一个Hamel基.

事实上,假设$X$是线性空间,包含非零元$x_0$.记$S=\{x_0\}$,则$S$是$X$中线性无关子集.由定理2.3,存在$X$的一个Hamel基.

**定理2.4**　设$M$是线性空间$X$的线性流形,则必存在$X$的线性流形$N$,使$X=M\oplus N$,即$N$是$M$的一个代数补.

**证**　不失一般性,设$M$是$X$之非零的真线性流形,因为$M$本身也是线性空间,它具有Hamel基$H_1$.$H_1$也是$X$的线性无关子集.由定理2.3,存在$X$的一个Hamel基$H$,使$H\supset H_1$.设$N$是由$H\setminus H_1$张成的线性流形,则$N$就是$M$的一个代数补.事实上,任给$x\in X$,它是$H$中元的线性组合,从而可以表成$H_1$中元的线性组合与$H\setminus H_1$中元的线性组合之和,即$M$中元与$N$中元之和.所以$X=M+N$.假若$x\in M\cap N$,则存在$u_1,\cdots,u_j\in H_1,v_1,\cdots,v_k\in H\setminus H_1$以及数$\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\beta_1,\cdots,\beta_k$,使

$$x=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ju_j=\beta_1v_1+\cdots+\beta_kv_k.$$

从而

$$\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ju_j+(-\beta_1)v_1+\cdots+(-\beta_k)v_k=\theta.$$

因$u_1,\cdots,u_j,v_1,\cdots,v_k$是线性无关的,故

$$\alpha_1=\cdots=\alpha_j=\beta_1=\cdots=\beta_k=0.$$

即$x=\theta$.因此$M\cap N=\{\theta\}$.证毕.

**注意**　以后为简便,线性空间的零元常记为0.

## §3　距离空间,距离线性空间

**定义3.1**　若非空集合$X$中任意两个元素$x,y$都对应于一个实数$d(x,y)$,使

(1) $d(x,y)\geqslant 0$,$d(x,y)=0$当且仅当$x=y$,

(2) $d(x,y)=d(y,x)$,

(3) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$

对任意的$x,y,z\in X$成立,则称$X$为**距离空间**,记作$\langle X,d\rangle$,而称$d(x,y)$为$x$与$y$之间的**距离**.通常称(3)为**三角不等式**.

**定义3.2**　设距离空间$\langle X,d\rangle$中的点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,使

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0(\text{或者 }d(x_n,x)\to 0),$$

则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$按距离$d(\cdot,\cdot)$收敛到$x$,并记作$x_n\xrightarrow{d}x$.假如不致引起误会,通

常也简记为 $x_n \to x$.

上面我们只涉及 $X$ 上的拓扑.一般在泛函分析中,$X$ 还是个线性空间,有必要把其上的代数结构与拓扑结构结合起来.这就很自然地导致下面的概念.

**定义 3.3** 设线性空间 $X$ 上还赋有距离 $d(\cdot,\cdot)$,加法和数乘都按 $d(\cdot,\cdot)$ 所确定的极限是连续的,即

(1) $d(x_n,x)\to 0, d(y_n,y)\to 0 \Rightarrow d(x_n+y_n,x+y)\to 0$.

(2) $d(x_n,x)\to 0, \alpha_n\to\alpha \Rightarrow d(\alpha_n x_n,\alpha x)\to 0$.

那么线性空间 $X$ 称为**距离线性空间**.

下面我们看一些具体的距离线性空间的例子,它们在今后会经常遇到.

**例 1** 有界序列空间$(m)$.

设 $X$ 代表所有的有界数列

$$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_j,\cdots\}(\text{常简记为 } x=\{\xi_j\})$$

的集合.即对每个 $x=\{\xi_j\}$,存在常数 $K_x>0$,使得对所有的 $j$,$|\xi_j|\leqslant K_x$,$\xi_j$ 称为元 $x=\{\xi_j\}$ 的第 $j$ 个坐标.

设 $x=\{\xi_j\}$,$y=\{\eta_j\}$ 属于 $X$,$\alpha$ 是数,定义

$$x+y=\{\xi_j+\eta_j\},$$
$$\alpha x=\{\alpha\xi_j\},$$
$$d(x,y)=\sup_{j\geqslant 1}|\xi_j-\eta_j|.$$

不难验证 $d(\cdot,\cdot)$满足距离定义,$X$ 是赋以距离 $d(\cdot,\cdot)$的距离线性空间.这样得到的空间称为**有界序列空间**,记作$(m)$,有时也记作 $l^\infty$.

设 $x_n=\{\xi_j^{(n)}\}$,$n=1,2,\cdots$,$x=\{\xi_j\}$ 都是$(m)$中的元,而且 $d(x_n,x)\to 0$,即任给 $\varepsilon>0$,存在 $n_0=n_0(\varepsilon)$,使当 $n\geqslant n_0$ 时,

$$d(x_n,x)=\sup_{j\geqslant 1}|\xi_j^{(n)}-\xi_j|<\varepsilon.$$

则当 $n\geqslant n_0$ 时,对一切 $j$,

$$|\xi_j^{(n)}-\xi_j|<\varepsilon.$$

反之,如果对任给 $\varepsilon>0$,存在 $n_0=n_0(\varepsilon)$,使当 $n\geqslant n_0$ 时,对一切 $j$,

$$|\xi_j^{(n)}-\xi_j|<\varepsilon.$$

则

$$d(x_n,x)=\sup_{j\geqslant 1}|\xi_j^{(n)}-\xi_j|\leqslant\varepsilon.$$

即 $d(x_n,x)\to 0$.

由此可见空间$(m)$中的收敛就是按坐标的一致收敛.

**例 2** 设 $X$ 代表所有收敛数列

$$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_j,\cdots\}$$

的集合. 即对每个 $x=\{\xi_j\}\in X$, $\lim\limits_{j\to\infty}\xi_j=\xi$ 存在且有限.

像空间$(m)$一样定义加法、数乘和距离 $d(\cdot,\cdot)$, 容易验证 $X$ 是赋有距离 $d(\cdot,\cdot)$的线性空间, 称为**收敛序列空间**, 记作$(c)$.

易见$(c)$是$(m)$的线性流形, 而且距离的定义也是一样的, 因此$(c)$中的收敛亦是按坐标的一致收敛.

**例 3** 本质有界可测函数空间 $L^\infty[a,b]$, 这里 $a,b$ 是任意两个实数, 而且 $-\infty<a<b<\infty$.

在引进这个空间之前, 先引进本质上确界的概念.

设 $f(t)$是区间$[a,b]$上 Lebesgue 可测函数. 如果存在$[a,b]$的一个零测度子集 $E$, 使 $f(t)$在$[a,b]\setminus E$ 上是有界函数, 则称 $f$ 是$[a,b]$上**本质有界可测函数**. 称

$$\operatorname*{esssup}_{t\in[a,b]}|f(t)|\overset{\mathrm{d}}{=}\inf_{m(E)=0}\{\sup_{t\in[a,b]\setminus E}|f(t)|\}$$

为 $f(t)$在$[a,b]$上的**本质上确界**, 这里 $m(E)$表示集合 $E$ 的 Lebesgue 测度.

设 $X$ 代表区间$[a,b]$上所有本质有界可测函数的集合. $X$ 中两个元 $x=x(t)$, $y=y(t)$看作是相等的, 如果 $x(t)$与 $y(t)$是几乎处处相等的, 即 $x(t)=y(t)$, a.e. 于$[a,b]$. 对 $X$ 中的两个元 $x=x(t)$, $y=y(t)$, 数 $\alpha$, 定义

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),\ (\alpha x)(t)=\alpha x(t),\ t\in[a,b],$$

即逐点定义函数的加法和数乘运算. 易见 $X$ 是个线性空间, 又定义

$$d(x,y)=\operatorname*{esssup}_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|.$$

我们来验证它满足距离公设.

(1) 显然 $d(x,y)\geqslant 0$. 如果 $x(t)=y(t)$, a.e. 于$[a,b]$, 则由定义有 $d(x,y)=0$. 另一方面, 如果

$$d(x,y)=\inf_{m(E)=0}\{\sup_{t\in[a,b]\setminus E}|x(t)-y(t)|\}=0,$$

则对每个正整数 $n$, 存在 $E_n\subset[a,b]$, $m(E_n)=0$, 且

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E_n}|x(t)-y(t)|\leqslant\frac{1}{n}.$$

令 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, 则 $m(E)=0$, 而且

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E}|x(t)-y(t)|\leqslant\sup_{t\in[a,b]\setminus E_n}|x(t)-y(t)|\leqslant\frac{1}{n}.$$

令 $n\to\infty$, 可见

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E}|x(t)-y(t)|=0.$$

于是, $x(t)=y(t)$, a.e. 于$[a,b]$, 即 $x=y$.

(2) 是显然的.

(3) 设 $x(t),y(t),z(t)$都是 $X$ 中元, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在$[a,b]$的零测度

集 $E_\varepsilon^1, E_\varepsilon^2$,使

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon^1}|x(t)-y(t)|\leqslant d(x,y)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon^2}|y(t)-z(t)|\leqslant d(y,z)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $E_\varepsilon=E_\varepsilon^1\cup E_\varepsilon^2$,则 $E_\varepsilon$ 仍是$[a,b]$的零测度集,且

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon}|x(t)-z(t)|\\
\leqslant&\sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon}|x(t)-y(t)|+\sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon}|y(t)-z(t)|\\
\leqslant&\sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon^1}|x(t)-y(t)|+\sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon^2}|y(t)-z(t)|\\
\leqslant& d(x,y)+d(y,z)+\varepsilon.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
d(x,z)&=\inf_{m(E)=0}\{\sup_{t\in[a,b]\setminus E}|x(t)-z(t)|\}\\
&\leqslant\sup_{t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon}|x(t)-z(t)|\\
&\leqslant d(x,y)+d(y,z)+\varepsilon.
\end{aligned}$$

$\varepsilon>0$ 是任意的,故

$$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z).$$

总之,$d(\cdot,\cdot)$是一个距离.又容易验证 $X$ 中加法和数乘按这个距离$d(\cdot,\cdot)$是连续的.一般称这样得到的距离线性空间为**本质有界可测函数空间**,记作 $L^\infty[a,b]$.

可以证明 $L^\infty[a,b]$中收敛是几乎处处一致收敛,即设 $x_n(t),x(t)\in L^\infty[a,b]$,则 $d(x_n,x)\to0$ 等价于任给 $\varepsilon>0$,存在正整数 $n_0$ 及零测度集 $E_\varepsilon$,使 $|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$,对 $n\geqslant n_0$ 和所有 $t\in[a,b]\setminus E_\varepsilon$.(参见[11],第 17—18 页)

**例 4** 所有序列空间$(s)$.

设 $X$ 是所有数列的集合.如果 $x=\{\xi_j\},y=\{\eta_j\}$属于 $X$,$\alpha$ 是数,定义

$$x+y=\{\xi_j+\eta_j\},\quad \alpha x=\{\alpha\xi_j\},$$

易见 $X$ 是线性空间,又定义

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|},$$

显然 $d(\cdot,\cdot)$满足距离公设的(1),(2).为证明它满足(3),我们需要一个不等式:

对任意复数 $a,b$,

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}. \tag{3.1}$$

考虑$(0,+\infty)$上函数

$$f(t)=\frac{t}{1+t}.$$

我们有

$$f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0.$$

于是 $f(t)$是$(0,+\infty)$上单调增加函数.因为

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$

故

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\\&=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

即不等式(3.1)成立.

假设 $x=\{\xi_j\}, y=\{\eta_j\}, z=\{\zeta_j\}$都属于 $X$,因为 $\xi_j-\zeta_j=(\xi_j-\eta_j)+(\eta_j-\zeta_j)$, $j=1,2,\cdots$,则由不等式(3.1),

$$\begin{aligned}d(x,z)&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\zeta_j|}{1+|\xi_j-\zeta_j|}\\&\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left[\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}+\frac{|\eta_j-\zeta_j|}{1+|\eta_j-\zeta_j|}\right]\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\eta_j-\zeta_j|}{1+|\eta_j-\zeta_j|}\\&=d(x,y)+d(y,z).\end{aligned}$$

所以 $d(\cdot,\cdot)$是 $X$ 上的距离.容易验证 $X$ 中加法和数乘按上述定义的距离 $d(\cdot,\cdot)$是连续的.这样得到的距离线性空间称为**所有序列空间**,记作$(s)$.

设 $x_n=\{\xi_j^{(n)}\}\in(s)$, $n=1,2,\cdots$, $x_0=\{\xi_j^0\}\in(s)$.如果 $x_n\to x_0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_j^{(n)}=\xi_j^0$, $j=1,2,\cdots$.否则,存在某个正整数 $j$ 及 $\varepsilon_0>0$,与正整数列的子序列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$,使

$$|\xi_j^{(n_k)}-\xi_j^0|\geqslant\varepsilon_0, k=1,2,\cdots.$$

由不等式(3.1)的证明知道,$f(t)=\dfrac{t}{1+t}$是单调递增的,故

$$\begin{aligned}d(x_{n_k},x_0)&\geqslant\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j^{(n_k)}-\xi_j^0|}{1+|\xi_j^{(n_k)}-\xi_j^0|}\\&\geqslant\frac{1}{2^j}\frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}, k=1,2,\cdots.\end{aligned}$$