微积分 附册

——学习辅导与习题解答

刘书田　冯翠莲　编

2

高等教育出版社

微积分附册
——学习辅导与习题解答

刘书田　冯翠莲　编

高等教育出版社

内容提要

本书是与刘书田、冯翠莲编写的《微积分》教材(高等教育出版社出版)相配套的学习辅导书,并按《微积分》教材的章节顺序编排,与教学保持同步。每章分为三部分:教学要求、内容要点与解题思路、教材习题解答。在"内容要点与解题思路"部分,用"讲思路举例题"与"举题型讲方法"的思维方式,揭示具有共性的题目的解题思路,归纳解题方法。读者学习本书可以达到正确理解教学内容,巩固和运用所写知识,纠正在运算过程中常犯的错误,提高分析判断能力和解题能力的目的。

本书与教材具有相对的独立性,也可作为经济类和管理类学生学习"微积分"课程的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分附册——学习辅导与习题解答/刘书田,冯翠莲编.—北京:高等教育出版社,2005.2
ISBN 7-04-016461-2

Ⅰ.微... Ⅱ.①刘...②冯... Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 005576 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京凌奇印刷有限责任公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2005 年 2 月第 1 版
印　　张	17.25	印　　次	2005 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	320 000	定　　价	20.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　16461-00

前　　言

由刘书田、冯翠莲编写，高等教育出版社出版的《微积分》教材是“北京市高等教育精品教材立项项目”，此书一经问世，即受到广大师生的认可和赞许。为适应当前高等教育向普及化方向发展的趋势，满足广大学生学习微积分的需求，我们编写了这本《微积分附册——学习辅导与习题解答》，期望它能对学生学习微积分，掌握教学基本要求，对提高教学质量起到积极的辅助作用。

为与《微积分》教材保持同步，本书按该教材章节顺序编写。每章分为三部分内容：

Ⅰ．教学要求

根据教育部制定的高等专科教育、高等职业教育、成人高等教育经济和管理类学科的《经济数学课程教学基本要求》，结合本书所编写的内容，提出对各章教学的要求，并按“了解”、“理解”或“会”、“掌握”的层次表示程度上的差异，同时也说明了本章的重点和难点内容。

Ⅱ．内容要点与解题思路

这部分内容以《微积分》教材每章中节的顺序编排，有的节中又根据问题性质排序为一、二等，其中每一个问题又分为两部分，第一部分是“内容要点”：提纲挈领地归纳本问题的重要概念、定理和公式，并着重讲述相关的解题思路和解题方法；第二部分是“例题”：例题选择典型，并有针对性。用“讲思路举例题”与“举题型讲方法”的思维方式，揭示具有共性的题目的解题思路和解题方法，以达到深入理解内容，掌握教学基本要求，巩固和运用所学知识，纠正在运算方法和运算过程中常犯的错误的目的，提高分析问题、判断问题及解题能力。

Ⅲ．教材习题解答

对教材中的练习题和习题作出了解答，供教师和学生参考。这些习题，学生最好自己独立完成。

本书在编写过程中得到了高等教育出版社有关领导和负责同志的协助和支持，在此表示感谢！

限于水平，书中不足之处，恳请读者指正。

编者

2004 年 11 月

目　　录

第一章

函　数

I 教学要求

1. 理解函数概念;会求函数的定义域和函数值;理解分段函数的意义.

2. 了解函数的周期性、有界性;理解函数的增减性;会判断函数的奇偶性.

3. 了解反函数概念;会求已知函数的反函数.

4. 记住基本初等函数的主要性质及其图形;理解初等函数的意义.

5. 了解复合函数的意义;熟练掌握将初等函数按基本初等函数的复合和四则运算形式分解.

重点:函数概念.

难点:将初等函数按基本初等函数的复合和四则运算形式分解.

Ⅱ 内容要点与解题思路

§1.1 函 数

一、函数概念

(一) 内容要点

1. 函数定义

以 x 为自变量，y 为因变量的函数记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 D 是**定义域**：自变量 x 的取值范围；f 是**对应法则**：x 与 y 之间对应关系；全体函数值的集合

$$Z=\{y\mid y=f(x),x\in D\}\subset\mathbf{R}$$

是函数的**值域**. 有时用 D_f、Z_f 分别表示函数 f 的定义域、值域.

由函数的定义可知，一个函数被给定要有三个因素：定义域 D、对应法则 f 和值域 Z. 其中前二者为**要素**. 因此，表示函数时，通常不写出值域 Z.

理解函数定义，要掌握以下三方面的内容：

(1) 确定函数的定义域

思路 按函数定义，若自变量 x 取某一数值 x_0 时，函数 y 有确定的值 y_0 与之对应，则称函数 f 在 x_0 有定义.

当函数 $y=f(x)$ 用解析表达式给出，而又没给出自变量 x 的取值范围 D，要确定函数的定义域时，就是求使该解析式有意义的自变量的取值范围.

对于表示应用问题的函数关系，其自变量的取值范围应使实际问题有意义.

(2) 判定两个函数相同

思路 由于定义域和对应法则是确定一个函数的两个要素，因此，两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，当其定义域 D_f 和 D_g 以及对应法则 f 和 g 都相同时，才表示同一个函数.

(3) 正确运用函数记号，求函数值

思路 按函数定义，对 D 中某一定值 x_0，根据法则 f 所对应的因变量称为函数 f 在 x_0 的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y\Big|_{x=x_0}$.

当函数 $y=f(x)$ 用解析表达式给出时，将表达式中之 x 代换以 x_0 便得到 $f(x_0)$.

2. 分段函数

在用公式法表示的函数中，若自变量 x 与因变量 y 之间的函数关系要用两个或多于两个的数学式子来表达，即在函数的定义域的不同部分用不同数学式子表示的函数，称为**分段函数**.

分段函数的定义域是各个部分自变量 x 取值范围之**总和**.

对分段函数 $f(x)$，求函数值 $f(x_0)$ 时，要根据 x_0 所在的部分区间，用 $f(x)$ 相应的表达式求 $f(x_0)$.

(二) 例题

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\ln|3-x|}$； (2) $y=\arcsin\dfrac{2x+1}{5}$.

解 (1) 这是分式. 分子、分母分别讨论：

对分子 $\sqrt{x^2-1}$，因偶次根的根底式应非负，所以有 $x^2-1\geqslant 0$，即 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$. 写成区间则是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$；

对分母 $\ln|3-x|$，因对数符号下的式子应为正，且分母不能为零，所以有

$$\begin{cases}3-x\neq 0,\\ |3-x|\neq 1 \quad (\text{因} \ln 1=0),\end{cases} \qquad \text{即} \begin{cases}x\neq 3,\\ x\neq 2, x\neq 4.\end{cases}$$

分子与分母 x 取值的公共部分，写成区间即 $(-\infty,-1]\cup[1,2)\cup(2,3)\cup(3,4)\cup(4,+\infty)$ 为所求的定义域.

(2) 因反正弦符号下的式子必须在区间 $[-1,1]$ 上取值，所以有

$$-1\leqslant\frac{2x+1}{5}\leqslant 1,\quad -5\leqslant 2x+1\leqslant 5 \quad \text{即} \quad -3\leqslant x\leqslant 2.$$

写成区间，即 $[-3,2]$ 就是所求的定义域.

例 2 判断下列各对函数是否相同，并说明理由：

(1) $f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$；

(2) $f(x)=x+2$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$；

(3) $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 与 $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$；

(4) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 与 $g(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$.

解 (1) 两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，且 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$，即两个函数的对应法则相同，故两个函数相同.

(2) 两个函数的定义域不同：$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$；而 $g(x)$的定义域是 $x\neq 2$，故两个函数不同.

(3) 两个函数的对应法则不相等：$f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\neq g(x)$，故两个函数不同.

(4) 对函数 $f(x)$，由$\dfrac{1+x}{1-x}>0$，即

$$\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}1+x<0,\\1-x<0.\end{cases}$$

推得
$$\begin{cases}x>-1,\\x<1\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}x<-1,\\x>1.\end{cases}\quad (无解)$$

从而 $f(x)$的定义域是$(-1,1)$.

对函数 $g(x)$，易知其定义域也是$(-1,1)$.

又根据对数性质，有 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，故两个函数相同.

例 3 已知函数 $y=f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-1}$，求 $f(-3)$，$f(0)$，$f(3)$，$f(x_0)$，$f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解 函数 $y=f(x)$在 $x=-3$ 处的函数值可表示为 $f(-3)$或 $y\Big|_{x=-3}$.

为求函数在 $x=-3$ 处的函数值，须将 -3 代换解析表示式$\dfrac{2x+3}{x^2-1}$中的 x，进行运算，可得函数值

$$f(-3)=\frac{2\times(-3)+3}{(-3)^2-1}=-\frac{3}{8}，或\ y\Big|_{x=-3}=\frac{2x+3}{x^2-1}\Big|_{x=-3}=\frac{2\times(-3)+3}{(-3)^2-1}=-\frac{3}{8};$$

同样，将 0 代换解析表示式$\dfrac{2x+3}{x^2-1}$中的 x，得函数值

$$f(0)=\frac{2\times 0+3}{0^2-1}=-3,\quad 或\quad y\Big|_{x=0}=\frac{2x+3}{x^2-1}\Big|_{x=0}=\frac{2\times 0+3}{0^2-1}=-3;$$

将 3 代换解析表示式$\dfrac{2x+3}{x^2-1}$中的 x，得

$$f(3)=\frac{2\times 3+3}{3^2-1}=\frac{9}{8}，或\quad y\Big|_{x=3}=\frac{2x+3}{x^2-1}\Big|_{x=3}=\frac{2\times 3+3}{3^2-1}=\frac{9}{8};$$

x_0要理解为一个定数，为求 $f(x_0)$，将 x_0代换解析表示式$\dfrac{2x+3}{x^2-1}$中的 x，得

$$f(x_0)=\frac{2x_0+3}{x_0^2-1}，或\quad y\Big|_{x=x_0}=\frac{2x+3}{x^2-1}\Big|_{x=x_0}=\frac{2x_0+3}{x_0^2-1};$$

为求 $f(-x)$，须用 $-x$ 代换$\frac{2x+3}{x^2-1}$中的 x，得

$$f(-x)=\frac{2(-x)+3}{(-x)^2-1}=\frac{-2x+3}{x^2-1};$$

为求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，须用$\frac{1}{x}$代换$\frac{2x+3}{x^2-1}$中的 x，得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2\times\frac{1}{x}+3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}=\frac{\frac{2+3x}{x}}{\frac{1-x^2}{x^2}}=\frac{2x+3x^2}{1-x^2}.$$

例 4 已知 $f(x)=\frac{x}{1+x}$，求 $f(f(x))$，$f(f(f(x)))$.

解 按求函数值的思路，为求 $f(f(x))$，须用 $f(x)=\frac{x}{1+x}$代换 $f(x)=\frac{x}{1+x}$中的 x. 于是

$$f(f(x))=\frac{f(x)}{1+f(x)}=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x};$$

将 $f(f(x))$的表示式$\frac{x}{1+2x}$代换 $f(x)=\frac{x}{1+x}$中的 x，得

$$f(f(f(x)))=\frac{f(f(x))}{1+f(f(x))}=\frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}}=\frac{x}{1+3x}.$$

例 5 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x<0;\\ 1, & x=0;\\ 1-x, & 0<x\leqslant 2.\end{cases}$

(1) 求函数的定义域；

(2) 求 $f(-2)$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$f(0)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$，$f(2)$；

(3) 可否求 $f(-3)$，$f(5)$？

(4) 画出函数的图形.

解 这是分段函数. 该函数用三个数学式子表示：当 $x\in[-2,0)$时，$f(x)=x^2$；当 $x=0$ 时，$f(x)=1$；当 $x\in(0,2]$时，$f(x)=1-x$.

(1) 由已知分段函数的表示式知，自变量 x 的取值范围有三部分：$x\in[-2,0)$，$x=0$ 和 $x\in(0,2]$. 因此，该函数的定义域是这三个部分之总和，即区间$[-2,2]$.

(2) 由于 $-2\in[-2,0)$，$-\frac{1}{2}\in[-2,0)$，应由区间 $[-2,0)$ 上相对应的表达式 $f(x)=x^2$ 来求 $f(-2)$ 和 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$：

$$f(-2)=(-2)^2=4,\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4};$$

由于 $x=0$ 时，相对应的表达式 $f(x)=1$，故 $f(0)=1$；

由于 $\frac{1}{3}\in(0,2]$，$2\in(0,2]$，应用区间 $(0,2]$ 上相对应的表达式 $f(x)=1-x$ 来求 $f\left(\frac{1}{3}\right)$ 和 $f(2)$：

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},\ f(2)=1-2=-1;$$

(3) 因 $x=-3$ 和 $x=5$ 不在函数的定义域内，函数 $f(x)$ 在 $x=-3$ 和 $x=5$ 处没有定义，不能求 $f(-3)$ 和 $f(5)$.

(4) 函数的图形如图 1.1 所示.

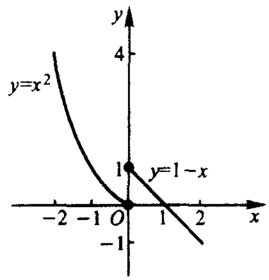

图 1.1

二、函数的奇偶性

(一) 内容要点

判断函数 $f(x)$ 奇偶性的方法

1. 根据函数奇偶性的定义：对给定的函数 $f(x)$，先计算 $f(-x)$，然后与 $f(x)$ 对照：若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数；若上二式均不成立，则 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

2. 用函数图形的对称性：奇函数的图形对称于坐标原点；偶函数的图形对称于 y 轴.

3. 用奇偶函数的四则运算性质：奇函数与奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数与偶函数的代数和仍为偶函数；奇函数与奇函数的乘积(商)为偶函数；偶函数与偶函数的乘积(商)为偶函数；奇函数与偶函数的乘积(商)为奇函数.

4. 用奇偶函数的复合运算的性质：若 $f(x)$ 是偶函数，$\varphi(x)$ 是奇函数，则 $f(f(x))$，$f(\varphi(x))$，$\varphi(f(x))$ 均为偶函数，而 $\varphi(\varphi(x))$ 为奇函数.

注意 函数 $f(x)$ 为奇函数或偶函数，其定义域 D 一定是关于原点对称的区间，即若 $x\in D$，必有 $-x\in D$. 否则 $f(x)$ 即为非奇非偶函数. 例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[-2,2)$ 上不是偶函数.

(二) 例题

例 1 判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}-1$;　　(2) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$;

(3) $f(x)=\cos x+\frac{\sin x}{1+x^2}$.

解 用奇偶函数的定义判定.

(1) 已知函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.因

$$f(-x)=e^{-\frac{1}{(-x)^2}}-1=e^{-\frac{1}{x^2}}-1=f(x),$$

所以 $f(x)$是偶函数.

(2) 可以算得该函数的定义域为$(-1,1)$.由于

$$f(-x)=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

所以 $f(x)$是奇函数.

(3) 已知函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.由于

$$f(-x)=\cos(-x)+\frac{\sin(-x)}{1+(-x)^2}=\cos x-\frac{\sin x}{1+x^2},$$

由于 $f(-x)\neq-f(x)$, $f(-x)\neq f(x)$,所以函数 $f(x)$是非奇非偶函数.

例 2 设函数 $f(x)$在区间$(-a,a)$上有定义,证明:

(1) $f(x)+f(-x)$是偶函数;　　(2) $f(x)-f(-x)$是奇函数.

证 用奇偶函数的定义证明.

(1) 设 $F(x)=f(x)+f(-x)$,因

$$F(-x)=f(-x)+f(-(-x))=f(-x)+f(x)=F(x),$$

所以,$F(x)$是偶函数.

(2) 设 $G(x)=f(x)-f(-x)$,因

$$G(-x)=f(-x)-f(-(-x))=-[f(x)-f(-x)]=-G(x),$$

所以,$G(x)$是奇函数.

说明 由该例知:

(1) 若将 a^x 理解为例中的$f(x)$,则 a^x+a^{-x}为偶函数;而 a^x-a^{-x}为奇函数.读者在做题时,可利用此结论.

(2) 对任意一个函数 $f(x)$,若在以原点为对称点的区间上有定义,它可写成一个偶函数与一个奇函数的和.即

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

例 3 设 $f(x)=\cos(\sin x)$, $g(x)=\sin(\cos x)$, $\varphi(x)=\sin(\sin x)$, $\psi(x)=\cos(\cos x)$,则下列结论正确的是(　　).

A. 它们都是偶函数　　　　B. 它们都是奇函数

C. $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$是偶函数,$\psi(x)$是奇函数

D. $f(x),g(x),\psi(x)$是偶函数,$\varphi(x)$是奇函数

解 因 $\sin x$ 是奇函数,$\cos x$ 是偶函数.由奇偶函数复合运算的性质知,选D.事实上

$$\varphi(-x)=\sin(\sin(-x))=\sin(-\sin x)=-\sin(\sin x)=-\varphi(x);$$

$$f(-x)=\cos(\sin(-x))=\cos(-\sin x)=\cos(\sin x)=f(x).$$

同样可得 $g(-x)=g(x),\psi(-x)=\psi(x)$.

例 4 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,下列函数中是偶函数的是(　　).

A. $[f(x)]^2$　　B. $|f(x)|$　　C. $\cos x\cdot f(x^2)$　　D. $f(-x)$

解 选C.因 $\cos x$ 是偶函数,且 $f((-x)^2)=f(x^2)$,故 $\cos x\cdot f(x^2)$是偶函数.

对任意函数 $f(x)$,不能断定$[f(x)]^2,|f(x)|,f(-x)$的奇偶性.例如,$f(x)=a^x,x\in(-\infty,+\infty)$,则$[f(x)]^2=(a^x)^2=a^{2x},|f(x)|=a^x,f(-x)=a^{-x}$既不是偶函数,也不是奇函数.

说明 这里特别注意,若 $f(x)$是任意函数,则不能断定$|f(x)|$的奇偶性.当 $f(x)$是奇函数或偶函数时,则$|f(x)|$是偶函数.

三、反函数

(一) 内容要点

1. 反函数定义

已知函数 $y=f(x),x\in D$,若其值域为 Z,它的反函数记作

$$x=f^{-1}(y),y\in Z,$$

习惯上,函数 $y=f(x)$的反函数记作

$$y=f^{-1}(x),x\in Z.$$

实际上,$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$互为反函数.函数 $y=f(x)$与其反函数之间有下述关系式

$$y=f(f^{-1}(y))\text{和 } x=f^{-1}(f(x)).$$

2. 反函数的图形

在同一直角坐标系下,函数 $y=f(x)$与其反函数 $x=f^{-1}(y)$的图形是同一条曲线;而 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

3. 反函数的存在性

若 $f(x)$在其定义域 I[①]上为单调函数,则 $f(x)$存在反函数.当 $f(x)$在其

① 区间有有限区间:$(a,b),[a,b],(a,b],[a,b)$;无限区间:$(a,+\infty),[a,+\infty),(-\infty,b),(-\infty,b],(-\infty,+\infty)$.若所讨论的问题在任何一类区间上都成立时,本书用字母 I 表示这样一个泛指的区间.

定义域 I 上为非单调函数时,需将 I 分成若干个单调区间,在每个单调区间上分别求 $f(x)$的反函数.

4. 求反函数的程序

首先,若已知函数 $y=f(x)$,由关系式 $y=f(x)$解出 x,得到关系式 $x=f^{-1}(y)$;

其次,将关系式 $x=f^{-1}(y)$中的字符 x 与 y 互换,便得到所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

5. 求函数的值域

已知函数 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$的定义域就是函数 $y=f(x)$的值域.

(二) 例题

例 1 求下列函数的反函数:

(1) $y=f(x)=3-x^5$; (2) $y=f(x)=3^{x+1}-2$.

解 (1) 由已知关系式 $y=3-x^5$解出 x,得

$$x^5=3-y, \text{ 即 } x=\sqrt[5]{3-y}(\text{这是 } x=f^{-1}(y)),$$

将字母 x 与 y 互换,得所求的反函数

$$y=\sqrt[5]{3-x}(\text{这是 } y=f^{-1}(x)).$$

(2) 由已知关系式得,$3^{x+1}=y+2$.因指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数.由此,对关系式 $3^{x+1}=y+2$ 两端取以 3 为底的对数,并注意到 $\log_3 3=1$,得

$$(x+1)\log_3 3=\log_3(y+2), \text{ 即 } x=\log_3(y+2)-1,$$

按习惯写法,所求反函数为

$$y=\log_3(x+2)-1.$$

例 2 已知函数 $y=f(x)$与 $y=g(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称,且 $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$,求 $f(x)$的值域及 $y=g(x)$.

解 在同一直角坐标系下,函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.由此知,这是求 $y=f(x)$的反函数及其定义域.

设 $y=\dfrac{x+1}{x+2}$,由此式解出 x,得 $x=\dfrac{1-2y}{y-1}$,于是,所求函数为 $y=g(x)=\dfrac{1-2x}{x-1}$.

由于函数 $y=g(x)$的定义域为 $x\neq1$,所以函数 $f(x)$的值域为 $y\neq1$.

例 3 设 $f(x)=\dfrac{4x}{x-1}$,求 $f^{-1}(3)$.