新世纪高级应用型人才培养系列教材
A Practical Textbook Series for the New Century

概率论与数理统计 经管类

0101101010101010111010110

主编 孟昭为 副主编 梁振英 张永凤

0101010111

0101101010101010101

0101101010101010111

010 01 01 010 1001 010

同济大学出版社
Tongji University Press

新世纪高级应用型人才培养系列教材

A Practical Textbook Series for the New Century

概率论与数理统计 经管类

主　编　孟昭为

副主编　梁振英　张永凤

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计. 经管类/孟昭为主编. —上海：同济大学出版社，2005.8

(新世纪高级应用型人才培养系列教材)

ISBN 7-5608-3069-2

Ⅰ. 概…　Ⅱ. 孟…　Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 059772 号

概率论与数理统计

主编　孟昭为　副主编　梁振英　张永凤

责任编辑 卞玉清　责任校对 杨江淮　封面设计 潘向蓁

出版发行	同济大学出版社
	(上海市四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622)
经　销	全国各地新华书店
印　刷	同济大学印刷厂印刷
开　本	787mm×960mm　1/16
印　张	11
字　数	220000
印　数	1—3100
版　次	2005 年 8 月第 1 版　　2005 年 8 月第 1 次印刷
书　号	ISBN 7-5608-3069-2/O・277
定　价	16.00 元

本书若有印装质量问题，请向本社发行部调换

前 言

概率论与数理统计是高等学校工科、经济学和管理学等专业学生必修的基础课，是高等学校本科阶段各专业普遍开设的处理随机现象规律性的一门数学学科. 随着社会经济以及人文哲学数学化进程的日益加速，概率论与数理统计学科与其他学科结合，形成了许多边缘性学科如数学经济学，金融统计学等，概率论与数理统计已经成为全体公民从事经济生产、科学管理和社会研究等活动的一个基本工具. 为此，我们编写了该教材，以供经济管理专业本科的学生使用.

本书是根据教育部颁发的教学大纲，在编者多年的教学与实践基础上编写完成的，作者注意到经济管理学生特点，坚持直观理解与严格论证相结合的原则，保证概率统计的科学性，注重概念定理等基础知识的解释和把握，采用规范的概率统计用语，提高学生运用概率统计理论与方法来解决实际问题的能力.

全书共分九章，前五章为概率部分，第六章到第八章为统计部分，第九章为回归分析.

本书由孟昭为全面筹划定稿，梁振英执笔，孟昭为、梁振英和张永凤共同讨论修正. 在此过程中，梁家君也参与了编写修正，在此表示诚挚的感谢.

由于编者水平有限，书中难免存在一些不足，敬请广大读者批评指正.

编　者

2005 年 7 月

目 录

第一章　随机事件及其概率

在自然界和社会中，人们观察到的现象大体上可分为两类.一类是在一定条件下必然发生的现象，如上抛的石子必然下落，异性电荷必然相互吸引等.这类现象称为必然现象或称为确定性现象.另一类是在一定条件下可能发生，也可能不发生的现象.如抛一枚硬币可能正面（数字）朝上，也可能反面（国徽）朝上；掷一颗骰子可能出现的点数为1，2，3，…，6.这类现象称为随机现象.随机现象在个别观察中出现的结果具有偶然性，看起来杂乱无章，毫无规律可言，但深入研究发现，在大量重复试验或观测中呈现出固有规律性，称统计规律性.例如，多次重复抛一枚硬币得到正、反面朝上的次数大致各半等.概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

第一节　随机试验与随机事件

一、随机试验

在工农业生产和现实生活中，我们遇到过各种各样的试验.在这里，我们把试验作为一个含义广泛的术语，它包括各种各样的科学试验，甚至对某一事物的某一特征的观察.例如：

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

E_2：将一枚硬币连抛二次，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

E_3：将一枚硬币连抛二次，观察出现正面的次数；

E_4：抛一颗骰子，观察出现的点数；

E_5：在一批灯泡中任意抽取一只，测其寿命；

E_6：一射手进行射击，直到击中目标为止，观察射击次数.

这六个试验，具有以下三个共同的特点：

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前，不能确定哪一个结果会出现.

我们把具有上述三个特点的试验称为随机试验，简称为试验，记为 E.

二、样本空间与随机事件

对随机试验 E，尽管在每次试验之前不能确定试验的结果，但试验的所有可

能结果组成的集合是已知的.我们将试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 Ω. Ω 中的每个元素,即 E 的每个结果,称为样本点.例如上述试验 $E_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 的样本空间 Ω_i 分别为:

$\Omega_1=\{H,T\}$;

$\Omega_2=\{HH,HT,TH,TT\}$;

$\Omega_3=\{0,1,2\}$;

$\Omega_4=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$\Omega_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$;

$\Omega_6=\{1,2,3,4\cdots\}$.

要注意的是:样本空间的元素是由试验目的确定的.例如在 E_2 和 E_3 中同是将一枚硬币连抛二次,由于试验目的不同,其样本空间也不一样.

样本空间包含了试验 E 的所有可能结果,试验 E 的每一个可能的结果,即样本空间 Ω 的子集称为随机事件,简称为事件.通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 等表示.在每次试验中,当且仅当这一子集中一个样本点出现时,称这一事件发生.

特别地,由一个样本点组成的单点集,称为基本事件.例如试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$;试验 E_4 有 6 个基本事件 $\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}$.

样本空间 Ω 是 Ω 自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为必然事件.空集 $\varnothing$ 也是 Ω 的子集,它不含任何样本点,且在每次试验中都不发生,称为不可能事件.

三、事件之间的关系与运算

设 E 的样本空间为 $\Omega,A,B,A_i,B_i(i=1,2\cdots)$ 为事件,由于事件是样本空间的子集,所以事件之间的关系就是集合之间的关系,事件之间的运算就是集合之间的运算.

(1) **事件的包含**:若 $A\subset B$,或 $B\supset A$ 则称事件 B 包含事件 A,它表示 A 发生必然导致 B 发生.如图 1-1 所示.对任何一个事件 A,都有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

(2) **事件的相等**:若 $A\subset B$,且 $B\subset A$,称事件 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

(3) **事件的和**:“两个事件 A 与 B 中至少有一个发生”这一事件,称为事件 A 与 B 的和事件,记为 $A\cup B$,如图 1-1 所示.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件,记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(4) **事件的积**:事件 A 与事件 B 同时发生,称为事件 A 与 B 的积事件,记为

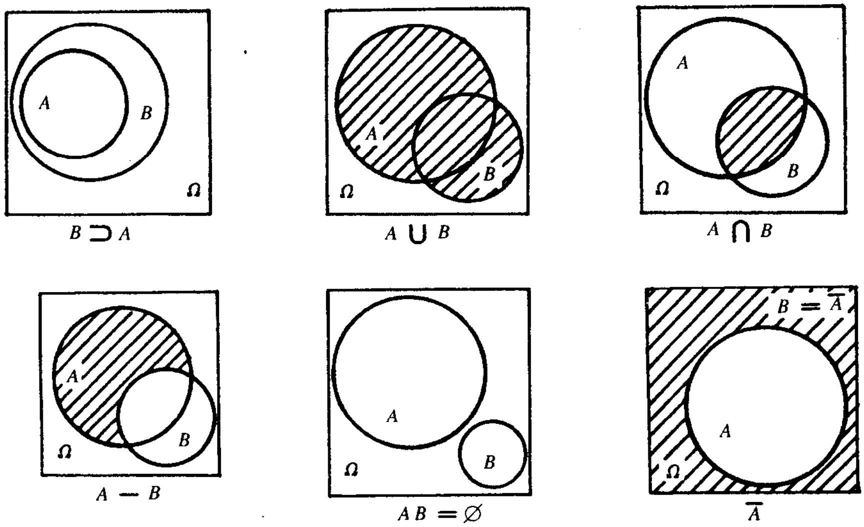

图　1-1

$A \cap B$，简记为 AB，如图所示.

事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$（或表示为 $A_1 A_2 \cdots A_n$）.

“可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生”称为$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积事件，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$.

(5) **事件的差**：“事件 A 发生而 B 不发生”这一事件，称为事件 A 与 B 的差事件，记为 $A-B$（或 $A\overline{B}$），如图所示. 容易验证，对任意事件 A、B 有 $A-B=A\overline{B}=A-AB$.

(6) **互不相容事件**：若 $A \cap B = \varnothing$，称A 与 B 互不相容（或称为互斥事件）. 此时，A 与 B 不能同时发生，无公共样本点，如图 1-1 所示.

(7) **对立事件**：若事件 A 与 B 满足 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \varnothing$，则称 A 与 B 互为对立事件（或称 A 与 B 互为逆事件），又称事件 A 是 B 的对立事件（或事件 B 是 A 的对立事件），记作 $A=\overline{B}$（或 $B=\overline{A}$）如图 1-1 所示. 显然 A 与 B 互逆必互不相容，反之互不相容不一定互逆.

在进行事件运算时，经常要用到下述定律. 设 A, B, C 为事件，则有

交换律：$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$.

结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

德・摩根律：

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B};\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i;\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i.$$

例 1 设 A,B,C 是三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生；

(2) A,B,C 恰有一个发生；

(3) A,B,C 至少有一个发生；

(4) A,B,C 至少有 2 个发生；

(5) A,B,C 不多于 2 个发生.

解 以上事件可依次表示为：

(1) $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A-B-C$；

(2) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$；

(3) $A\cup B\cup C$；

(4) $AB\cup AC\cup BC$；

(5) $\overline{ABC}$或 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C$.

例 2 某射手向一目标连续射击三次，设 A_i 表示事件："第 i 枪击中目标"($i=1,2,3$). 试用 A_1,A_2,A_3 表达下列事件：

(1) 只有第一枪击中；

(2) 只击中一枪；

(3) 三枪都击中；

(4) 三枪都没击中.

解 (1) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$；

(2) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$；

(3) $A_1A_2A_3$；

(4) $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

第二节 频率与概率

在同一试验中，不同事件发生的可能性有大有小，如何用一数量指标表示事件发生的可能性大小呢？为此，首先引入频率.

一、频率

定义 1 在相同条件下，进行 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

由定义，易见频率具有下述基本性质：

性质 1　$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

性质 2　$f_n(\Omega)=1$；

性质 3　若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k). \tag{1}$$

事件 A 的频率的大小，反映了事件 A 发生的频繁程度. 频率越大，事件 A 发生得愈频繁，这意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性愈大. 因而直观想法是用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性大小. 但是否可行？先看下面例子.

例 1　将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，各做 10 遍，得到数据如表 1-1 所示(其中事件 H 表示“出现正面”，n_H 表示 H 发生的频数，$f_n(H)$ 表示 H 发生的频率).

表 1-1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

这种试验历史上许多人做过，得到如表 1-2 所示的数据.

表 1-2

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

从表 1-1、表 1-2 可以看出：抛硬币次数 n 较小时，频率 $f_n(H)$ 在 0 与 1 之

间随机波动，其幅度较大，但随着 n 增大，频率 $f_n(H)$ 呈现出稳定性. 即当 n 逐渐增大时 $f_n(H)$ 总是在 0.5 附近摆动，而逐渐稳定于 0.5. 这个稳定值 0.5 是客观存在的，因此，用这个频率的稳定值来表示事件发生的可能性大小是合适的，进一步抽象得到概率的定义与性质.

二、概率的定义与性质

定义 1(概率的统计定义) 在相同条件下重复进行 n 次试验，如果随着试验次数 n 的增大，事件 A 发生的频率逐渐稳定于某一常数 p，则称该常数 p 为随机事件 A 的概率，记为 $P(A)$，即 $P(A)=p$.

苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)1933 年在综合前人成果的基础上，提出了概率的公理化定义，使概率论成为严谨的数学分支.

定义 2(概率的公理化定义) 设随机试验 E 的样本空间为 Ω，若对于 E 的每一个事件 A，都有一实数 $P(A)$ 与之对应，并且满足下列三条公理，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

公理 1 非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

公理 2 规范性：$P(\Omega)=1$；

公理 3 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，$i,j=1,2,\cdots$ 则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

由概率的公理化定义，可推导出概率的一些重要性质：

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

性质 2 (有限可加性)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{2}$$

性质 3 (逆事件的概率)对任一事件 A 有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

证明 因 $A\cup\overline{A}=\Omega$，且 $A\overline{A}=\varnothing$，所以由性质(2)

$$P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega)=1,$$

$$P(\overline{A})=1-P(A);$$

性质 4 若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$ 且 $P(B)\geqslant P(A)$.

证明 由于 $B=A\cup(B-A)$ 且 $A\cap(B-A)=\varnothing$，所以由性质(2)，

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

故

$$P(B-A)=P(B)-P(A). \tag{3}$$

又由概率的非负性 $P(B-A)\geqslant 0$，知

$$P(B) \geqslant P(A).$$

性质 5 对任一事件 A，$P(A) \leqslant 1$

证明 因 $A \subset \Omega$，由性质(4)得

$$P(A) \leqslant P(\Omega) = 1.$$

性质 6 对任意两事件 A，B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{4}$$

证明 因$A \cup B = A \cup (B - AB)$且 $A(B-AB) = \varnothing$，$AB \subset B$，故

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B-AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

类似地，设 A_1，A_2，A_3 为任意三个事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$-P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3).$$

一般地，对任意 n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k)$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 3 已知事件 A，B 满足 $P(AB) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$，且 $P(A) = p$，求 $P(B)$.

解法一 $P(AB) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(AB),$$

所以 $P(A) + P(B) = 1$，　$P(B) = 1 - P(A) = 1 - p$.

解法二 $P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(AB)$

$$= 1 - P(\overline{A \cup B}) - P(A) + P(AB)$$

$$= 1 - P(\bar{A}\bar{B}) - P(A) + P(AB)$$

$$= 1 - P(A) = 1 - p.$$

第三节　古典概型

在第一节中的随机试验 E_1，E_4，它们具有两个共同的特点：

(1) 试验的样本空间只含有限个样本点；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

我们把具有以上两个特点的试验称为等可能概型.它是概率论发展初期研究的主要对象,故又称为古典概型.

下面讨论古典概型中事件概率的计算公式.

设 $\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,$P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$,显然 $P(e_i)=\frac{1}{n}$.设 A 为 E 的事件,且 $A=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}$,由于基本事件两两互不相容,则

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(e_{i_j})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 包含的基本事件总数}}. \tag{1}$$

例 1 将一枚硬币抛掷三次.

(1) 设事件 A 为"恰有一次出现正面",求 $P(A)$.

(2) 设事件 B 为"至少有一次出现正面",求 $P(B)$.

解 用 H 表示出现正面,T 表示出现反面,则样本空间

$$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$$

(1) $A=\{HTT,THT,TTH\}$,故 $P(A)=\frac{3}{8}$.

(2) $B=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH\}$,故 $P(B)=\frac{7}{8}$

或:$\bar{B}=\{TTT\}$,故 $P(B)=1-(\bar{B})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

例 2 袋中装有 5 个白球,3 个黑球,从中任取 2 个球,求

(1) 取出的两个球都是白球的概率 P_1.

(2) 取出的两个球颜色不同的概率 P_2.

解 由题意 $n=C_{5+3}^2=C_8^2$

(1)
$$P_1=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}=0.357.$$

(2)
$$P_2=\frac{C_5^1\cdot C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}=0.536.$$

例 3 一个盒子中有 6 只球,4 只白球,2 只红球,从中取球两次,每次取一只,求取到的两只球:

(1) 均为白球的概率;

(2) 同色的概率;

(3) 至少有一只为白球的概率;

(4) 颜色不同的概率.

解 考虑两种取球方式:(a)有放回抽样,即第一次取一只球,观察其颜色后

放回盒中，搅匀后再取第二只球；(b) 无放回抽样，即第一次取一只球不再放回盒中，第二次从剩余的球中取一只球.

有放回抽样：

设 A,B,C,D 分别表示事件"两球均为白球"，"两球均为红球"，"两球中至少有一只白球"，"两球颜色不同".

第一次取球，盒中有 6 只球可取，第二次取球，仍有 6 只球可取，因此，样本空间总元素个数 $n=6\times6=36$.

(1) 对事件 A，第一次只能从 4 只白球中任取一只，第二次也只能从 4 只白球中取一只，所以 $k=4\times4=16$.

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}.$$

(2) 两只球同色可表示为 $A\cup B$，而 $AB=\varnothing$，$P(B)=\dfrac{2\times2}{6\times6}=\dfrac{1}{9}$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}.$$

(3) 由于 $C=\overline{B}$，所以

$$P(C)=P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$$

(4) D 事件包含两个不相容事件：第一次白球、第二次红球，第一次红球、第二次白球，故

$$P(D)=\frac{4\times2}{6\times6}+\frac{2\times4}{6\times6}=\frac{4}{9}.$$

无放回抽样：

(1) $P(A)=\dfrac{k}{n}=\dfrac{4\times3}{6\times5}=\dfrac{2}{5}$.

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{4\times3}{6\times5}+\dfrac{2\times1}{6\times5}=\dfrac{7}{15}$.

(3) $P(C)=1-P(B)=1-\dfrac{2\times1}{6\times5}=\dfrac{14}{15}$.

(4) $P(D)=\dfrac{4\times2}{6\times5}+\dfrac{2\times4}{6\times5}=\dfrac{8}{15}$.

例 4 从 0,1,2,3 这四个数字中任取 3 个不同数排成一个三位数，求这个三位数是偶数的概率.

解 设 A 表示事件"三位数为偶数"；A_0 表示"排成的是三位数且末位为 0"；A_2 表示"排成的是三位数且末位为 2". 则有，$A=A_0\cup A_2$ 且 $A_0A_2=\varnothing$，由有限可加性得

$$P(A) = P(A_0) + P(A_2) = \frac{3 \times 2}{4 \times 3 \times 2} + \frac{2 \times 2}{4 \times 3 \times 2} = \frac{5}{12}.$$

例 5　有 n 个人，每个人以相同的概率 $\frac{1}{N}$ 被分配到 $N(n \leqslant N)$ 间房的每一间中去，求下列事件的概率．

(1) A 事件："某指定的 n 间房中各有一个人"；

(2) B 事件："恰有 n 间房，其中各有一个人"；

(3) C 事件："某指定的一间房中恰有 m 个人 $(m < n)$"．

解　(1) 基本事件总数为 N^n，而指定的 n 间房各有一个人，相当于 n 个元素的全排列，共 $n!$ 种不同分法，故

$$P(A) = \frac{n!}{N^n}.$$

(2) 恰有 n 间房，其中各有一个人，是指任意的 n 间房中各有 1 人，共有 $C_N^n \cdot n!$ 种，故

$$P(B) = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n (N-n)!}.$$

(3) 从 n 个人中选 m 个分配到指定的一间房中，有 C_n^m 种选法；而其余的 $n-m$ 个人分到其余 $N-1$ 间房，有 $(N-1)^{N-m}$ 种方法，所以事件 C 包含的基本事件数为 $C_n^m (N-1)^{n-m}$，

$$P(C) = \frac{C_n^m (N-1)^{n-m}}{N^n} = C_n^m \left(\frac{1}{N}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-m}.$$

例 6　一个五位数字号码锁，每位上可以取 0,1,2,…,9 十个数码中的一个，若某人开一次就把该锁打开，问是否可推断该人事先知道打开该锁的号码？

解　每一个五位数为开锁试验的一个基本事件，假定此人不知道开锁的号码，则任意一个五位数出现都是等可能的，该试验属于古典概型．基本事件总数为 10^5.

设 A 表示"一次将锁打开"这一事件，它包含的基本事件个数为 1，所以

$$P(A) = \frac{1}{10^5} = 0.00001.$$

这说明 A 发生的概率很小，称 A 为小概率事件．人们在长期的实践中认识到"小概率事件在一次试验中实际上几乎是不发生的"(称之为实际推断原理)．现在概率很小的事件 A 在一次试验中竟然发生了，因此，有理由怀疑假设的正确性，从而可推断此人事先知道打开该锁的号码．

第四节　条件概率

一、条件概率

在实际问题中常常要考虑在事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的概率，记为 $P(B \mid A)$，先举一个例子．

例 1　从标号为 1，2，3，4 的四个球中任取一球．A 表示事件“取得标号为偶数的球”，B 表示“取得标号为 4 的球”，求在已知取到的球之标号为偶数的条件下，所取的球为 4 号球的概率．

由题意知，所求事件的概率为 $P(B \mid A)$．若事件 A 已经发生，则只有两种可能，即取到 2 号球，或取到 4 号球，因此

$$P(B \mid A) = \frac{1}{2}.$$

注意到

$$P(A) = \frac{2}{4}, \quad P(AB) = \frac{1}{4}, \quad P(B \mid A) = \frac{1}{2} = \frac{1/4}{2/4}.$$

所以

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

对一般古典概型问题，上式仍然成立．事实上，设试验的基本事件总数为 n，A 所包含的基本事件数为 $m(m > 0)$，AB 所包含的基本事件数为 k，则

$$P(B \mid A) = \frac{k}{m} = \frac{k/n}{m/n} = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

由此，我们给出条件概率的一般定义．

定义　设 A，B 是两个事件，且 $P(A) > 0$，称

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \tag{1}$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率．

不难验证，条件概率符合概率公理化定义中的三个条件，即

(1) 非负性：对每一事件 B，$0 \leqslant P(B \mid A) \leqslant 1$；

(2) 规范性：$P(\Omega \mid A) = 1$；

(3) 可列可加性：若 B_1，B_2，… 是两两互不相容的事件，则