开天

冯红 编著

线性代数大讲堂

提高冲刺版

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

线性代数大讲堂

提高冲刺版

冯红 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数大讲堂·提高冲刺版 / 冯红编著 .—大连 ：大连理工大学出版社，2005.8
ISBN 7-5611-2977-7

Ⅰ.线… Ⅱ.冯… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 052152 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河　邮政编码:116024
电话:0411-84708842　传真:0411-84701466　邮购:0411-84707961
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm　印张:11　字数:404 千字
印数:1～6 000
2005 年 8 月第 1 版　　2005 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:吴孝东　　责任校对:高继魏
封面设计:宋　蕾

定　价:18.00 元

卷首感言

大学是人一生中最为关键的阶段。从入学的第一天起，你就应当对大学四年有一个正确的认识和规划。为了在学习中享受到最大的快乐，为了在毕业时找到自己最喜爱的工作，每一个刚进入大学校园的人都应当掌握七项学习：学习自修之道、基础知识、实践贯通、兴趣培养、积极主动、掌控时间、为人处事。只要做好了这七点，大学生临到毕业时的最大收获就绝不会是“对什么都没有的忍耐和适应”，而应当是“对什么都可以有的自信和渴望”。只要做好了这七点，你就能成为一个有潜力、有思想、有价值、有前途的、快乐的毕业生。

数学是理工科学生必备的基础。很多学生在高中时认为数学是最难学的，到了大学里，一旦发现本专业对数学的要求不高，就会彻底放松对数学知识的学习，而且他们看不出数学知识有什么现实的应用或就业前景。但大家不要忘记，绝大多数理工科专业的知识体系都建立在数学的基础之上。例如，要想学好计算机工程专业，那至少要把离散数学（包括集合论、图论、数理逻辑等）、线性代数、概率统计和数学分析学好；要想进一步攻读计算机科学专业的硕士或博士学位，可能还需要更高的数学素养。同时，数学也是人类几千年积累的智慧结晶，学习数学知识可以培养和训练人的思维能力。通过对几何的学习，我们可以学会用演绎、推理来求证和思考的方法；通过学习概率统计，我们可以知道该如何避免钻进思维的死胡同，该如何让自己面前的机会最大化。所以，大家一定要用心把数学学好，不能敷衍了事。学习数学也不能仅仅局限于选修多门数学课程，而是要知道自己为什么学习数学，要从学习数学的过程中掌握认知和思考的方法。

虽然我一向鼓励大家追寻自己的兴趣，但在这里仍需强调，生活

中有些事情即便不感兴趣也是必须要做的。例如，打好基础，学好数学、英语和计算机的使用就是这一类必须做的事情。如果你对数学、英语和计算机有兴趣，那你是幸运儿，可以享受学习的乐趣；但就算你没有兴趣，你也必须把这些基础打好。打基础是苦功夫，不愿吃苦是不能修得正果的。

经过大学四年，你会从思考中确立自我，从学习中寻求真理，从独立中体验自主，从计划中把握时间，从交流中锻炼表达，从交友中品味成熟，从实践中赢得价值，从兴趣中攫取快乐，从追求中获得力量。

离开大学时，只要做到了这些，你最大的收获将是“对什么都可以拥有的自信和渴望”。你就能成为一个有潜力、有思想、有价值、有前途的中国未来的主人翁。

李开复

2005 年 2 月

——摘自：“给中国学生的第四封信：大学四年应是这样度过”

前　言

本书是大学本科理工、经济类专业《线性代数》课程的教学参考书。线性代数既是相关专业必修的重要基础课，也是硕士研究生入学统一考试的必考内容之一。这门课程的特点是内容比较抽象，概念、定理比较多，前后联系紧密，环环相扣，相互渗透。本书的目的是更好地帮助初学者和备考硕士研究生的读者进一步加深对课程内容的理解，扩大课堂的信息量，掌握各种题型的解题方法，提高应试能力。

本书根据教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试·数学考试大纲》中线性代数部分的要求，并结合同济大学《工程数学·线性代数》(第四版)编写。全书共分六章，每章包括如下内容。

本章知识脉络图

清晰、简洁、系统地给出了本章的基本概念、定理、公式等知识结构，使读者对本章的知识点有一个提纲挈领的总体了解。

内容精讲

简明扼要地总结了学习过程中必须掌握的基本概念、性质、定理和常用结论，力求做到基本概念准确、精炼，基本理论条理、系统，基本方法简明、实用。

分类剖析

本部分是每章的核心内容。紧扣大纲要求，切合内容精讲，尽可能全面地遴选了本课程所涉及的典型题型，便于读者理解和掌握课程内容及要求。例题解析贴切透彻、举一反三，为读者寻求正确解题思路、采用巧妙解题方法、书写格式规范等都将起到启发诱导和示范的作用。

真实考场和挑战极限

以考试的形式检测读者对本章课程的掌握程度，提高读者的应试能力。"真实考场"目的是检测读者对本章基本概念、定理、公式等知识的理解与运用，难度与期末考试相当；"挑战极限"中的题目相对

较难些，综合性更强些，与考研题目相当。

编者长期从事线性代数的教学与研究生入学考试辅导工作，在编写过程中力求将多年的教学心得和积累融入书中，希望本书对读者有所帮助。由于水平有限，书中不足和疏漏之处在所难免，恳请同仁和读者批评指正。

编著者
2005 年 8 月

目 录

第一章　行列式

本章知识脉络图

- 行列式
  - 定义
    - 归纳定义　$|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}$
    - 逆序的定义　$|A| = \sum\limits_{j_1,j_2,\cdots,j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$
  - 性质
    - (1) $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$
    - (2) 一行为零或两行成比例 $\Rightarrow |A| = 0$
    - (3) 拆项(加法)
    - (4) 提出公因子 $k(k \neq 0)$(数乘)
    - (5) 两行互换,行列式变号
    - (6) 某行 k 倍加到另一行,其值不变
  - 展开式
    - 余子式 M_{ij},代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$
    - $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} |A|, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$
  - 计算
    - 元素的规律性,性质,展开式
    - 方法
      - (1) 三角化法
      - (2) 消零展开
      - (3) 拆项
      - (4) 加边
      - (5) 递推
      - (6) 归纳
      - (7) 利用范德蒙德行列式
  - 应用
    - 克莱姆法则及应用
    - 几何应用
    - 行列式表示的函数(代数) 方程的根

内容精讲

1 行列式的定义

(1) n 阶行列式的"递归"定义

由 n^2 个数组成的 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个算式。

当 $n = 1$ 时，$|a_{11}| = a_{11}$；

当 $n \geqslant 2$ 时，

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

其中 $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$ 为 a_{1j} 的代数余子式。

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 a_{1j} 的余子式。

(2) n 阶行列式的"逆序"定义

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是对所有的 n 阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和，故 n 阶行列式等于 $n!$ 项取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和，每一项的正负号取决于组成该项的 n 个元素的列下标排列的奇偶性(当把其行下标按自然顺序排列时)。即当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时，取正号；当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时，取负号。

2 行列式的性质

(1)行列式的行与列互换，其值不变。

(2)行列式中任意两行(或列)互换,则行列式仅改变正负号。

(3)行列式中有两行(或列)对应元素相同,则行列式等于零。

(4)行列式中某行的各元素有公因子 k,则可以提到行列式符号之外。

(5)行列式中有两行(或列)对应元素成比例,则行列式等于零。

(6)如果行列式中某列(或行)各元素均为两项之和,则行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j}+c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j}+c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj}+c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(7)如果行列式的某一行(或列)的各元素同乘以数 k 后加到另一行(或列)的对应元素上去,则行列式的值不变。

3 行列式的展开

(1)余子式和代数余子式

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列,由余下来的元素按原来的次序排成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij},而称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式。

(2)行列式按一行(列)展开定理

n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列)各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{1j}A_{1j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},(i,j=1,2,\cdots,n)$$

一般地,有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases} D, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=\begin{cases} D, & j=k \\ 0, & j\neq k \end{cases}$$

(3)子式及其代数余子式

n 阶行列式 D 中,任意取定 k 行 k 列($1\leqslant k\leqslant n$),位于这些行和列的交点上的 k^2 个元素按照原来的次序组成的一个 k 阶行列式 M,称为行列式 D 的一个 k 阶子式。在 D 中划去这 k 行 k 列后余下的元素按原来的次序组成的 $n-k$ 阶行

列式 N 称为 M 的余子式。设 M 在 D 中所在的行、列指标分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$；$j_1,j_2,\cdots,j_k$，则称

$$A=(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}N$$

为 M 的代数余子式。

(4)拉普拉斯(Laplace)展开定理

设在行列式 D 中任意取定 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 行，由这 k 行元素所组成的一切 k 阶子式 $M_1,\cdots,M_t(t=C_n^k)$ 与它们对应的代数余子式 $A_1,\cdots,A_t$ 乘积之和等于 D，即

$$D=\sum_{i=1}^{t}M_iA_i=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t$$

4 常用的几个行列式

(1)上(下)三角行列式的值等于主对角元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2)下(上)边的元素全为 0 的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(3)n 阶范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

注意 $V_n=0$ 当且仅当 $x_1,\cdots,x_n$ 中有两数相等。

(4) n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x & a \\ a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

(5)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{11} & \cdots & d_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

(6)
$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & d_{m1} & \cdots & d_{mn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

5 克莱姆(Cramer)法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式

$$D=|\boldsymbol{A}|\neq 0$$

那么线性方程组有解,并且解是惟一的,解可以通过系数表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 j 列的元素换成方程组的常数项 $b_1,\cdots,b_n$ 后所得到的矩阵的行列式。

分类剖析

1 有关排列的题型

求排列的逆序数

根据定义,排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$等于 i_1 后面比 i_1 小的数的个数,i_2 后面比 i_2 小的数的个数,…,i_{n-1}后面比 i_{n-1}小的数的个数的总和。

【例 1-1】 求下列排列的逆序数。

(1)1234; (2)4312;

(3)$13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$;

(4)$13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$;

(5)$n(n-1)\cdots2\cdot1$。

解 (1)$\tau(1234)=0+0+0+0=0$

(2)$\tau(4312)=3+2+0+0=5$

(3)此排列中，前 n 个数 $13\cdots(2n-1)$之间不构成逆序，后 n 个数 $24\cdots(2n)$之间也不构成逆序，只有前 n 个数 $13\cdots(2n-1)$与后 n 个数 $24\cdots(2n)$之间才构成逆序，

$$\tau(13\cdots(2n-1)24\cdots(2n))=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

(4)此排列前 n 个数之间不构成逆序，后 n 个数之间构成逆序，前 n 个数与后 n 个数之间构成逆序。

$$\begin{aligned}&\tau(13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2)\\&=1+2+\cdots+n-1+n-1+n-2+\cdots+1=n(n-1)\end{aligned}$$

(5)$\tau(n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1)=n-1+n-2+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$

【例 1-2】 设 n 阶排列 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$ 的逆序数为 k，求 n 阶排列 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 的逆序数。

分析 设排列(Ⅰ)$a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$；(Ⅱ)$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$。对于 $1,2,\cdots,n$ 中的任一对数(i,j)，若(i,j)在(Ⅰ)中不构成逆序，则(i,j)在(Ⅱ)中构成逆序；反之，若(i,j)在(Ⅰ)中构成逆序，则(i,j)在(Ⅱ)中不构成逆序。

解法 1 在 $1,2,\cdots,n$ 中共有$\dfrac{n(n-1)}{2}$对数。由以上分析，可得

$$\tau(a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n)+\tau(a_na_{n-1}\cdots a_2a_1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

故
$$\begin{aligned}\tau(a_na_{n-1}\cdots a_2a_1)&=\frac{n(n-1)}{2}-\tau(a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n)\\&=\frac{n(n-1)}{2}-k\end{aligned}$$

解法 2 若在排列(Ⅰ)中关于 a_1 有 m_1 个逆序，则有$(n-1)-m_1$ 个顺序，即在排列(Ⅱ)中关于 a_1 的逆序有$(n-1)-m_1$ 个；若在(Ⅰ)中关于 a_2 有 m_2 个逆序，则在(Ⅱ)中关于 a_2 有$(n-2)-m_2$ 个逆序；依次下去，若在(Ⅰ)中关于 a_n 有 m_n 个逆序，则在(Ⅱ)中关于 a_n 有$(n-n)-m_n$ 个逆序，而 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)=m_1+\cdots+m_n=k$，故

$$\begin{aligned}\tau(a_na_{n-1}\cdots a_2a_1)&=(n-1)-m_1+(n-2)-m_2+\cdots+(n-n)-m_n\\&=\frac{n(n-1)}{2}-(m_1+m_2+\cdots+m_n)\\&=\frac{n(n-1)}{2}-k\end{aligned}$$

确定排列的奇偶性

排列的奇偶性是由此排列逆序数的奇偶性来确定的。

【例 1-3】 确定例 1-1 中各排列的奇偶性。

解 (1),(2)分别为偶排列和奇排列。

(3)当 $n=4k$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$为偶数,排列为偶排列;

当 $n=4k+1$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$为偶数,排列为偶排列;

当 $n=4k+2$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$为奇数,排列为奇排列;

当 $n=4k+3$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$为奇数,排列为奇排列。

【例 1-4】 选择 i 与 k 使

(1)$1274i56k9$ 成偶排列;

(2)$1i25k4897$ 成奇排列。

解 (1)i,k 只能为 3,8 或 8,3。当 $i=3,k=8$ 时,$\tau(127435689)=4+1=5$,故 127435689 为奇排列。故 $i=8,k=3$ 时,127485639 为偶排列。

(2)i,k 只能为 3,6 或 6,3。当 $i=3,k=6$ 时,排列 $1i25k4897$ 的逆序数 $\tau(132564897)=1+1+1+1=4$ 为偶排列。故 $i=6,k=3$ 满足要求。

2 有关行列式的题型

行列式的概念

【例 1-5】 在 6 阶行列式中,$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$;$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 这两项应带有什么符号?

解 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 的符号应为$(-1)^{\tau(234516)+\tau(312645)}=(-1)^8=1$;

$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 的符号应为$(-1)^{\tau(341562)+\tau(234165)}=(-1)^{10}=1$。

【例 1-6】 写出 4 阶行列式中所有带有负号并且包含因子 a_{23} 的项。

解 设这样的项为

$$a_{1i_1}a_{23}a_{3i_2}a_{4i_3}$$

则排列

$$i_1 3 i_2 i_3$$

为奇排列,且 i_1,i_2,i_3 只能取 1,2,4。由此计算得

$$1324,\quad 4312,\quad 2341$$

是所有满足此条件的 4 阶排列。于是所有带有负号并且含因子 a_{23} 的项为

$$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},\quad a_{14}a_{23}a_{31}a_{42},\quad a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$$

【例 1-7】 设多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$