朱经浩　编著

复变函数教程

FuBian Hanshu Jiaocheng

同济大学出版社

复变函数教程

朱经浩　编著

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数教程/朱经浩编著. —上海:同济大学出版社,2005.8

ISBN 7-5608-3046-3

Ⅰ.复... Ⅱ.朱... Ⅲ.复变函数—高等学校—教材 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 049712 号

复变函数教程

朱经浩 编著

策划 吴凤萍 责任编辑 兰孝仁 责任校对 杨江淮 装帧设计 李志云

出版发行 同济大学出版社

(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经销 全国各地新华书店

印刷 江苏省通州市印刷总厂有限公司

开本 850mm×1168mm 1/32

印张 7.5

字数 218000

印数 1—4100

版次 2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

书号 ISBN 7-5608-3046-3/O·278

定价 12.80 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

内 容 提 要

本书是作者根据多年讲授工科“复变函数”课程的讲义编写而成。全书的主要内容有：复平面上的复变函数、解析函数的微积分、孤立奇点的处理方法、与解析函数有关的若干应用问题、保形映照、积分变换和习题精选与解题指导等七章。书后还附有附录傅氏变换简表和拉氏变换简表。

本书思路新颖，文字浅显易懂，适用面广。可作为综合大学、师范院校以及理工科院校相关专业的教材或参考书。

前　言

本书是作者根据多年讲授工科“复变函数”课程的讲义编写而成。主要包含复变函数基本知识、解析函数、孤立奇点、保形映照和积分变换等内容。在选材上，本书既注重工科数学要求的计算技能的训练，又注意引导论证能力的培养，做到既方便教师教学，又方便学生使用本书。在编写上，思路新颖，考虑到复变函数的教学恰逢学生学完工科高等数学的时候，将复变函数与高等数学做了比较；而将与解析函数相关的一些问题归为一章，使学生有一些应用解析函数方法的实践；并将一些有普遍意义和指导意义的习题精选与解题指导单独列为一章仔细讲解，使学生有提高解题能力的机会。这是本书的特色。

在编写过程中，本书得到同济大学出版社和同济大学应用数学系的大力支持，同济大学出版社的编辑，特别是吴凤萍老师和兰孝仁老师为本书的出版付出了辛勤的劳动，应用数学系研究生马婧瑛、朱丙坤和王成做了许多工作，特别是马婧瑛同学，在该书的完成中做了大量的具体工作，他们的努力，使本书得以顺利出版，谨向他们致以诚挚的谢意。

朱经浩

2005 年 6 月于同济大学

注：本书为同济大学“十五”规划教材，受到同济大学教材、学术著作出版基金委员会资助。

目 录

第一章 复平面上的复变函数

一、复数和平面向量

1. 复数

初等代数中已引进记号 i,代表代数方程 $x^2+1=0$ 的一个根,其含义为 $i^2=-1$。对 xy 平面上一个点 $A=(x, y)$,其中,x, y 为实数,称 $x+iy$ 为与 A 对应的一个复数,通常记为 z。也用 $\mathrm{Re}\,z$ 记 z 的实部 x,用 $\mathrm{Im}\,z$ 记 z 的虚部 y(见图 1-1)。xy 平面也称复平面。对点 $A=(x, y)$ 有惟一的向量 $\overrightarrow{OA}=\{x, y\}$ 与之对应,所以,复数 $z=x+iy$ 也是与向量$\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$一一对应的,与原点或零向量对应的复数为 $z=0$。定义复数 $z=x+iy$ 的绝对值$|z|$为向量$\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$的模,即 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$。可见总有 $|\mathrm{Re}\,z|\leqslant|z|$,$|\mathrm{Im}\,z|\leqslant|z|$。

2. 共轭复数

与点(x, y)关于实轴对称的点为$(x, -y)$,对 $z=x+iy$,记 $\bar{z}=x-iy$,并称 $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数,即 $\overline{x+iy}=x-iy$。如图 1-2 所示,显然有 $\bar{\bar{z}}=z$,$|\bar{z}|=|z|$。

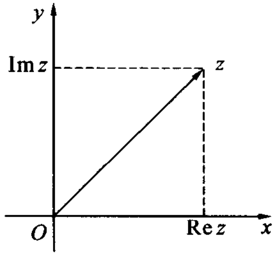

图 1-1

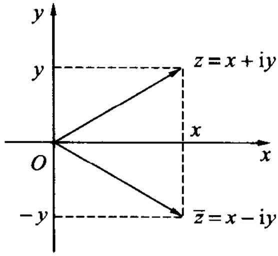

图 1-2

类似地，给出 n^2 个数 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \cdots, n$)，定义 n **阶行列式**

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} -$$

$$a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

n 阶行列式可简记为 $D_n = |a_{ij}|$，并规定 1 阶行列式 $D_1 = |a_{11}| = a_{11}$.

在 n 阶行列式 $D_n = |a_{ij}|$ 中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列，剩下的元素按原来的排法，构成一个 $n-1$ 的行列式

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 M_{ij} 为行列式 D_n 中元素 a_{ij} 的**余子式**，并称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**.

当 $n \geqslant 2$ 时

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \cdots + a_{1n} A_{1n},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} \tag{1-3}$$

例 1-1 设 $z=\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，求 $\operatorname{Re} z$，$\operatorname{Im} z$，$|z|$。

解

$$\operatorname{Re} z=\operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)+\operatorname{Re}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)=\operatorname{Re}\left[\frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2}\right]+\operatorname{Re}\left[\frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{-1}\right]$$

$$=\operatorname{Re}\left[\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\right]+\operatorname{Re}[-1-\mathrm{i}]=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2},$$

$$\operatorname{Im} z=\operatorname{Im}\left[\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\right]+\operatorname{Im}[-1-\mathrm{i}]$$

$$=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2},$$

$$|z|=\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

例 1-2 设 $z_1=3+4\mathrm{i}$，$z_2=1-2\mathrm{i}$，求$\frac{z_1}{z_2}$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$。

解

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\frac{(3+4\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{1+4}=-1+2\mathrm{i},$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-1-2\mathrm{i}$$

6. 复数共轭下的四则运算

在今后应用中常进行复数共轭下的四则运算，主要规则如下：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$；

(2) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$；

(3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$，$(z_2 \neq 0)$；

(4) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\, z$，　$z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}\, z$。

例 1-3　设 z_1 及 z_2 为两个复数，试证

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

并用此等式证明三角不等式式(1-1)。

证

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leqslant |z_1\bar{z}_2|$，所以由所证等式可得三角不等式式(1-1)。

二、复数的三角表示

1. 三角表示

设 θ 为一实数，由高等数学可知

$$\cos\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!},\ \sin\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

可形式地得到(注意 i 的定义)，

$$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i}\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\theta)^k}{(k)!}$$

于是，类比高等数学中指数函数 e^x 的级数表达式，可记

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \tag{1-4}$$

这就是所谓欧拉公式。

对复数 $z = x + \mathrm{i}y$，利用极坐标公式

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$

和欧拉公式，有

$$z = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1-5}$$

复数的这种表示称为三角表示。这里称 r 为 z 的模，θ 为 z 的幅角，如图 1-4 所示。显然有 $r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$。当复数 $z \neq 0$ 时，有

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

这里，$\theta_0 \in (-\pi, \pi]$，由 θ 惟一确定而被称为复数 z 的主幅角。记 $\theta = \mathrm{Arg}\, z, \theta_0 = \arg z$。所以有

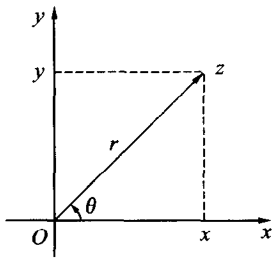

图 1-4

$$\theta = \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1-6}$$

于是，$\mathrm{Arg}\, z$ 表示复数 z 的幅角，而 $\arg z \in (-\pi, \pi]$ 表示复数 z 的主幅角。只有当 $z = 0$ 时，$\mathrm{Arg}\, z$ 无定义。

2. 关于幅角的计算

非零复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的主幅角为从正实轴出发绕原点到向量 $\{x, y\}$ 所在的射线所经过的绝对值小于或等于 π 的角，若 $z = x + \mathrm{i}y$ 在上半平面及负实轴上时主幅角为正角，反之为负角。而若 z 在正实轴上时，即当 $\mathrm{Im}\, z = 0$，$\mathrm{Re}\, z > 0$ 时，$\arg z = 0$。按此定义，有

$$\sin(\arg z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}$$

所以，

$$当\ \mathrm{Im}\, z = 0\ 时，\quad \arg z = \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}\, z > 0 \\ \pi & \mathrm{Re}\, z < 0; \end{cases} \tag{1-7}$$

当 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 时， $\arg z = \begin{cases} \arcsin \dfrac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} & \mathrm{Re}\, z \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin \dfrac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} & \mathrm{Re}\, z < 0; \end{cases}$

(1-8)

当 $\mathrm{Im}\, z < 0$ 时， $\arg z = \begin{cases} \arcsin \dfrac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} & \mathrm{Re}\, z \geqslant 0 \\ -\pi - \arcsin \dfrac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} & \mathrm{Re}\, z < 0 \end{cases}$

(1-9)

例 1-4 求 $\arg(2-2\mathrm{i})$ 和 $\mathrm{Arg}(-3+4\mathrm{i})$。

解 由公式(1-7)、(1-8)和(1-9)可知

$$\arg(2-2\mathrm{i}) = \arcsin \frac{-2}{\sqrt{2^2+(-2)^2}} = \arcsin \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4};$$

$$\arg(-3+4\mathrm{i}) = \pi - \arcsin \frac{4}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} = \pi - \arcsin \frac{4}{5};$$

$$\mathrm{Arg}(-3+4\mathrm{i}) = \arg(-3+4\mathrm{i}) + 2k\pi = -\arcsin \frac{4}{5} + (2k+1)\pi$$

例 1-5 把 $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ 进行三角表示。

解 因为 $|z| = |1-\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$，及

$$\arg(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = \arcsin \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}} = \arcsin\left[\frac{-\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{\pi}{-3}$$

所以有

$$z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\frac{-\pi}{3}\mathrm{i}}$$

例 1-6 设 $z \neq 0$，则有 $|z-1| \leqslant ||z|-1| + |z||\arg z|$。

证 记 $\theta = \arg z$。由于 $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，注意到 $|\theta| \leqslant \pi$，有

$$
\begin{aligned}
|z-|z||&=|z||1-e^{i\theta}|=|z|\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\\
&=|z|\sqrt{2-2\cos\theta}=2|z|\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\leqslant|z||\theta|\\
&=|z||\arg z|,
\end{aligned}
$$

再由三角不等式,得到

$$
|z-1|\leqslant||z|-1|+|z-|z||\leqslant||z|-1|+|z||\arg z|
$$

结论得证。

3. 复数乘积的模和幅角

设有两个复数 z_1, z_2 表示成下列三角式:

$$
z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),
$$
$$
z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)
$$

下面是它们的积的三角表示式,如图 1-5 所示。

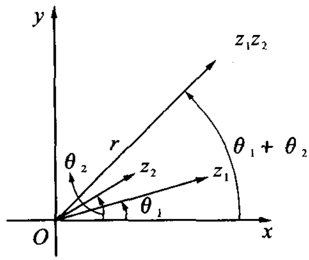

图 1-5

$$
\begin{aligned}
z_1z_2&=(r_1\cos\theta_1+\mathrm{i}r_1\sin\theta_1)(r_2\cos\theta_2+\mathrm{i}r_2\sin\theta_2)\\
&=r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2]+\mathrm{i}r_1r_2[\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2]\\
&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]=r_1r_2e^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}
\tag{1-10}
$$

所以

$$
|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2| \tag{1-11}
$$

$$
\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2=\arg z_1+\arg z_2+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \tag{1-12}
$$

例 1-7　试求 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 的模和主幅角。

解 记 $z=\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,有 $z(1-\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$, 所以, $|z||1-\mathrm{i}|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$, 但是, $|1-\mathrm{i}|=\sqrt{2}$,故有

$$|z|=\frac{|1+\mathrm{i}|}{|1-\mathrm{i}|}=1$$

因
$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}(1+\mathrm{i})&=\operatorname{Arg}[z(1-\mathrm{i})]\\&=\operatorname{Arg}z+\operatorname{Arg}(1-\mathrm{i})=\arg z-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\end{aligned}$$

又因
$$\operatorname{Arg}(1+\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}+2k\pi,$$

所以 $\arg z=\frac{\pi}{2}$, 即 $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$

从几何上看,将复数 w 与复数 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$ 相乘相当于把 w 所代表的向量伸(或缩)r 倍后再转 θ 度角。

例 1-8 i^2 相当于将向量$\{0, 1\}$逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$度角,从而得到向量$\{-1, 0\}$,而此向量对应复数 -1,这也可解释 i 为 $z^2+1=0$ 的根。

用数学归纳法可得,当 $n\geqslant 2$,

$$|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1||z_2|\cdots|z_n|, \tag{1-13}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2\cdots z_n)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2+\cdots+\operatorname{Arg}z_n \tag{1-14}$$

特别有

$$|z^n|=|z|^n \tag{1-15}$$

$$\operatorname{Arg}(z^n)=\underbrace{\operatorname{Arg}z+\operatorname{Arg}z+\cdots+\operatorname{Arg}z}_{n个}=n\arg z+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \tag{1-16}$$

作为特例，当 $z = re^{i\theta}$ 时，有

$$z^n = r^n e^{in\theta} \tag{1-17}$$

注意：

$$\operatorname{Arg}(z^n) \neq n\operatorname{Arg} z \tag{1-18}$$

例如，取 $z = -1$，$n = 2$，则 $z^2 = (-1)^2 = 1$。故有 $\operatorname{Arg}(-1)^2 = \operatorname{Arg} 1 = 2k\pi$，$k \in \mathbb{Z}$。但是，$\operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi$，$k \in \mathbb{Z}$。从而 $2\operatorname{Arg}(-1) = 2(2k+1)\pi$，$k \in \mathbb{Z}$。可见 $\operatorname{Arg}(-1)^2$ 取 π 的任意偶数倍，而 $2\operatorname{Arg}(-1)$ 只取 π 的部分偶数倍，所以

$$\operatorname{Arg}(-1)^2 \neq 2\operatorname{Arg}(-1)$$

4. 复数方根

给定非零复数 z，z 的 n 次方根为使得 $w^n = z$ 成立的复数 w。下面利用复数三角式求之。设 $z = re^{i\theta}$，待定 $w = \rho e^{i\varphi}$。由于 $w^n = z$，故有

$$\rho^n e^{in\varphi} = w^n = z = re^{i\theta}$$

所以

$$\rho = r^{\frac{1}{n}}, \quad \varphi = \frac{(\theta + 2k\pi)}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

即

$$w = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

例 1-9 求复数 $z = \dfrac{1+i}{-1+i\sqrt{3}}$ 的四次方根 w。

解 令 $w = \rho e^{i\varphi}$，有 $w^4 = \rho^4 e^{i4\varphi} = z = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$，所以

$$\rho = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{-1}{8}}$$

而由 $$4\varphi+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

得到 $\varphi=\dfrac{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)+2k\pi}{4}=\dfrac{-5\pi}{48}+\dfrac{k\pi}{2}$，$\quad k=0,1,2,3$

5. 单位圆内接正 $n(\geqslant 3)$ 边形的顶点的复数表示

设其中一个顶点为 $A_0=(1,0)$，其复数表示 $z_0=1$。若将其余 $n-1$ 个顶点按逆时针依次在单位圆周上标出，记为 A_1，A_2，$\cdots A_{n-1}$，并相应以 z_1，z_2，$\cdots z_{n-1}$ 表示对应的复数，则显然有

$$|z_k|=1,\qquad k=0,1,2,\cdots,n$$

而对每个 $k=0,1,2,\cdots,n$，从 A_0 沿单位圆周逆时针转移到 A_k，所转过的角度为 $k\dfrac{2\pi}{n}$。若 $k\dfrac{2\pi}{n}\leqslant\pi$，则 $z_k=e^{\frac{2k\pi}{n}i}$，若 $k\dfrac{2\pi}{n}>\pi$，则 $z_k=e^{-\left[\pi-\left(\frac{2k\pi}{n}-\pi\right)\right]i}=e^{\frac{2k\pi}{n}i}$。于是有统一表达式，对 $k=0,1,2,\cdots,n$，则为 $z_k=e^{\frac{2k\pi}{n}i}$，这正是 1 的 n 次方根的 n 个值。

三、平面点集的复数表示

1. 平面曲线和区域的常识

本课程仅涉及平面上按段光滑曲线，即由有限段光滑曲线首尾连接而成。而所谓光滑曲线，是指有连续切线的曲线，即该曲线的参数方程

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\qquad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

满足 $x'(t)$，$y'(t)$ 在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 连续，且 $(x'(t))^2+(y'(t))^2\neq 0$。若所论光滑曲线已定向，则 $(x(\alpha),y(\alpha))$ 总表示按此方向沿曲线经过的始端，而 $(x(\beta),y(\beta))$ 总表示按此方向沿曲线经过的终端。若存在