面向21世纪本科生教材

高等几何

钟 集 唐素兰 叶木秀 编著（第二版）

全国优秀出版社
武汉大学出版社

面向21世纪本科生教材

高等几何

钟　集　唐素兰　叶木秀　编著（第二版）

全国优秀出版社
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等几何/钟集,唐素兰,叶木秀编著.—2 版.—武汉:武汉大学出版社,2005.2

面向 21 世纪本科生教材

ISBN 7-307-04428-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①钟… ②唐… ③叶… Ⅲ.高等几何 Ⅳ.O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 008421 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:刘　欣　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:湖北省黄冈日报社印刷厂

开本:850×1168　1/32　印张:10.375　字数:267 千字

版次:1992 年 7 月第 1 版　　2005 年 2 月第 2 版
2005 年 2 月第 2 版第 1 次印刷

ISBN 7-307-04428-5/O·316　　定价:16.00 元

序　言

本书可用做高等院校本科数学专业的高等几何课程的教材。本书的宗旨是简要地介绍射影几何的基本知识、基本理论和方法，希望帮助读者发展几何空间概念，了解克莱因（Klein）的变换群观点，明确射影几何与仿射几何、欧氏几何的内在联系和根本差别，提高解决几何问题的能力，为进一步学习现代数学打好基础。此外，本书还简要地介绍了 n 维射影空间以及不同基域（如实数域、复数域和有限域）上的射影空间的初步知识，使读者进一步了解抽象空间的概念，并作为桥梁以便于读者接触现代数学知识。

本书以克莱因的变换群观点贯穿始终，内容着重论述各种变换，包括 1 维射影变换，透视变换和对合，直射变换，对射变换，配极变换等，并且分别建立了射影变换群、仿射变换群、相似变换群和正交变换群。每种群对应于一种几何，并通过变换群的关系揭示出所对应的几何的关系。在论述变换的过程中，结合介绍一些在射影几何中居重要位置的内容。

坐标法是本书使用的主要方法。本书中依次建立了 1 维射影坐标系、2 维射影坐标系、3 维射影坐标系和坐标变换，主要使用齐次坐标。对于仿射几何和欧氏几何，则改用非齐次坐标。

本书不采用公理法基础，开头介绍几条公理，目的在于揭示射影平面的基本特征，同时也为证明一些定理作根据。除了开头引入无穷远元素以及射影坐标系以外，全书的论述在逻辑上是严格的。

交比是基本的射影不变量，在射影几何中有重要地位，因而本书作了较详细的介绍。

2阶曲线可以有不同的定义。本书用配极变换作出定义，主要是突出配极变换的作用。对于2阶曲线的各种特性，本书所选择的内容不多，较重要的列为定理，一般的作为例题和习题。

本书所使用的方法以代数法为主，因此，各种向量运算的应用，各种变换的关系式都是基本的知识，必须加以掌握。在这个基础上，也就比较容易解题、证题。因为综合法有其方便、巧妙的特点，所以有些定理的证明，两法兼用，供读者参考。实际解题时，只用一种方法就够了。

读者学习高等几何，在按章节理解各项内容以外，还要注意整体理论，每部分理论包括主要概念、主要定理、主要方法、系统结构等。这样才能够对高等几何有较深入的理解，而且有利于掌握和记忆。

本书的例题都是为帮助读者理解、掌握理论和方法而选用的，其中有些题目较为复杂。不过，有了详细的解法介绍，读者不难看懂。至于习题，避免选用难题。习题附有解答或提示，便于读者参考。

本书经过刘增贤教授、程其坚教授和门树慧副教授审阅，特此表示感谢。

编　者

目　　录

第1章 射影平面

本章内容主要是建立射影平面、平面射影坐标系和两种基本图形的基本性质. 首先，通过在欧氏平面上添加无穷远元素，引进射影平面，并且根据欧氏平面和对无穷远元素所规定的事实，归结成公理，以反映射影平面的基本特征，作为下文推导的理论根据. 其次，通过数轴和欧氏平面直角坐标系引进1维和2维射影坐标系，建立点和直线的坐标和方程，并通过对3维向量的运算作出几何解释，得出有关点和直线的接合性的计算方法；另外，又论述了坐标变换的基本理论. 射影平面上的三点形和四点形都是基本图形. 对于前者，笛沙格(Desargues)定理是最重要的定理；而对于后者，则以调和点组和调和线组为主要内容. 最后，通过点和直线的关系的比较，得出平面对偶原则.

1.1 无穷远元素

1.1.1 平行射影和中心射影

我们把通常在初等几何和解析几何中所研究的平面叫做**欧氏平面**. 设欧氏平面上已给出相异两直线 l, l' 和与 l, l' 都相交的直线 m，如图1-1. 又设 P 为 l 上任意点，过 P 作直线 $p /\!/ m$，则 p 必与 l' 相交，令此交点为 P'. 若 P 跑遍 l 上的所有点，则 P' 亦跑遍 l' 上的所有点. 由 P 得出 P' 的过程叫做关于 m，直线 l 到 l' 的

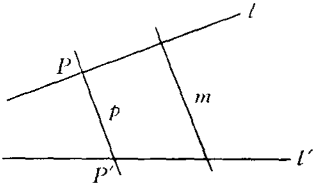

图 1-1

平行射影，m 指出射影方向，P' 是P 的像点，P 是 P' 的原像点. 平行射影被两直线 l,l' 和指示方向的直线 m 所唯一确定. P 在 l' 上有唯一的像点；反之，P'在 l 上有唯一的原像点. 因此，平行射影使 l 与 l' 上的所有点之间构成一一对应关系，P 和 P' 是一对对应点.

平行射影的作用将在第 4 章介绍.

推广平行射影概念，可得出下面的中心射影概念.

设已给出欧氏平面上两相交直线 l,l' 和不在此两直线上的一点 O，如图 1-2. 又设 P 为 l 上的任意点，直线 OP 交 l' 于 P'. 当 P 在 l 上流动时，P' 亦在 l' 上流动. 由 P 得出 P' 的过程叫做以点 O 为射影中心的**中心射影**，P' 是 P 的像点，P 是 P' 的原像点. 中心射影被两直线 l,l' 和射影中心 O 所唯一确定. P 在 l' 上只能有一像点 P'，反之，P' 在 l 上只能有一原像点 P，两点 P,P' 关于此中心射影构成对应. 若 l,l' 交于点 A，则 A 的像点为 A，而 A 的原像点亦为 A，换句话说，A 与自己成对应，叫**固定点**. 但中心射影不能使欧氏平面上两直线之所有点间构成一一对应关系. 因为，过 O 有唯一直线 $b \parallel l$，b 必与 l' 相交于一点 B'，则关于 O 为射影中心的中心射影，B' 没有原像点；类似地，过 O 有唯一直线 $c \parallel l'$，c 必与 l 交于一点 C，则 C 没有像点. 除此之外，l 上任一点在 l' 上必有唯一像点，l' 上任一点在 l 上必有唯一原像点.

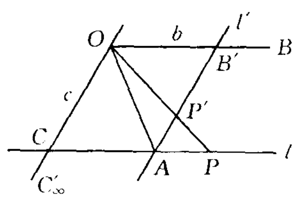

图 1-2

为使两直线的点关于中心射影有一一对应关系，必须对欧氏平面引进无穷远点和无穷远直线. 不过，引进了无穷远点和无穷

远直线之后，平面不再是欧氏平面，而是射影平面.

1.1.2 无穷远元素的引进

由图 1-2 显见，如果约定两平行线 b, l 有一交点 B_∞，则 B_∞ 就是 B' 的唯一原像点. 这个点 B_∞ 不能是原来欧氏平面上的点；而且，设想直线 OP 逐渐绕 O 依反时针方向转动，则 OP 与 l 的交点 P 将逐渐沿 l 向右移动，因而，所引入的点 B_∞ 只能远至无穷，所以叫**无穷远点**，并以下标 ∞ 表示. B_∞ 是 b, l 的共同的无穷远点，也即 b 和 l 的交点. 同理，给两平行线 c, l' 引进了无穷远点 C'_∞ 之后，C'_∞ 就是点 C 的唯一像点. C'_∞ 是 c 和 l' 的共同的无穷远点，也是 c 和 l' 的交点. 这样就使得 l, l' 的点关于中心射影构成一一对应关系.

为了与无穷远点相区别，我们把原来欧氏平面的点叫**平常点**.

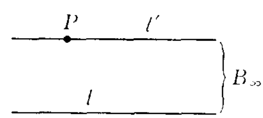

图 1-3

我们已经约定两平行直线交于一无穷远点，如图 1-3. 给出直线 l 及线外一平常点 P，过 P 平行于 l 的直线 l' 交 l 于无穷远点 B_∞. 因为过 P 只能有唯一直线平行于 l，故 l 上仅能有唯一的无穷远点. 否则，若 l 上有两个无穷远点，则 l 与 l' 将有两相异交点，也即过此两无穷远点有两相异直线 l, l'，与直线的基本性质矛盾. 由此可知，平面上一组平行直线应该交于一无穷远点.

设两直线 l_1, l_2 交于平常点 P，则 l_1, l_2 的无穷远点相异. 否则，若 l_1, l_2 的无穷远点都是 B_∞，则过 P 和 B_∞ 有 l_1, l_2 两相异直线，与直线的基本性质矛盾. 因为过一平常点有无穷多条直线，这些直线的无穷远点都相异，所以，平面上应该有无穷多个无穷远点.

考虑平面上所有无穷远点所构成的集 w_∞. 集 w_∞ 与平面上每条直线都有一交点，因此，我们可以约定 w_∞ 是一直线，叫做

无穷远直线. 无穷远点和无穷远直线都是**无穷远元素**.

对于平面上的所有无穷远点构成一无穷远直线，我们还可以用另一种方式来考虑. 设有相交两平面 α,α' 以及不在两平面上的点 O，P 为 α 上一点，直线 OP 交 α' 于 P'，如图 1-4. 由 P 得出 P' 的过程为关于射影中心 O 的由平面 α 到平面 α' 的中心射影，P' 是 P 的像点，P 是 P' 的**原像点**. 设 α 上另一点 Q 的像点是 Q'，则直线 PQ 上的点的像点都在直线 $P'Q'$ 上. 因为直线 PQ 和不在此直线上的一点 O 决定一平面 γ，γ 与 α,α' 分别交于直线 $PQ,P'Q'$. 以 O 为射影中心，由 α 到 α' 的中心射影，导出了由 PQ 到 $P'Q'$ 的中心射影. 由此，我们把 $P'Q'$ 叫做 PQ 的**像直线**，而把 PQ 叫做 $P'Q'$ 的**原像直线**. 于是以 O 为射影中心的由 α 到 α' 的中心射影既把点射影为点，亦把直线射影为直线. 但 α 与 α' 的所有直线之间并不构成一一对应关系. 因为，过 O 作一平面 $\beta /\!/ \alpha'$，则 β 必交 α 于一直线 l，而 l 在 α' 上没有像直线. 又过 O 作平面 $\beta' /\!/ \alpha$，β' 交 α' 于直线 m'，则 m' 没有原像直线. 为使 α 与 α' 之所有直线在此中心射影下保持一一对应关系，我们约定平面 α' 上有一无穷远直线 w'_∞，它由该平面上的所有无穷远点构成，而且是平行平面 α' 和 β 的公共直线，那么，w'_∞ 就是 l 的像直线. 同理，α 上有一无穷远直线 w_∞，它由该平面上的所有无穷远点构成，而且是平行平面 α,β' 的公共直线，w_∞ 就是 m' 的原像直线. 这就说明了为使中心射影下，一平面到另一平面的所有点和所有直线之间构成一一对应关系，有必要给每一直线添加一无穷远点，而且平面的所有无穷远点构成一无穷远直线.

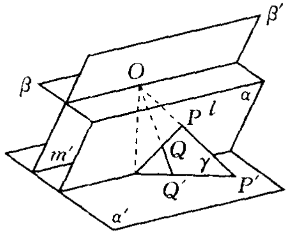

图 1-4

欧氏平面添加无穷远元素之后就成为**射影平面**. 射影平面上只有一条无穷远直线，其余的直线都是原来欧氏平面上的直线添

加一个无穷远点而成的. 这样的直线就叫做**平常直线**，以与无穷远直线相区别. 无穷远直线和平常直线都是**射影直线**. 平常点和无穷远点都是**射影点**. 射影点、射影直线和射影平面都是射影几何的基本元素. 下文为了方便并在不致发生混淆的条件下，把射影点、射影直线和射影平面分别简称为点、直线和平面.

平面射影几何研究的是在一个射影平面上的点和直线的关系.

1.1.3 射影点和射影直线的基本特征

根据平常点、平常直线和关于无穷远元素的约定，我们得出射影点和射影直线的基本特征如下：

(1) 对于任意给定的两相异射影点 A 和 B，必有而且只有唯一射影直线同时通过 A 和 B.

因为，如果 A,B 都是平常点，则连接 AB 得出通过 A,B 的唯一射影直线；如果 A,B 都是无穷远点，则射影平面上的唯一无穷远直线为通过 A,B 的唯一射影直线；如果 A 为平常点，B_∞为无穷远点，如图 1-5，B_∞在直线 l_0 上，则过 A 有唯一平常直线$l /\!/ l_0$，l 为过A,B_∞的唯一射影直线.

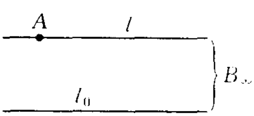

图 1-5

(2) 对于射影平面上的任意两相异直线，必有而且只有唯一射影点是两射影直线的交点.

因为，如果两直线都是平常直线，它们相交于一点，或互相平行，而后者交于唯一无穷远点；如果两直线之一为平常直线，另一为无穷远直线，则它们交于此平常直线上的无穷远点.

1.1.4 无穷远元素的物理背景

在欧氏平面上引进无穷远元素，绝不是一种没有实际意义的虚想，而是有深刻的物理背景的.

在物理学中，研究光的成像的理论是几何光学. 几何光学的一个基本观点就是光是沿直线进行的，叫做光线. 太阳光射到地球上的物体，在地面上得到物体的影. 因为太阳离地球很远，平均约 149 600 000 千米. 太阳直径约 1 392 000 千米. 比起地面上物体的大小要大得多，所以可以把太阳的位置看做在无穷远处，它照射到物体的光线是平行的. 如图 1-6，以 l_0 表示地平面，AB 表示物体，照射到点 A 的太阳光线是 l，它代表太阳光的方向. l 交 l_0 于点 C，则 CB 为 AB 在地平面上的影. 这就是平行射影的物理背景. 这个事实也说明了它的命名来源.

小电灯泡发光，可以看做是由一点光源发出光线. 如图 1-7，点光源 O 发出的光线照射到物体 AB 上，它在屏幕 l 上现出了 AB 的影 $A'B'$. 这就是中心射影的物理背景，也是它命名的来源.

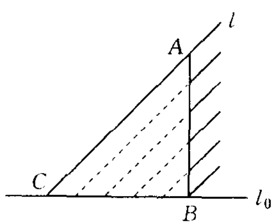

图 1-6

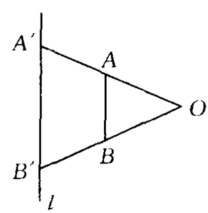

图 1-7

星体到地球的距离，比起太阳来说远得多. 例如天狼星，距离地球 8.7 光年. 所谓 1 光年，是指光线在 1 年时间内所经过的距离，相当于地球到太阳的平均距离的 63 240 倍，也即是 9.46×10^{12}千米. 由此计算得天狼星到地球的距离达到 8.23×10^{13}千米. 天狼星还是与地球距离较近的恒星之一，许多恒星与地球的距离达到几百光年. 至于星云、星团的距离就更加遥远了. 一般说来，星体距离地球这么远，看起来只是一个光点，即使在大望远镜中看起来也是一样. 因此，我们把恒星看做是在无穷远点的光源. 显然可见，中心射影在中心是无穷远点的情形下成为平行射影.

用玻璃制成薄透镜，其两面都是球面，两球心的连接线就是透镜的光轴. 图 1-8 表示一个凸透镜，AB 是它的光轴，平行于光轴的光线 CD, EE' 等，经过透镜的折射，会聚于光轴上一点 F，F 叫做透镜的焦点，换句话说，光轴上的无穷远点通过透镜成像于焦点上. 反之，焦点 F' 处的点光源发出的光线，经过透镜的折射成为平行于光轴的线束 DG, $E'H$，这平行光束可以看做会聚于光轴 AB 上的无穷远点，换句话说，焦点 F' 的点光源成像于光轴上的无穷远点处.

对于球面镜的反射，也有类似的情形. 如图 1-9，球面镜以弧 GD 代表，光轴为过球面中心的直线 AB，平行于光轴的一光束 CD, EG 入射于镜面上，反射后会聚于 AB 上的焦点 F. 我们说光轴上无穷远点上的光源成像于焦点 F 上. 反之，焦点 F 上的点光源所发出的光线通过球面镜的反射之后成为平行于光轴的光束. 这一平行光束会聚于光轴上的无穷远点处，也就是说，焦点 F 上的点光源成像于光轴上的无穷远点处. 这些事实都说明了无穷远点的物理背景.

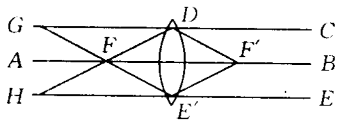

图 1-8

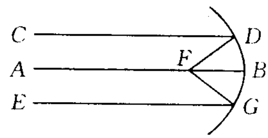

图 1-9

习　题　1.1

1. 射影平面上射影直线上的无穷远点在平行射影下的像点应在何处?

2. 设欧氏平面上，共线 3 点 A, B, C 在某一平行射影下的像点分别是 3 共线点 A', B', C'，求证：$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$.

3. 设欧氏平面上，共线 4 点 A, B, C, D 在某一中心射影下的像点分别