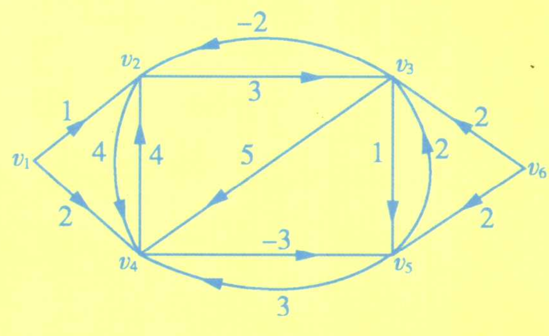
大学数学学习指导丛书

运筹学

习题选解与题型归纳

主　编 詹明清
副主编 韩晓民 朱 俊



Yunchouxue xitixuanjie yu tixingguina

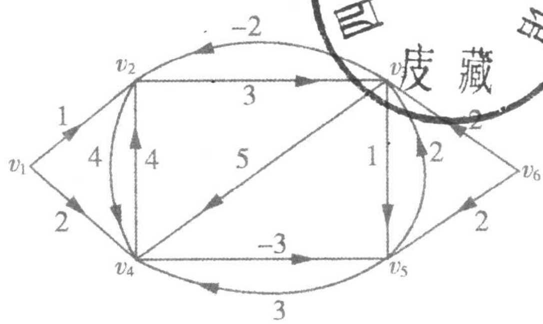
中山大学出版社

大学数学学习指导丛书

运筹学

习题选解与题型归纳

主　编　詹明清
副主编　韩晓民　朱　俊



Yunchouxue xitixuanjie yu tixingguina

中山大学出版社
·广　州·

图书在版编目(CIP)数据

运筹学习题选解与题型归纳/詹明清主编;韩晓民,朱俊副主编. —广州:中山大学出版社,2004.8
(大学数学学习指导丛书)
ISBN 7－306－02307－1
Ⅰ.运… Ⅱ.①詹…　②韩…　③朱…　Ⅲ.运筹学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 046628 号

选题策划:曾纪川
责任编辑:李　文　韩晓军
封面设计:朱露华
责任校对:李春梅
责任技编:黄少伟
出版发行:中山大学出版社
　　　　编辑部电话(020)84111996,84113349
　　　　发行部电话(020)84111998,84111160
地　　址:广州市新港西路 135 号
邮　　编:510275　　传真:(020)84036565
印 刷 者:江门市新教彩印有限公司
经 销 者:广东新华发行集团
规　　格:787mm×1092mm　1/16　15.25 印张　384 千字
版次印次:2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷
定　　价:26.00 元

内 容 提 要

本书是经济管理类各专业适用的运筹学辅导教材. 本书包括两个部分：第一部分是运筹学各章节习题类型归纳与解析；第二部分是运筹学习题库，这部分的题全部都给出了正确的答案，有的还给出了解题的全过程，为学习运筹学的同学们提供了极大的选择空间. 本书题材和习题取自全国高校广泛使用的清华大学出版社出版的《运筹学》和人民大学出版社出版的《运筹学通论》.

本书两个部分内容安排合理，便于学习运筹学的各个层次的同学们自学，亦可作为运筹学教学参考书.

前　　言

善于进行数据整理与分析，善于进行定量计算与定量分析是科学工作者的一项基本功.

运筹学是将经济管理中的问题进行数据整理进而建立数学模型，并在此基础上进行定量计算与定量分析的一门学科，是经济管理各专业必修的专业基础课. 但不少同学对它望而生畏，包括硕士生也尽可能避而远之，甚至有的院校管理专业学生能够不选就不选、能够不学就不学. 其实，只要善于入门，学好它也不难，重要的是除选好一本教材以外，还要选择好适合于自己的参考书.

本书是一本运筹学的参考书，分为两个部分：①运筹学题型归纳与解析；②运筹学习题库. 本书的题材取自于全国高校广泛使用的清华大学出版社出版的《运筹学》和中国人民大学出版社出版的《运筹学通论》. 本书适用于本、专科经济管理各专业学生使用，亦可作为教师参考书.

我们不是简单地罗列运筹学一些基本概念和内容，而是将运筹学的主要内容以题型归类方式呈现在读者面前，并对这些题型中精选出的例子作了详尽的解析，然后再将该题型的解题要领作出了简明扼要的归纳.

本书为读者提供了各类型的题库，几乎囊括了运筹学各部分内容，不仅题量大，并且全部都给出了答案，或详细的解答过程. 题库的这些选题与解答基本上是由计算机软件生成，这对于学生学习与教师教学提供了很大的选择空间.

本书由詹明清、韩晓民、朱俊、陈婕等老师参与编写.

书中疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正.

目　录

第一部分　运筹学题型归纳与解析

第二部分　运筹学习题库

第一部分　运筹学题型归纳与解析

一、线性规划题型归纳与解析

题型1　图解法

题型分析　图解法求解线性规划问题，一般来说可以分为四步：第一步，根据线性规划的决策变量建立直角平面坐标系；第二步，由约束条件确定决策变量的可行域；第三步，画出目标函数等值线及以目标函数值为参数的平行线族，从而判断目标函数的优化方向；第四步，在可行域内确定线性规划问题是否存在最优解，如存在最优解则确定最优解的值. 因为平面坐标系是二维的，因此图解法只能解决包含两个决策变量的线性规划问题.

例1　$\max z = x_1 + 3x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}5x_1 + 10x_2 \leqslant 50\\ x_1 + x_2 \geqslant 1\\ x_2 \leqslant 4\\ x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

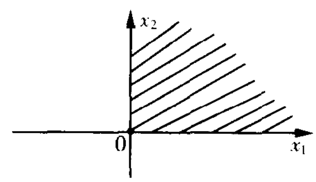


图 1-1

解　① 以 x_1 和 x_2 为坐标轴建立平面直角坐标系. 一般以 x_1 为横坐标，x_2 为纵坐标.

② 确定决策变量的可行域.

约束条件中的 $x_1, x_2 \geqslant 0$ 表明所求的可行解都在第 I 象限内或坐标轴的正方向部分（包括原点）. 如图 1-1 所示.

确定约束 $5x_1 + 10x_2 \leqslant 50$ 所限定的范围. 先画出直线 $5x_1 + 10x_2 = 50$，容易判断，其左下方的点满足约束 $5x_1 + 10x_2 \leqslant 50$（比如，取原点 $(0,0)$ 代入 $5x_1 + 10x_2 \leqslant 50$，显然不等式成立）. 考虑到 $x_1, x_2 \geqslant 0$，则区域 OAB 为所限定范围. 如图 1-2 所示.

确定约束 $x_1 + x_2 \geqslant 1$ 所限定的范围. 先画出直线 $x_1 + x_2 = 1$，容易判断，其右上方的点满足约束 $x_1 + x_2 \geqslant 1$. 考虑到 $x_1, x_2 \geqslant 0$ 及 $5x_1 + 10x_2 \leqslant 50$，则区域 $ACDB$ 为所限定范围. 如图 1-3 所示.

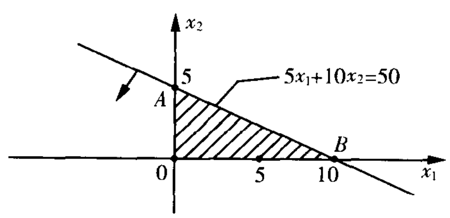


图 1-2

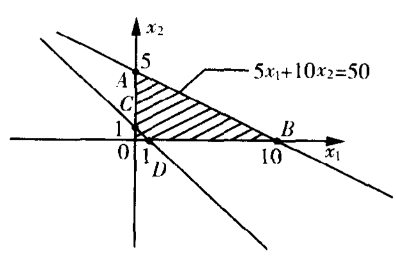


图 1-3

确定约束 $x_1 \leqslant 4$ 限定的范围. 先画出直线 $x_2 = 4$，容易判断，其下方的点满足约束 $x_2 \leqslant 4$. 考虑到 $x_1, x_2 \geqslant 0, 5x_1 + 10x_1 \leqslant 50$ 及 $x_1 + x_2 \geqslant 1$. 则区域 $FCDBE$ 为所限定范围. 如图 1-4 所示.

因为区域 $FCDBE$ 所包含的点满足所有的约束条件，所以它就是决策变量的可行域.

③ 画出目标函数等值线，确定优化方向.

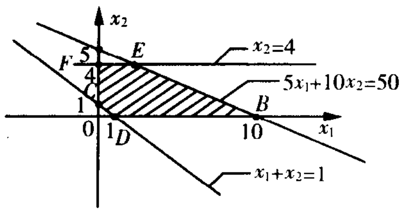


图 1-4

目标函数为 $z = x_1 + 3x_2$，可改写为 $x_2 = -x_1/3 + z/3$. 其中 z 是待定的值，如果把它看作是参数，则目标函数是斜率为 $-1/3$，在纵轴上的截距为 $z/3$ 的平行直线族.

若取 z 为一确定的值，如令 $z = 6$，则 $6 = x_1 + 3x_2$，即 $x_2 = -x_1/3 + 2$ 就是上述平地直线族中的一条确定的直线，如图 1-5 所示. 显然直线上所有的点都使目标函数 $x_1 + 3x_2$ 的值等于 6，因此称 $x_1 + 3x_2 = 6$ 是 $z = 6$ 时目标函数的等值线.

同样可画出目标函数的另一条等值线，如令 $z = 12$，则 $12 = x_1 + 3x_2$，即 $x_2 = -x_1/3 + 4$ 就是上述平行直线族中的另一条等值线，如图 1-5 所示.

由图 1-5 容易看出，z 值取得越大，目标函数等值线 $z = x_1 + 3x_2$ 的位置越是沿着其法线方向向右上方平行移动，这就是目标函数等值线的优化方向.

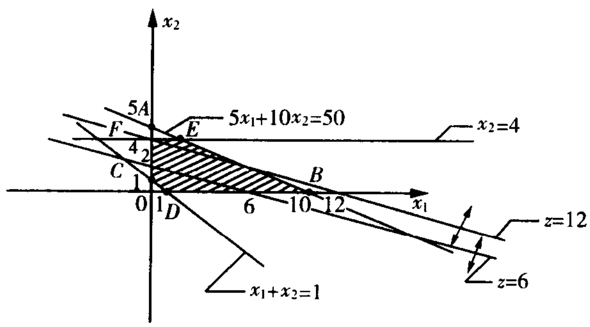


图 1-5

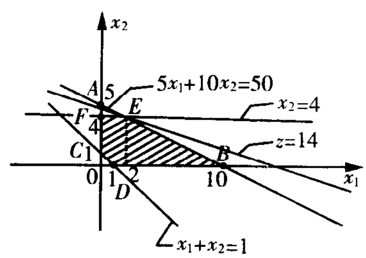


图 1-6

④ 确定最优解.

最优解首先必须是可行解，因此只能在可行域中去找；其次还要使目标函数值达到最优. 因此在可行域 $FCDBE$ 中寻找这样的点，使 z 值达到最大. 沿着目标函数等值线的优化方向尽量平移等值线，直到它与可行域还有最后的公共部分(一点或一条线段）为止，这个公共部分就是等值线的最佳位置，最佳位置上的点就是要求的最优解. 如图 1-6 所示，当等值线平移到 E 点时，如果继续向上移，就离开了可行域. 因此 E 点就是使目标函数值达到最大值的点.

E 点是直线 $5x_1 + 10x_2 = 50$ 和 $x_2 = 4$ 的交点，联立这两个方程求解 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} = (2, 4)^{\mathrm{T}}$，相应求得 $\max z = 14$.

要点　这是一个有惟一最优解的线性规划问题，解此类问题的关键有三个：第一是正确地确定决策变量的可行域，第二是确定目标函数的等值线及其优化方向，第三是在可行域范围内确定最优解的值.

例 2　$\max z = 2x_1 + 4x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 ① 建立平面直角坐标系，确定决策变量的可行域. 如图 1-7 所示，区域 $OABCD$ 为可行域.

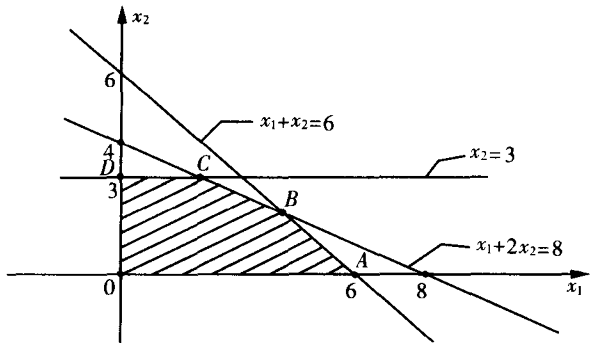


图 1-7

② 画出目标函数等值线，确定优化方向.

目标函数为 $z=2x_1+4x_2$ 是斜率为 $-1/2$，在纵轴上的截距为 $z/4$ 的平行直线族. 若取 z 为一确定的值，如令 $z=0$，则得一条等值线 $0=2x_1+4x_2$，即 $x_2=-x_1/2$；如令 $z=12$，则得另一条等值线 $12=2x_1+4x_2$，即 $x_2=-x_1/2+3$，如图 1-8 所示. 容易看出，沿着目标函数的法线方向向右上方平行移动，是它等值线的优化方向.

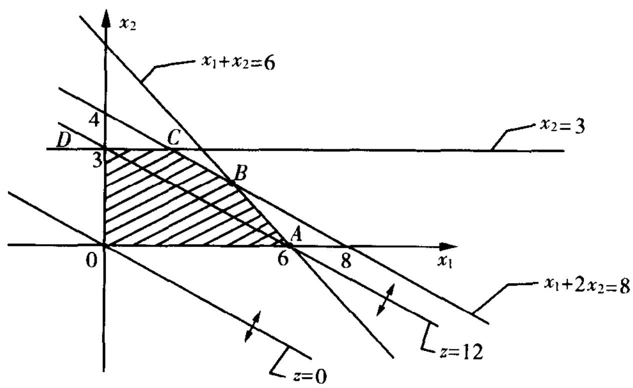


图 1-8

③ 确定最优解.

在可行域 $0ABCD$ 中寻找令 z 值达到最大的点. 由图 1-8 容易看出，当等值线平移到 C 点时，如果继续向上移，就离开了可行域，而且此时等值线的最佳位置与可行域边界 CB 重合. 因此 C 点、B 点以及线段 CB 上所有的点，都是使目标函数值达到最大值的点，是最优解.

求得 C 点 $\boldsymbol{X}_C=(2,3)^{\mathrm{T}}$ 与 B 点 $\boldsymbol{X}_B=(4,2)^{\mathrm{T}}$，此时求得 $\max z=16$. 目标函数 $z=2x_1+4x_2$ 的通解可表示为 $\boldsymbol{X}=a\boldsymbol{X}_C+(1-a)\boldsymbol{X}_B, 0\leqslant a\leqslant 1$.

要点 这是一个有无穷多最优解(多重解)的线性规划问题，它的一个显著特征就是目标函数的斜率至少与某一个起作用的约束条件的斜率相同. 另外，如果两个端点都是问题的最优解，那么这两点连线上的任一点也是该问题的最优解.

例 3 $\max z=2x_1+2x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1-x_2\geqslant -1 \\ -0.5x_1+x_2\leqslant 2 \\ x_1,\quad x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解 确定决策变量的可行域. 如图 1-9 所示的 $CBAOx_1$ 无界区域.

目标函数 $z=2x_1+2x_2$ 沿着等值线优化方向向右上方无论平移到何处，也不会有对应最

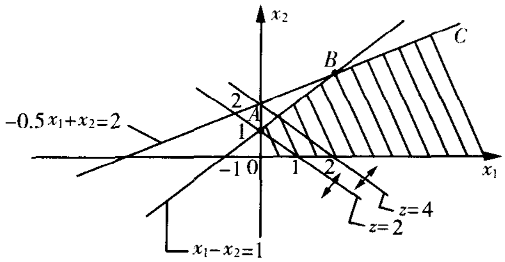


图 1-9

优解的最佳位置，即在可行域内，使目标函数值达到多大的点都可以找到. 原问题有可行解，但目标函数值无界（本题是求最大值而无上界，还有些题型是求最小值而无下界的情况），故无最优解.

要点　这是一个无最优解（无界解）的线性规划问题，需要注意的是，此问题有可行解，只是可行域无界且目标值亦无界而没有最优解.

例 4　$\max z = x_1 + x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 0 \\ 3x_1 - x_2 \leqslant -3 \\ x_1,\quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解　如图 1-10 所示，当 $x_1, x_2 \geqslant 0$ 时，由约束条件 $x_1 - x_2 \geqslant 0$ 确定的范围为 COx_1，而由约束条件 $3x_1 - x_2 \leqslant -3$ 确定的范围为 BAx_2，它们的交集为空集，即决策变量的可行域为空集. 表明此问题无可行解.

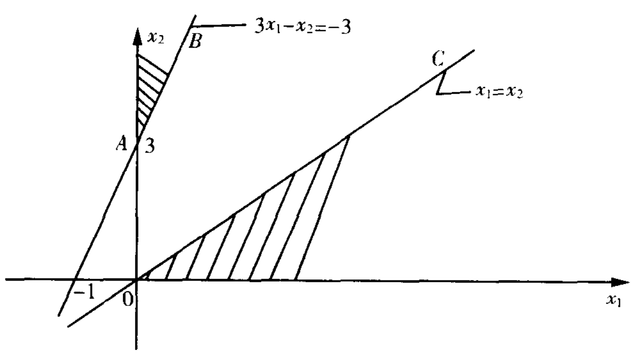


图 1-10

要点　这是一个无可行解的线性规划问题，导致无可行解的原因就是问题的约束条件互相矛盾，使约束条件所确定的范围的交集为空集.

题型 2　单纯形法 1：无人工变量

题型分析　单纯形法就是利用单纯形表进行计算线性规划问题的方法，对极大化问题，其计算步骤为：

第一步，找出初始可行基，确定初始基可行解，建立初始单纯形表；

第二步，计算检验数，检验各非基变量 x_j 的检验数 $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} = c_j - z_j$ 是否为非正，

若 $\sigma_j \leqslant 0, j = m+1, \cdots, n$，则已得到最优解，可停止计算；否则转入第三步；

第三步，在 $\sigma_j > 0, j = m+1, \cdots, n$ 中，若有某个 σ_k 对应 x_k 的系数列向量 $P_k \leqslant 0$，则此问题无界，停止计算；否则转入第四步；

第四步，根据 $\max(\sigma_j > 0) = \sigma_k$，确定为 x_k 进基变量，按最小比值法则计算

$$\theta = \min\left(\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right) = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

可确定 x_l 为出基变量；转入第五步；

第五步，以 a_{lk} 为主元素进行迭代(用高斯消去法)，把 x_k 所对应的列向量

$$\boldsymbol{P}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{变换为}} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } l \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

将 $\boldsymbol{X}_B$ 列中的 x_l 换为 x_k，得到新的单纯形表. 重复第二至第五步.

而对极小化问题，既可以将其先化为极大化问题，然后再计算；也可以直接计算，其直接计算步骤与极大化问题相差无几，只是在最优解的判定以及进基变量的确定上，与极大化问题恰好相反.

例 1 $\max z = 2x_1 + x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \\ x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 ① 添加松弛变量，化成标准型.

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

② 建立初始单纯形表.

如表 1-1 所示，其中 c_j 为目标函数中决策变量 x_j 的系数($j = 1, \cdots, 4$)，由系数矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 选择单位矩阵 $\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 作为初始可行基，则对应的基变量为 $\boldsymbol{X}_B = (x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$，基变量的系数 $\boldsymbol{C}_B = (0, 0)$，常数向量(资源向量) $\boldsymbol{b} = (15, 24)^{\mathrm{T}}$，列出约束方程组的增广矩阵 $\boldsymbol{bA}$.

表 1-1

c_j			2	1	0	0	$b_i/a_{ik} = \theta_i$
C_B	X_B	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	15	3	5	1	0	
0	x_4	24	6	2	0	1	
$c_j - z_j$							

③ 计算初始单纯形表中的检验数.

$c_j - z_j = c_j - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}P_j = c_j - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{P}_j^{(1)}$，如非基变量 x_1, x_2 的检验数：

$$c_1 - z_1 = c_1 - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{P}_1^{(1)} = 2 - (0 \quad 0)\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} = 2$$

$$c_2 - z_2 = c_2 - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{P}_2^{(1)} = 1 - (0 \quad 0)\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} = 1$$

当然，基变量 x_3、x_4 的检验数为 0，如表 1-2 所示. 因为本题是求最大化，且非基变量的检验数 2 和 1 都大于零，所以此时的基本可行解 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = (0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 不是最优解，需进行线性行变换.

④ 确定进基变量和出基变量以及主元素.

检 验数中最大的为 2，其对应的变量 x_1 为进基变量；运用最小比值法则确定出基变量，此时 $i = 1,2, k = 1$. 因为 x_1 对应增广矩阵中的向量 $\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$ 的元素都大于零，所以求得 $\theta_1 = b_1/a_{11} = 15/3 = 5, \theta_2 = b_2/a_{21} = 24/6 = 4$，4 最小，其对应的变量 x_4 为出基变量，增广矩阵中出基变量所对应的行与进基变量所对应的列的元素 $a_{21} = 6$ 为主元素. 如表 1-2 所示：

表 1-2

c_j			2	1	0	0	$b_i/a_{ik} = \theta_i$
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	15	3	5	1	0	15/3
0	x_4	24	[6]	2	0	1	24/6 →
$c_j - z_j$			2 ↑	1	0	0	

⑤ 进行迭代运算，得出下一个单纯形表. 对增广矩阵进行线性行变换，将主元素变为 1，将主元素所在列的其他元素变为零. 如将主元素所在的行都除以 6，则可将主元素变 1，即(24,6,2,0,1) ÷ 6 = (4,1,1/3,0,1/6)；再将主元素所在列的元素 3 变为 0，即(15,3,5,1,0) − 3 × (4,1,1/3,0,1/6) = (3,0,4,1, − 1/2). 从而得到新的单纯形表，如表 1-3 所示.

表 1-3

c_j			2	1	0	0	$b_i/a_{ik} = \theta_i$
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	3	0	[4]	1	− 1/2	3/4 →
2	x_1	4	1	1/3	0	1/6	$4\Big/\frac{1}{3}$
$c_j - z_j$			0	1/3 ↑	0	− 1/3	

此时的基本可行解为 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = (4,0,3,0)^{\mathrm{T}}$.

⑥ 计算新的单纯形表中非基变量的检验数，如表 1-3；根据检验数是否全小于等于零，判断此时的基本可行解是否达到最优，如果没有则重新确定进基变量和出基变量和主元素，如表 1-3；继续进行迭代运算，直到求得最优解. 如表 1-4 所示.

表 1-4

c_j			2	1	0	0	$b_i/a_{ik}=\theta_i$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	x_2	3/4	0	1	1/4	$-1/8$	
2	x_1	15/4	1	0	$-1/12$	$\frac{5}{24}$	
c_j-z_j			0	0	$-1/12$	$-7/24$	

此时非基变量的检验数都小于零，所以此时的解 $X=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(15/4,3/4)^{\mathrm{T}}$ 为最优解，$\max z=2x_1+x_2=33/4$.

要点　单纯形法是求解线性规划的一种极为有效和方便的方法，用单纯形法时一定要注意以下几个问题：第一，要将问题化为标准型；第二，迭代过程进行的应是线性变换；第三，判断是否为最优解的标准，即对极大化问题，检验数应为非正；对极小化问题，检验数应为非负. 此题是有惟一最优解的极大化线性规划问题，所以在最优表中，除了基变量的检验数为 0 外，其他变量的检验数都小于 0.

例 2　$\min z=2x_1-2x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 5 \\ -x_1+x_2\leqslant 6 \\ 6x_1+2x_2\leqslant 21 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解　化标准型：

$$\min z=2x_1-2x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5 \\ -x_1+x_2+x_4=6 \\ 6x_1+2x_2+x_5=21 \\ x_j\geqslant 0, j=1,\cdots,5 \end{cases}$$

先建立初始单纯形表，如表 1-5 所示.

表 1-5

c_j			2	-2	0	0	0	$b_i/a_{ik}=\theta_i$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	5	1	1	1	0	0	
0	x_4	6	-1	1	0	1	0	
0	x_5	21	6	2	0	0	1	
c_j-z_j			2	-2	0	0	0	

因为原问题是求最小化问题，所以判断最优解的条件变为“所有的检验数为非负数”，即要求全部检验数都大于等于零时，求得的基本可行解才是最优解. 确定进基变量的原则变为，在所有的负检验数中选择最小的检验数对应的变量为进基变量；最小比值法则不变. 用单纯形法计算，如表 1-6 所示.

表 1-6

c_j			2	-2	0	0	0	$b_i/a_{ik}=\theta_i$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	5	1	[1]	1	0	0	5/1 →
0	x_4	6	-1	1	0	1	0	6/1
0	x_5	21	6	2	0	0	1	21/2
c_j-z_j			2	-2↑	0	0	0	
-2	x_2	5	1	1	1	0	0	
0	x_4	1	-2	0	-1	1	0	
0	x_5	11	4	0	-2	0	1	
c_j-z_j			4	0	2	0	0	

此时所有的检验数都为非负数，所以解 $X=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(0,5)^{\mathrm{T}}$ 就是最优解，$\min z=2x_1-2x_2=-10$.

要点　此题是一个有惟一最优解的极小化线性规划问题，判断是否得到最优解的标准为所有的检验数为非负，即检验数大于等于零，因此在最优表中，除了基变量的检验数为零外，其他变量的检验数都为正数. 其迭代过程中，除了选择进基变量时要选择最小的检验数对应的变量为进基变量外，其余的步骤与极大化问题相同.

例 3　$\max z=2x_1+4x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+2x_2\leqslant 4\\ x_1+2x_2\leqslant 10\\ x_1-x_2\leqslant 2\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解　化标准型：

$$\max z=2x_1+4x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3=4\\ x_1+2x_2+x_4=10\\ x_1-x_2+x_5=2\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

用单纯形法计算如表 1-7 所示.

表 1-7

c_j			2	4	0	0	0	$b_i/a_{ik}=\theta_i$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	4	-1	[2]	1	0	0	4/2 →
0	x_4	10	1	2	0	1	0	10/2
0	x_5	2	1	-1	0	0	1	
c_j-z_j			2	4↑	0	0	0	

续表

c_j			2	4	0	0	0	$b_i/a_{ik}=\theta_i$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
4	x_2	2	$-1/2$	1	1/2	0	0	
0	x_4	6	[2]	0	-1	1	0	6/2
0	x_5	4	1/2	0	1/2	0	1	$4\Big/\frac{1}{2}$
c_j-z_j			4↑	0	-2	0	0	
4	x_2	7/2	0	1	1/4	1/4	0	
2	x_1	3	1	0	$-1/2$	1/2	0	
0	x_5	5/2	0	0	[3/4]	$-1/4$	1	
c_j-z_j			0	0	0	-2	0	

因为原问题是最大化问题，且检验数全小于等于零，所以此时的解 $X^{(1)}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T=(3,7/2,0,0,5/2)^T$ 即为最优解，$\max z=2x_1+4x_2=20$. 但是这时非基变量 x_3 的检验数为零，表示原问题还有其他最优解，即多重最优解的情况. 可进一步迭代如表 1-8 所示.

表 1-8

c_j			2	4	0	0	0	$b_i/a_{ik}=\theta_i$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
4	x_2	7/2	0	1	1/4	1/4	0	$\frac{7}{2}\Big/\frac{1}{4}$
2	x_1	3	1	0	$-1/2$	1/2	0	
0	x_5	5/2	0	0	[3/4]	$-1/4$	1	$\frac{5}{2}\Big/\frac{3}{4}$ →
c_j-z_j			0	0	0↑	-2	0	
4	x_2	8/3	0	1	0	1/3	$-1/3$	
2	x_1	14/3	1	0	0	1/3	2/3	
0	x_3	10/3	0	0	1	$-1/3$	4/3	
c_j-z_j			0	0	0	-2	0	

因为原问题是最大化问题，且检验数全小于等于零，所以此时的解 $X^{(2)}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T=(14/3,8/3,10/3,0,0)^T$ 也是最优解，$\max z=2x_1+4x_2=20$. 所以原问题有无穷多最优解，其通式可用上两上解的凸组合表示，即：

$$X=aX^{(1)}+(1-a)X^{(2)},0\leqslant a\leqslant 1$$

要点 此题是有无穷多最优解(多重解)的线性规划问题，最优表中的检验数除了基变量的检验数为 0 外，还有非基变量的检验数也为 0. 在本题的迭代过程中还需注意在用最小比值法则时，要求分母大于 0，即当系数矩阵中对应的向量小于等于 0 时，则不需要计算比值，所对应的变量也不是出基变量.