

A SHUXUE
OLIMPIKE

数学
奥林匹克



高中版新版 竞赛篇

主编 / 单 樽

北京大学出版社

数学奥林匹克

高中版新版·竞赛篇

单 增 主编

严镇军 编撰

北京大学出版社

· 北 京 ·

数学奥林匹克

高中版新版·竞赛篇

单 增 主编

严镇军 编撰

责任编辑：孙 晔

*

北京大学出版社出版发行

(北京大学校内)

北京大学印刷厂印刷

新华书店经售

*

787×1092 32开本 14.25印张 330千字

1993年10月第一版 1999年2月第八次印刷

ISBN 7-301-02057-0/G·148

定价：14.00元

凡北大出版社出版的图书，发现漏页、错页，

本社一律负责退换。本社邮编：100871

序

数学竞赛在我国普遍开展,成绩斐然。不少出版社出版了与竞赛有关的图书,起到良好的推动作用。北京大学出版社出版的这套《数学奥林匹克系列图书》就是其中的一种,它能受到广大读者的欢迎我们非常高兴。

这是我国出版的第一套数学竞赛的系列图书。系列中有高中册,也有初中册与小学册;有普及,也有提高;有最新的资料,也有经过系统整理的题解辞典。目前已出 16 册,近两年内还将推出 10 多种。各地奥林匹克学校采用,普遍反映效果很好。一个突出的例子是国家教委所办的理科实验班使用这套图书,每年都为参加国际数学奥林匹克的我国国家集训队、国家代表队输送约 $2/3$ 的队员。

根据各地提出的意见与建议,这套图书作了不少改进,小学册与初中册均出了新版,并编写了高中版。新版致力于“浅”(即深入浅出)、“趣”(生动有趣)。注意普及,面向广大中小學生,避免过深、过难;注意教学原则的运用,循序渐进,适当重复;注意数学思想的启蒙与打好扎实的基础。我们相信这对于发展智力,对于参加竞赛,对于升学考试均有益处。

系列的另一个特点是“新”。有不少新鲜的资料,如《第 31 届国家集训队资料》、《第 31 届国际数学竞赛预选题》、《苏联数学奥林匹克试题汇编》、《美国数学奥林匹克试题汇编》等都及时整理推出。这套系列中,有关国际竞赛的若干册,可以说代表了当前竞赛的最高水平。这些属于提高的分册,已成为我

国集训队人人必备的材料。

除“浅”、“趣”、“新”等特点外,我们还尽力做到“准”,即科学性方面没有错误。各册作者与编者为此付出不少心血,但由于水平与时间等原因,错误与不妥之处仍难完全避免,敬请广大读者不吝指正。

参加编写工作的有教育家,高级教练及有丰富实践经验的中学教师,更有著名数学家丁石孙、王元、王梓坤、龚升诸位先生担任顾问,保证了这套系列图书的质量。

北京大学出版社,重视社会效益,以最快的速度出版这套系列图书,我们表示衷心的感谢。

单 埏

1992年9月

编辑说明

数学奥林匹克事业在中国大地迅猛发展,并得到了党和政府的大力扶持,各级教育行政部门及社会各界也都积极支持这项事业,为中国在国际竞赛中取得优异成绩提供了强有力的保证。

但是,我国正式参加国际竞赛的时间较短,与长期普遍开展这一活动的国家相比,在一些方面还有差距,特别是高水平的基层教练人员不多,可供培训使用的科学性、系统性、针对性都较强的材料贫乏,这些已成为阻碍我国数学竞赛向更高层次、更广范围发展的重要因素。基于此,北京大学出版社从1988年开始,着手组织编写了一套供小学生到高中学生使用的《数学奥林匹克》系列图书,著名数学家丁石孙、王元、王梓坤、龚升诸先生任顾问,在国内外享有盛誉的数学奥林匹克专家、前国家教练组组长、第31届国际数学竞赛中国国家队领队兼主教练单墀教授任主编,编委及主要作者均为在国内外有一定影响的数学奥林匹克专家。

《数学奥林匹克》系列图书包括三个部分:从小学到高中的培训教材、国内外高水平竞赛材料、国家集训队集训资料;在近期内还将出版竞赛题解辞典。本系列图书自正式出版发行以来,行销全国各地,普遍反映效果很好。国家教委理科实验班及国家集训队、国家代表队都将本系列中的部分图书作为主要培训材料之一。在此,北京大学出版社及系列图书编委会向广大新老读者表示衷心的感谢!

根据各地读者提供的意见与建议,我们在继续及时出版有关国内外竞赛材料的同时,重新组织编写了小学版、初中版、高中版。新版广泛吸取了读者的建议,熔入了国内外各级竞赛的最新材料,特别参照国家教委新颁教学大纲,有层次,有梯度,有特点,旨在使程度不同的学生都可以学有所获。

高中版新版由单墀教授主编,写作提纲由编委会讨论并征求了部分专家、中小学教师及学生的意见。《基础篇》由南京师范大学数学系王巧林、刘亚强撰写,《知识篇》由武钢三中特级教师、武汉市数学教研会副理事长钱展望撰写,《竞赛篇》由中国科技大学数学系教授、第33届国际数学竞赛中国队领队苏淳、严镇军撰写。全书由主编单墀教授审定。

为了使这套图书更好地发挥作用,热忱希望读者朋友及社会各界人士提出改进意见。

北京大学出版社将一如既往地数学奥林匹克事业服务,为振兴中国的数学尽我们的力量。

最后,再次向读者朋友表示衷心的感谢!

1992年12月

目 录

第一讲	两种求和法及其应用	(1)	✓
第二讲	关于不等式的一些问题(一)	(25)	✓
第三讲	关于不等式的一些问题(二)	(46)	
第四讲	排序原则和极端性原则(一)	(66)	
第五讲	极端性原则(二)	(82)	
第六讲	用构造法解存在性问题	(97)	
第七讲	整不等式	(113)	✓
第八讲	整最值问题	(131)	✓
第九讲	组合最值问题	(147)	
第十讲	整点问题	(163)	
第十一讲	集合的分拆	(179)	
第十二讲	函数迭代	(196)	✓
第十三讲	递归数列	(213)	✓
第十四讲	周期数列、模数列	(234)	
第十五讲	函数方程(一)	(251)	
第十六讲	函数方程(二)	(267)	
第十七讲	单位根及其应用	(284)	
第十八讲	数学竞赛中多项式问题的解法(一)	(303)	✓
第十九讲	数学竞赛中多项式问题的解法(二)	(318)	✓
第二十讲	数学竞赛中多项式问题的解法(三)	(334)	✓
	习题简要解答	(353)	

第一讲 两种求和法及其应用

这一讲介绍两种重要的数列求和法——裂项求和法和部分求和法及其应用。

1. 裂项求和法

裂项求和法是基于显然成立的恒等式：

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}),$$

或者写成

$$a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k). \quad (1)$$

由于数列是定义在自然数集上的函数，上面的恒等式可以写成

$$\begin{aligned} f(n) - f(1) &= \sum_{k=1}^{n-1} [f(k+1) - f(k)] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \Delta f(k), \end{aligned}$$

这里定义

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$

称为函数 $f(x)$ 的一阶差分。关于差分及其应用，第十七讲还要作进一步的讨论。

例1 求和：

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} &= \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k - k^2(k+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \end{aligned}$$

所以

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

例2 证明: 存在常数 A 和 B , 使对一切 $n \in \mathbf{N}$, 有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = A \operatorname{tg} n + Bn,$$

这里

$$a_k = \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k-1), \quad k=1, 2, \dots, n.$$

证 对于一切 $k \in \mathbf{N}$, 有

$$\operatorname{tg} 1 = \frac{\operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1)}{1 + \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k-1)},$$

即

$$a_k = \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k-1) = \frac{\operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1)}{\operatorname{tg} 1} - 1.$$

所以

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1)}{\operatorname{tg} 1} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\operatorname{tg} 1} \sum_{k=1}^n [\operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1)] - n \\
 &= \frac{\operatorname{tg} n}{\operatorname{tg} 1} - n.
 \end{aligned}$$

于是, 令

$$A = \frac{1}{\operatorname{tg} 1}, \quad B = -1,$$

满足题目的要求。

例3 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$, 且每项都不为零, m 是大于1的整数。求证:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_m} + \frac{1}{a_2 a_3 \cdots a_{m+1}} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1}} \\
 &= \frac{1}{(m-1)d} \left(\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{m-1}} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+m-1}} \right).
 \end{aligned}$$

证 注意到和 S_n 中的一般项是

$$c_k = \frac{1}{a_k a_{k+1} \cdots a_{k+m-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

于是, 令

$$b_k = \frac{1}{a_k a_{k+1} \cdots a_{k+m-2}},$$

有

$$b_k - b_{k+1} = \frac{a_{k+m-1} - a_k}{a_k a_{k+1} \cdots a_{k+m-1}} = (m-1) d a_k.$$

所以

$$S_n = \sum_{k=1}^n c_k = \frac{1}{(m-1)d} \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1})$$

$$= \frac{1}{(m-1)d} (b_1 - b_{n+1})$$

$$= \frac{1}{(m-1)d} \left(\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{m-1}} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+m-1}} \right).$$

例4 求证：组合恒等式

$$C_r^r + C_{r+1}^r + C_{r+2}^r + \cdots + C_{r+n-1}^r = C_{r+n}^{r+1}. \quad (2)$$

证 由基本组合恒等式

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad (k=1, 2, \cdots, n, n \geq 2)$$

有

$$\begin{aligned} C_r^r + C_{r+1}^r + \cdots + C_{r+n-1}^r &= C_r^r + \sum_{i=1}^{n-1} (C_{r+i}^{r+1} - C_{r+i}^r) \\ &= C_{r+1}^{r+1} + (C_{r+n}^{r+1} - C_{r+1}^r) \\ &= C_{r+n}^{r+1}. \end{aligned}$$

注 在恒等式(2)中，分别令 $r=0$ (这时定义 $C_0^0=1$)，1，2，3，便得到如下的一些恒等式：

$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 (\text{共 } n \text{ 个 } 1) = n, \quad (3)$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1); \quad (4)$$

$$1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2); \quad (5)$$

$$1 + 4 + 10 + \cdots + \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

$$= \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(n+3). \quad (6)$$

对于给定的数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, 我们称数列

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,$$

$$S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k, \dots$$

为它的部分和数列。于是, 自然数列 $1, 2, \dots, n, \dots$ 是数列 $1,$

$1, \dots, 1, \dots$ 的部分和数列; 数列 $1, 3, 6, \dots, \frac{1}{2}n(n+1), \dots$ 是自然数列的部分和数列。而恒等式 (3) — (6) 中, 后一个等式则是前一个等式左边的数列的部分和数列的求和公式, 例如

(6) 是数列 $1, 3, 6, \dots, \frac{1}{2}n(n+1), \dots$ 的部分和数列的求和公式。

利用差分恒等式 (1), 还可以证明许多数列与和式的不等式。

例5 定义数列 $\{a_n\}$ 如下:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad 2ka_k = (2k-3)a_{k-1} \quad (k \geq 2).$$

求证: 对一切 $n \in \mathbf{N}$, 有 $\sum_{k=1}^n a_k < 1$ 。

证 由题设, 有

$$2(k+1)a_{k+1} = (2k-1)a_k \quad (k \geq 1),$$

即

$$-a_k = 2[(k+1)a_{k+1} - ka_k].$$

所以

$$-\sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=1}^n [(k+1)a_{k+1} - ka_k]$$

$$= 2[(n+1)a_{n+1} - a_1],$$

即

$$1 - \sum_{k=1}^n a_k = 2(n+1)a_{n+1}.$$

易知对一切 $n \in \mathbf{N}$, $a_n > 0$, 故对一切 $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=1}^n a_k < 1$.

例6 设 $n, k \in \mathbf{N}$, 求证:

$$\frac{1}{k+1} n^{k+1} < \sum_{p=1}^n p^k < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} \frac{1}{k+1} n^{k+1}.$$

证 首先证明: 若 $p \in \mathbf{N}$, 则

$$p^{k+1} - (p-1)^{k+1} < (k+1)p^k < (p+1)^{k+1} - p^{k+1}. \quad (7)$$

事实上, 由恒等式

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

得到

$$\begin{aligned} p^{k+1} - (p-1)^{k+1} &= p^k + p^{k-1}(p-1) + \dots + (p-1)^k \\ &< (k+1)p^k. \end{aligned}$$

(7)式右边的不等式可类似证明。在不等式(7)中, 分别令 $p=1, 2, \dots, n$, 再把所得 n 个同向不等式相加, 得

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^n [p^{k+1} - (p-1)^{k+1}] \\ &< (k+1) \sum_{p=1}^n p^k < \sum_{p=1}^n [(p+1)^{k+1} - p^{k+1}], \end{aligned}$$

即

$$n^{k+1} < (k+1) \sum_{p=1}^n p^k < (n+1)^{k+1} - 1 < (n+1)^{k+1}.$$

所以

$$\frac{1}{k+1} n^{k+1} < \sum_{p=1}^n p^k < \frac{1}{k+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} n^{k+1}.$$

例7 定义数列 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 如下:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_k = a_{k-1} + \frac{1}{n} a_{k-1}^2 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

求证:

$$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1.$$

证 由所设递归关系, 有

$$0 < \frac{1}{2} = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n,$$

且

$$\frac{1}{a_k} = \left(\frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{n} a_{k-1}^2} - \frac{1}{a_{k-1}} \right) + \frac{1}{a_{k-1}} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

从而

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{n + a_{k-1}} < \frac{1}{n},$$

所以

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} \right) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1,$$

即

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_0} - 1 = 1,$$

亦即

$$a_n < 1.$$

由 $a_n < 1$ 及 $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{n + a_{k-1}}$ 得

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} > \frac{1}{n+1},$$

所以

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

即

$$\frac{1}{a_n} < 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

因此

$$a_n > \frac{n+1}{n+2} > \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

注 本题是1980年芬兰、英国、匈牙利和瑞典四国联合举行的数学竞赛中的一道试题，当时提出的证明是相当繁琐的，在证明中，先后用了4次数学归纳法，其解法译成中文长达4000多字。后来，我国的单尊教授提出，把要证的不等式改为证明更强的不等式：对一切 $1 \leq k \leq n$ ，有

$$\frac{n+1}{2n-k+2} < a_k < \frac{n}{2n-k}.$$

这一事实不难用归纳法证明，建议读者自己完成。再在上述不等式中令 $k = n$ ，得

$$\frac{n+1}{n+2} < a_n < 1.$$

这与前述证明中的结果一致。

2. 部分求和法

先证明下述部分求和公式(亦称阿伯尔(Abel)求和法):

设 $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ ($k = 1, 2, \cdots, n$), 则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}).$$

证 为了写得更对称一些, 令 $S_0 = 0$, 则

$$a_1 = S_1 - S_0.$$

又 $a_k = S_k - S_{k-1}$ ($k = 2, 3, \cdots, n$), 所以

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n b_k (S_k - S_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n b_k S_k - \sum_{k=1}^n b_k S_{k-1} \\ &= S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k S_k - \sum_{k=2}^n b_k S_{k-1} \quad (\text{因 } S_0 = 0) \\ &= S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k S_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} S_k \\ &= S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}). \end{aligned}$$

这个公式的特点是把数列 $\{a_k b_k\}$ 的前 n 项和化为数列 $\{a_k\}$ 的部分和 S_k 来处理, 因此, 在应用这个公式时, 要使选取的数列 $\{a_k\}$ 的部分和 S_k 较易求得或者容易估计出它的大小。