考研图书全国知名品牌
全国十大考研辅导班指定辅导用书

JINBANG KAOYAN
金榜考研成功系列

2006年全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关660题(理工类)

SHUXUE JICHUGUOGUAN 660 TI(LIGONGLEI)

主编：李永乐

第三版

考研名师倾情巨献
决胜考场的宝典

3

新华出版社

2006年全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关660题
(理工类)

主　编:李永乐
编　者:(按姓氏笔画)
清华大学　刘庆华
北京大学　李正元
清华大学　李永乐
北京交通大学　赵达夫
东北财经大学　龚兆仁

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学基础过关 660 题(理工类)/李永乐主编. —北京：
新华出版社，2004.2

(2006 年全国硕士研究生入学考试用书)

ISBN 7—5011—6552—1

Ⅰ.数...　Ⅱ.李...　Ⅲ.高等数学—研究生—人学
考试—习题　Ⅳ.013—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004603 号

敬告读者

本书封面粘有策划者专用防伪标识，凡有防伪标识的为正版图书，请读者注意识别。

2006 年全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关 660 题(理工类)

主编：李永乐

*

新华出版社出版发行

(北京石景山区京原路 8 号　邮编：100043)

新华出版社网址：http://www.xinhuapub.com

中国新闻书店：(010)63072012

新华书店总经销

北京云浩印刷有限责任公司印刷

*

787 毫米×1092 毫米　16K　21.25 印张　504 千字

2005 年 3 月第 3 版　2005 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 7—5011—6552—1/G·2383　定价：30.00 元

若有印装质量问题，请与印厂联系(010)82570299

第三版前言

针对考试大纲对基础知识、基本概念、方法的要求以及往届考生的失误，本次修订在题目的选编上有较大的改动。同时我们根据往届同学反馈的信息，对于同学不太好理解，或不大注意的地方，我们在评注中增加了较多的题外话。

为了把每个知识块复习好，建议同学把填空题与选择题中对应的知识点结合在一起复习。希望本书的修订再版，能对同学们的复习备考有更大帮助。

编　者

2005 年 2 月

前　言

本书是为报考硕士研究生的考生编写的数学复习备考用书，适合于数学一至数学四4个卷种，内容包括高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计。题型为填空题与选择题。注意，2004年卷子结构改变为：8个选择题，6个填空题，9个解答题，其中选择、填空共56分，解答94分。

硕士研究生入学考试的性质是“具有选拔功能的水平考试”，在强调选拔、强调能力考查的时候，并不意味着要削弱对基础知识和基本理论的要求，“考查考生对基础知识的掌握程度，是数学考试的重要目标之一”。近几年来，相当一部分考生在答题中的一些失误，恰恰是对大纲中规定的基本概念、基本原理、基本方法的理解与掌握上存在某些偏差欠缺，甚至有所偏废所致。如果基本的数学方法没掌握，定理公式不熟悉，势必在知识点的衔接与转换上会有各种障碍，那么思维水平和创造意识亦将受到影响。

不论是数学基本理论的建立，还是数学运算或逻辑推理的进行，无一不是以明确、清晰的概念为基础。考生要重视对概念的复习，应当从不同的角度，不同的侧面进行思考，准确地把握住概念的内涵，注意相关概念的联系与区别，否则解题时思维上就会出现疑惑与混乱，方法上也就会有种种谬误。

数学离不开计算，考研也非常重视对计算能力的考查。因此，考生复习时要注意提高运算能力，要提高计算的准确性，不仅要动脑而且要动手，不能华而不实，眼高手低，丢三拉四，总犯“低级”错误。

是否具有较为扎实的基础知识和基本理论，是培养、提高分析问题与解决问题能力的基础，我们正是在认真研究历年试题的基础上，对考试的重点、难点加以分解剖析，对考生常出的错误归纳整理，我们用化整为零各个击破以及基础与综合相结合的方法，用点面结合，抓住基础突出重点的方法，设计出不同解题思想层次的习题整合成书。期望能帮助同学搞清概念、搞清原理、搞清方法，只有基础过关在考试中才能取得好成绩。同学们在使用本书时，最好能先自己动手想与算，不要急于看解答，评注中的一些题外话亦值得细心揣摩。

研究生考试科目从2003年调整之后，数学科的权重在原有基础上增加了50%，因此与往年相比，数学成绩对总分将有更大的影响，数学科的地位愈显重要，同时由于数学科本身的特点，考生的数学成绩历来相关较大，这说明数学科的考试选拔性质更加突出。因此，希望考生们要根据考试大纲认真踏实全面系统地复习，心态要平和，戒浮燥，要循序渐进，不断积累步步提高，面对激烈的竞争，望有志者抓紧抓细抓早。

本书也可供大专院校的学生在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计时参考。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2003年7月

目　录

第一部分 填空题

§ 高等数学(微积分)

1. 设 $x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=$ ________.

【答案】 3

【分析】 $x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$

$$\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

相减得

$$\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$x_n=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=3.$

【评注】 通过恒等变形转化为可以用四则运算法则求极限，这是求数列极限的重要情形.

2. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{9\ln^2x+2}+2\ln x-4}{\sqrt{\ln^2x+\cos x}}=$ ________.

【答案】 1

【分析】 这是求 $\frac{\infty}{\infty}$ 极限，分子、分母同约去极限为 ∞ 的因子.

$$\sqrt{\ln^2x}=|\ln x|=-\ln x\qquad(0<x<1\text{ 时 }\ln x<0)$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{9+\frac{2}{\ln^2x}}-2+\frac{4}{\ln x}}{\sqrt{1+\frac{\cos x}{\ln^2x}}}$$

$$= \frac{\sqrt{9+0}-2+0}{\sqrt{1+0}} = 1$$

【评注】 求$\frac{\infty}{\infty}$(或$\frac{0}{0}$)型极限的一个重要方法是:先约去分子、分母中极限为∞(或0)的因子,然后可用四则运算法则.

3. 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x\leqslant 0 \\ 2+x, & x>0 \end{cases}$,$f(x) = \begin{cases} x^2, x<0 \\ -x, x\geqslant 0, \end{cases}$,则$\lim\limits_{x\to 0}g(f(x)) =$ ________.

【答案】 2

【分析 1】 先求出 $g(f(x))$

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2-f(x), & f(x)\leqslant 0 \\ 2+f(x), & f(x)>0 \end{cases}$$

由 $f(x)$ 的定义知,当 $x<0$ 时,$f(x)=x^2>0$;当 $x>0$ 时,$f(x)=-x<0$;当 $x=0$ 时,$f(x)=0$. 于是

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2+x^2, & x\leqslant 0 \\ 2-(-x), & x>0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x^2, & x\leqslant 0 \\ 2+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(f(x)) = \lim_{x\to 0^+}(2+x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(f(x)) = \lim_{x\to 0^-}(2+x^2) = 2$$

因此, $\lim\limits_{x\to 0}g(f(x)) = 2.$

【分析 2】 不必求出 $g(f(x))$.

$$\lim_{x\to 0^+} g(f(x)) = \lim_{x\to 0^+} g(-x) = \lim_{x\to 0^+}(2-(-x)) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(f(x)) = \lim_{x\to 0^-} g(x^2) = \lim_{x\to 0^-}(2+x^2) = 2.$$

因此,$\lim\limits_{x\to \infty}g(f(x)) = 2.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+\sin 3x)^{\cot 5x} =$ ____________.

【答案】 $e^{\frac{3}{5}}$

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+\sin 3x)^{\cot 5x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[1+(\cos 2x+\sin 3x-1)\right]^{\frac{\cot 5x}{\cos 2x+\sin 3x-1}(\cos 2x+\sin 3x-1)}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\cot 5x\cdot(\cos 2x+\sin 3x-1)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1+\sin 3x}{\sin 5x}\cdot\cos 5x$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin 5x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\cos 5x$$

$$= \left(0+\frac{3}{5}\right)\times 1 = \frac{3}{5}$$

于是 $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x+\sin3x)^{\cot5x}=e^{\frac{3}{5}}$

【评注】 所要计算的极限属“1^∞”时，通常利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$计算.

5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________

【答案】 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

【分析】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}}$

而
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[1+\left(\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}-1\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{2^{x^2}+3^{x^2}-2^x-3^x}{2^x+3^x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2^x+3^x}\left(\frac{2^{x^2}-1}{x}+\frac{3^{x^2}-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}-\frac{3^x-1}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2\ln2}{x}+\frac{x^2\ln3}{x}-\frac{x\ln2}{x}-\frac{x\ln3}{x}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\ln6$$

所以，原式 $=e^{-\frac{1}{2}\ln6}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

【评注】 所要计算的极限属“1^∞”型时，也可将极限改写为如下形式计算起来较为简单.

$\lim u^v=e^{\lim(u-1)\cdot v}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}}=$ ________.

【答案】 $\dfrac{1}{n!}$

【分析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{(\cos x-1)+1})(1-\sqrt[3]{(\cos x-1)+1})\cdots(1-\sqrt[n]{(\cos x-1)+1})}{(1-\cos x)^{n-1}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{(\cos x-1)+1}}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{(\cos x-1)+1}}{1-\cos x}\cdot\cdots\cdot\frac{1-\sqrt[n]{(\cos x-1)+1}}{1-\cos x}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}$$

【评注】 由 $x \to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{x}{n}$，有当 $x \to 0$ 时，$1-\sqrt[n]{(\cos x-1)+1} \sim -\frac{1}{n}(\cos x-1)$.

7. 设 $a>0, a \neq 1$，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\ln a$，则 $p=$ ________.

【答案】 2

【分析】 $a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}=a^{\frac{1}{x}}(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)$ 　当 $x \to +\infty$ 　$a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1 \sim \frac{\ln a}{x(x+1)}$

因此

$$\lim_{x \to +\infty} x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\lim_{x \to +\infty} x^p a^{\frac{1}{x}} \frac{\ln a}{x(x+1)}$$

$$=\ln a \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{x^p}{x(x+1)}$$

$$=\ln a \quad (\text{当 } p=2 \text{ 时})$$

【评注】 容易看出：当 $p<2$ 时，$\lim\limits_{x \to +\infty} x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=0$，当 $p>2$ 时，$\lim\limits_{x \to +\infty} x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=+\infty$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}=$ ________.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}$$

$$=\lim_{x \to 0} \frac{\tan x-\sin x}{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x \to 0} \frac{\tan x-\sin x}{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x \to 0} \frac{\tan x-\sin x}{\tan x-\sin x} \cdot \frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

上式最后一步利用 $x \to 0$ 时 $e^{\tan x-\sin x}-1 \sim \tan x-\sin x$.

【评注】 在计算极限时，正确利用等价无穷小因子的代换定理能简化计算. 常遇到的等价无穷小有：

当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, a^x-1 \sim x\ln a$ $(a>0)$， $\ln(1+x) \sim x$.

9. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} =$ ________.

【答案】 e^2

【分析】 把 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$ 改写为指数形式：$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}} = e^3$

由此得 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x} = 3 \tag{1}$$

当 $x \to 0$ 时，分母为无穷小，所以分子也为无穷小，进一步有 $\lim\limits_{x\to 0}(x+\frac{f(x)}{x}) = 0$. 因此，当 $x \to 0$ 时

$$\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right) \sim x+\frac{f(x)}{x}，所以(1)可写为\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x} = 3.$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 2 \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0.$

于是 $$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}} = e^2$$

10. 设 $a_1, a_2, \cdots a_m$ 为正数 $(m \geqslant 2)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}} =$ ________.

【答案】 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$.

【分析】 不妨设 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\} = a_1$

则 $a_1 \leqslant (a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}} \leqslant a_1 m^{\frac{1}{n}}$

令 $n \to \infty, m^{\frac{1}{n}} \to 1$，由夹逼定理

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}} = a_1$（即 $\max\{a_1, a_2 \cdots a_m\}$）

11. $[x]$ 表示 x 的最大整数部分，则 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{2}{x}\right] =$ ________.

【答案】 2

【分析】 $\frac{2}{x}-1 < \left[\frac{2}{x}\right] \leqslant \frac{2}{x}$

因此，当 $x>0$ $\quad 2-x < x\left[\frac{2}{x}\right] \leqslant 2$

当 $x<0$ $\quad 2 \leqslant x\left[\frac{2}{x}\right] < 2-x$

又 $\lim\limits_{x\to 0}(2-x)=2.$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{2}{x}\right]=2.$

【评注】 上一题和本题都是利用夹逼定理求极限，解这一类题的关键是要找出两个特殊的数列（或函数），这要求我们熟练掌握一些常用的数列（或函数）的极限.

12. 设 $\{a_n\}$ 为数列，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$，$|q|<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ________.

【答案】 0

【分析】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|<1$，由极限的不等式性质 $\Rightarrow\exists N$，当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$，即 $|a_{n+1}|<|a_n|$，所以不妨认为数列 $|a_n|$ 是单调减少的，又 $|a_n|\geqslant 0$，由单调有界数列收敛定理推出 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=a$，则 $a=0$，若不然，$a\neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{a}{a}=1$，这与 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|<1$ 矛盾.

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

【评注】 运用这一结果，可求出以下函数的极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^n}{n!}=0$ 等.

13. 设 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-f(0))=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)-f(-x)|=$ ________.

【答案】 0

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}[(f(x)-f(0))+f(0)]=f(0)$

由函数在一点连续的定义得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(-x)=f(0)$

于是
$$\lim_{x\to 0}|f(x)-f(-x)|=\left|\lim_{x\to 0}(f(x)-f(-x))\right|=|f(0)-f(0)|=0$$

14. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续，且 $f(1)=1$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln[2+f(x^{\frac{1}{x}})]=$ ________.

【答案】 ln3

【分析】 先求出
$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$$

由函数的连续性得$\lim\limits_{x\to\infty} f(x^{\frac{1}{x}}) = f(1) = 1$，$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln[2 + f(x^{\frac{1}{x}})] = \ln 3$

15. 函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ 的间断点及类型是____________.

【答案】 $x = \pm 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

【分析】 分别就 $|x| = 1, |x| < 1, |x| > 1$ 时求极限

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$，得出 $f(x)$ 的分段表达式：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| > 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ -1 & |x| < 1 \end{cases}$$

在 $|x| = 1$ 处，因 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1$

所以，$x = \pm 1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

16. 设 $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \arctan(1 + x^n)$，则 $f(x)$ 的定义域是____________，$f(x)$ 的间断点是____________.

【答案】 $(-1, +\infty)$，$x = 1$

【分析】 $x \leqslant -1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(1 + x^n)$ 不存在，所以 $f(x)$ 在 $x \leqslant -1$ 无定义.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & x \in (-1, 1) \\ \arctan 2 & x = 1 \\ \dfrac{\pi}{2} & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

因 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{\pi}{2} \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{\pi}{4}$

所以 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的间断点.

【评注】 要注意 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

当 $x < -1$ 时

$$\lim_{n\to+\infty} \arctan(1 + x^{2n}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \arctan(1 + x^{2n-1}) = -\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\arctan(1+x^n)$ 不存在

当 $x=-1$ 时,

$$\lim_{n\to+\infty}\arctan(1+x^{2n})=\arctan 2$$

$$\lim_{n\to+\infty}\arctan(1+x^{2n-1})=0$$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\arctan(1+x^n)$ 不存在.

17. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\ln(1+2x)}{x}+b & x>0\\ a & x=0\\ \dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2} & x<0\end{cases}$

则 $a=$ __________,$b=$ __________ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【答案】 $\dfrac{1}{3}$,$-\dfrac{5}{3}$

【分析】 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,必须使 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$.

而 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\ln(1+2x)}{x}+b\right]$

$$=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2e^{-\frac{2}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+2x)}{x}+b\right]$$

$$=0+\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{x}+b=2+b$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{x+\sin x}{x}=2\lim_{x\to0^-}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0^-}\frac{1-\cos x}{3x^2}=2\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

所以,应有 $2+b=\dfrac{1}{3}$ 及 $a=\dfrac{1}{3}$,因此,当 $a=\dfrac{1}{3}$,$b=-\dfrac{5}{3}$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

18. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-1}{2}, & x>1\\ \arctan x, & |x|\leqslant 1\\ -\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x+1}{2}, & x<-1\end{cases}$,则 $f'(x)=$ ________.

【答案】 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |x|\geqslant 1\\ \dfrac{1}{1+x^2}, & |x|\leqslant 1\end{cases}$

【分析】 这是分段函数的求导，非连接点分别与初等函数相同，易求得导函数：

$x>1$ 时， $f'(x)=(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-1}{2})'=\dfrac{1}{2}$

$|x|<1$ 时， $f'(x)=(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$x<-1$ 时， $f'(x)=(-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x+1}{2})'=\dfrac{1}{2}$.

在 $x=\pm 1$，$f(x)$ 的表达式中可添加等号，即可写成

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-1}{2}, & x\geqslant 1\\ \arctan x, & |x|\leqslant 1\\ -\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x+1}{2}, & x\leqslant -1\end{cases}$$

于是在 $x=\pm 1$ 处可分别求左右导数而求得导数.

$$f'_+(1)=(\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2})'_+\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}$$

$$f'_-(1)=(\arctan x)'_-\Big|_{x=1}=\frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \quad f'(1)=\dfrac{1}{2}$

同理可求得 $\quad f'(-1)=\dfrac{1}{2}$

因此，

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |x|\geqslant 1\\ \dfrac{1}{1+x^2}, & |x|\leqslant 1\end{cases}$$

19. 若 $f(x)=\begin{cases}g(x)\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ $g'(0)=g(0)=0$，则 $f'(0)=$ ________.

【答案】 0

【分析】 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)\sin\dfrac{1}{x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[g(x)-g(0)]\sin\dfrac{1}{x}}{x}=0$$

在上式中，因$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=0$，又$\sin\dfrac{1}{x}$是有界量，无穷小量与有界量的乘积为无穷小量，因此，答案为零.

【评注】 求形如$f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\neq x_0)\\ A & (x=x_0)\end{cases}$分段函数在分段点处的导数时一般要用定义来求，或函数在分段点连续的条件下求导数的极限. 即用下面定理求分段函数在分段点的导数：(1) $f(x)$在x_0处连续；(2) $f(x)$在x_0的某空心邻域内可导，(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在，则$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$

但就本题而言，就不能用上述定理，因题设中没有“$g'(x)$在$x=0$的某空心邻域内存在”的条件.

20. 设$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则$f'(x)=$ ______

【答案】 $\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x(1+x)} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

【分析】 当$x\neq 0$时，

$$f'(x)=\left[\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-\mathrm{e}\right]'$$
$$=\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)'$$
$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

当$x=0$时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}\right]'}{(x)'}$$
$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{2x}$$
$$=-\frac{\mathrm{e}}{2}$$

【评注】(1) 求幂指函数$[u(x)]^{v(x)}$ 的导数，可化为对 $e^{v(x)\ln u(x)}$ 求导，或用对数求导法.

(2) 解本题时，(1) 式到(2) 的过程必不可少，即先用求极限的乘法运算法则，再对$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$ 利用洛必达法则，若直接对(1) 式利用洛必达法则，又遇到求幂指函数$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的导数，计算会越来越复杂.

21. 设函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，又 $F(0)=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(1-\cos x)}{\tan x^2}=$ ________.

【答案】 $\frac{1}{2}F'(0)$

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(1-\cos x)}{\tan x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(1-\cos x)-F(0)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(1-\cos x)-F(0)}{1-\cos x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$$

$$\underline{\underline{令\ 1-\cos x=u}}\ \frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{F(u)-F(0)}{u}=\frac{1}{2}F'(0)$$

22. $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=$ ________.

【答案】 $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$

【分析】 所求极限属“1^∞”型不定式，可化为：$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)}\right]^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln f\left(a+\frac{1}{x}\right)-\ln f(a)\right]}$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln f\left(a+\frac{1}{x}\right)-\ln f(a)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln f\left(a+\frac{1}{x}\right)-\ln f(a)}{\frac{1}{x}}\ \underline{\underline{令\frac{1}{x}=t}}\ \lim_{t\to 0}\frac{\ln f(a+t)-\ln f(a)}{t}$$

$$=[\ln f(x)]'\Big|_{x=a}=\frac{f'(x)}{f(x)}\Big|_{x=a}$$

$$=\frac{f'(a)}{f(a)}$$

于是所求极限为 $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.