

汪国柄  
编著

# 大学 文科 数学

清华大学出版社

2

# 大学 文科 数学

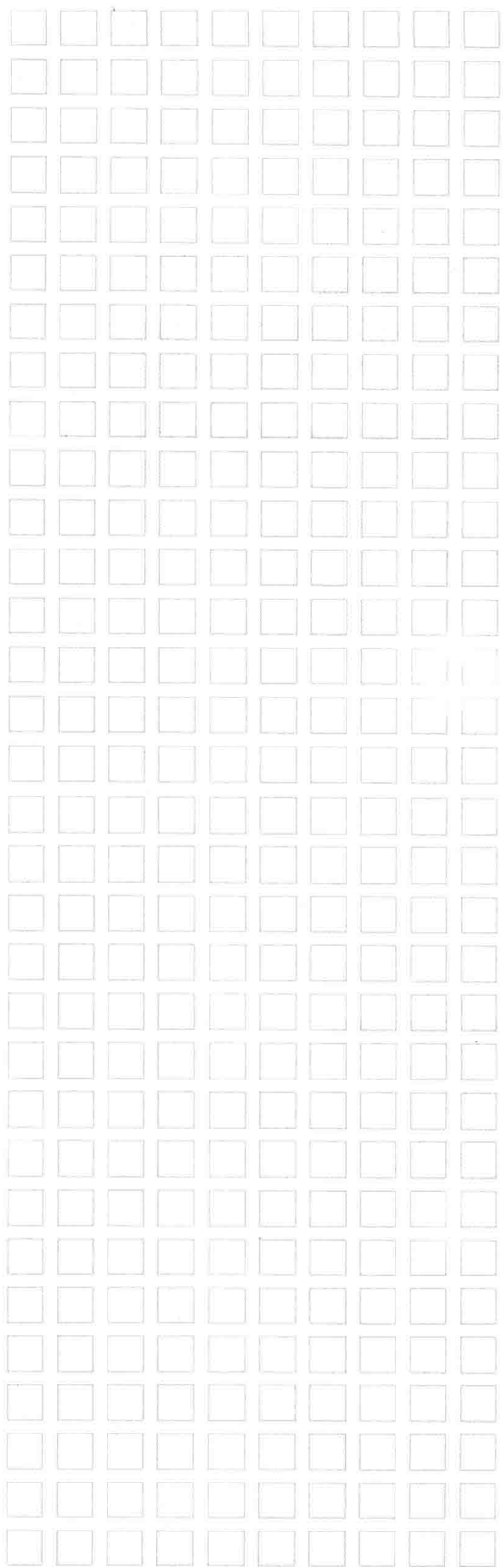
汪国柄  
编著

013  
254

5A262/03

清华大学出版社

北京



## 内 容 简 介

本书是由编者为清华大学文科数学教学所写的试用讲义修改而成的,它凝聚了作者多年的教学经验.全书分为五部分:数学概观、一元微积分、多元微积分、线性代数初步和概率论初步.

每个部分的内容都经过精细筛选,重点突出,层次分明,叙述清楚,深入浅出,简明易懂.全书例题丰富,每节之后均配有适当数量的习题,每章之后附有复习题,书末附有习题答案与提示,便于教师教学,也便于学生自学.

本书适用于文学、历史学、哲学及其他文科类专业的本科生,也可作为一些工科类专业的教材和教学参考书.

版权所有,翻印必究.举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

### 图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/汪国柄编著. —北京:清华大学出版社,2005.3

ISBN 7-302-10272-4

I. 大… II. 汪… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 002916 号

出版者:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社总机:010-62770175

地 址:北京清华大学学研大厦

邮 编:100084

客户服务:010-62776969

组稿编辑:刘 颖

文稿编辑:佟丽霞

封面设计:常雪影

印刷者:北京密云胶印厂

装订者:北京市密云县京文制本装订厂

发行者:新华书店总店北京发行所

开 本:185×230 印张:29 字数:596千字

版 次:2005年3月第1版 2005年3月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-10272-4/O·440

印 数:1~3000

定 价:33.00元

# 前 言

---

1992年,联合国教科文组织在里约热内卢宣言中指出:“纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙”,各个学科都需要这把钥匙,文科当然也不能例外.文科学生系统地学习一些基础数学理论十分必要.

文科学生学习数学理论不外有三个目的.其一是提高数学方面的素质修养.数学是人类文化的一个重要组成部分,作为一个受过高等教育的文化人,如果连什么是微积分,什么是矩阵都一无所知,无论如何也说不过去.古希腊大哲学家柏拉图(Plato,约公元前427—前347)在他创办的学园大门口高挂着“不懂几何者不得入内”的牌子,表明了他对学生在数学方面的素质要求.在我国古代的科举考试中,似乎未见有数学的内容,但是在历代国子监里,数学都是必修课,教材是《算经十书》.在我国现在的高考中实行“3+x”的模式,对于文科学生,数学也是必考课程之一.可见,古今中外,对文科学生在数学方面的素质都有极高要求.其二是提高逻辑思维能力.文科主要使用形象思维,形象思维丰富多彩;数学使用逻辑思维,逻辑思维严谨.将两种思维方式结合起来,必然效果更佳.其三是要学会运用数学理论去解决文科领域中的一些实际问题.近50多年来,随着电子计算机的出现与迅猛发展,数学在文科领域中的应用性大大增加了;特别是对于那些从事文科课题研究的人,数学工具更是不可缺少.

编者针对文科特点编写的讲义,在清华大学人文学院、法学院和新闻与传播学院诸文科专业中试用过3年,效果相当好.本教材就是在试用讲义的基础上,结合这几年的教学具体情况修改而成的.全书分为5个部分:数学概观、一元微积分、多元微积分、线性代数初步和概率论初步,共计10章.

数学概观部分阐述了数学的本质和特性,数学与其他各个学科的关系,特别是数学与人文学科的关系,以期加深学生对数学的认识,激发学习积极性.在这一部分还介绍了中外数学发展简史:从西方的毕达哥拉斯学派与欧几里得的《几何原本》到东方的墨家学派与《墨经》、刘徽与《九章算术》;从古老的结绳记数、刻画记数到阿拉伯数字的出现与数系的形成;从神秘的《周易》与八卦到现代的吴文俊与机器证明、陈景润与哥德巴赫猜想;从《庄子》的极限思想到牛顿-莱布尼茨创建的《微积分》等数学史上的光辉成就.以期开阔学生的视野,拓宽知识面,提高数学素养.

本教材的主要内容是一元微积分与线性代数初步.微积分与线性代数不仅应用性强,而且也是学习其他数学分支理论的基础.特别是微积分,它是数学发展史上的一座伟大里程碑,相对于初等数学,有着崭新的思维方式,正如恩格斯所指出的那样:“只有微积分才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态,并且也表明过程:运动.”学好一元微积分,再学多元微积分就比较简单了.概率论不仅应用性强,更是数理统计的理论基础.对于文科学生来说,无论出于什么目的,微积分、线性代数和概率论都应当是必须具备的数学理论知识.但考虑到文科教学计划安排数学学时相对较少,只能将多元微积分和概率论放在次要位置.

本教材在写法上力求引导学生用辩证唯物主义的观点去分析问题和解决问题.在分析数学的本质时就已突出了这一点.数学中充满着辩证法,而且用自己的特殊的符号语言,简明的公式表达出各种辩证关系和转化.例如,极限概念能很好地体现出有限与无限,近似与精确的辩证关系;牛顿-莱布尼茨公式描述了微分和积分两种运算之间的联系及相互转化.由于极限概念贯穿整个微积分,所以在第3章中,通过求曲边三角形的面积的实例来探讨“极限法中的辩证思想”.

经过调研,文科新生多数未学过参数方程和极坐标,所以第2章补充了这部分内容.

教材内容学时安排大致为:“数学概观”6学时,“一元微积分”48学时,“线性代数初步”18学时;共72学时.这是必修课.按每周4学时算,可在一个学期内上完.“多元微积分”和“概率论初步”各18学时,按每周2学时,正好一个学期.这两部分内容既可以作为必修课,也可以作为选修课.

附录4给出了清华大学2003年入学的法律和新闻专业本科生的《文科数学》期终试题.4个班加上若干个重修学生,共118名学生参加了考试,结果有63人成绩在90分以上,只有2人不及格.成绩分布表明文科学生对于学习数学知识的积极性相当高,很多学生都想多学一些数学理论.

对于文科数学的教学试验以及本教材的出版,清华大学教务处、人文学院和数学系都给予了大力支持和鼓励;中文系孙殷望教授积极策划,费了不少心血.在此一并表示感谢!

本书的出版还得到了清华大学出版社刘颖先生热诚帮助,他提出了许多建设性的修改意见,并提供了不少参考资料,在此表示衷心的感谢!

本书定有许多不妥之处,敬请批评指正!

编 者

2004年5月于清华园

# 目 录

---

第 1 章 数学概观	1
1.1 文科与数学	1
1. 文学中有数学	1
2. 文学与数学相辅相成	3
3. 数学在文科领域中的应用	4
习题 1.1	5
1.2 数学的特性和本质	5
1. 数学的特性	5
2. 数学的本质	6
习题 1.2	8
1.3 数的起源与数系	8
1. 两种原始记数法	8
2. 数字的出现	9
3. 印度“0”与中国“○”	9
4. 数系	10
习题 1.3	11
1.4 数学发展的几个阶段	12
1. 数学萌芽时期(公元前 6 世纪以前)	12
2. 初等数学时期(公元前 6 世纪至 17 世纪中叶)	12
3. 变量数学时期(17 世纪中叶至 19 世纪 20 年代)	12
4. 近代数学时期(19 世纪 20 年代至二次大战)	13
5. 现代数学时期(20 世纪 40 年代以后)	13
习题 1.4	15
1.5 微积分的创建	15
习题 1.5	17

1.6 中国数学发展片断	17
1. 《周易》和组合数学	17
2. 《墨经》和《几何原本》	18
3. 《庄子》的极限思想	19
4. 孙臧和对策论	19
5. 《周髀算经》——商高定理与陈子的测量术	20
6. 《九章算术》——我国初等数学体系的形成	20
7. 《算经十书》——科举考试参考书	21
8. 赵爽的《勾股圆方图》	21
9. 刘徽的割圆术	22
10. 祖冲之的杰出贡献	22
11. 我国数学发展的鼎盛时期	23
12. 珠算与《算法统宗》	24
13. 西方数学的输入	25
14. 哥德巴赫猜想与陈景润	25
习题 1.6	26
1.7 数学命题与证明方法	27
1. 数学命题	27
2. 定理的四种形式及相互关系	27
3. 充分条件与必要条件	28
4. 定义	28
5. 常用的数学证明方法	29
6. 两个逻辑量词	31
习题 1.7	32
复习题 1	32
<b>第 2 章 函数</b>	<b>34</b>
2.1 预备知识	34
1. 集合	34
2. 绝对值	35
3. 区间与邻域	36
习题 2.1	36
2.2 函数概念与简单性态	37
1. 常量与变量	37

---

2. 函数概念 .....	37
3. 函数的表示法 .....	39
4. 反函数 .....	40
5. 函数的简单性态 .....	41
习题 2.2 .....	43
2.3 初等函数 .....	44
1. 基本初等函数 .....	44
2. 简单函数 .....	48
3. 复合函数 .....	48
4. 初等函数 .....	49
习题 2.3 .....	49
2.4 参数方程和极坐标 .....	50
1. 参数方程 .....	50
2. 极坐标 .....	51
习题 2.4 .....	55
复习题 2 .....	56
<b>第 3 章 极限与连续 .....</b>	<b>57</b>
3.1 函数的极限 .....	57
1. 极限法中的辩证思想 .....	57
2. 函数的极限 .....	59
3. 左极限与右极限 .....	61
习题 3.1 .....	62
3.2 无穷大量与无穷小量 .....	63
1. 无穷大量 .....	63
2. 无穷小量 .....	64
3. 无穷大量与无穷小量的关系 .....	64
4. 无穷小量的运算性质 .....	64
5. 无穷小量和一般极限的关系 .....	65
习题 3.2 .....	66
3.3 极限的运算法则 .....	66
习题 3.3 .....	70
3.4 两个重要极限 .....	72
1. 夹逼定理 .....	72



2. 两个重要极限 .....	72
习题 3.4 .....	76
3.5 无穷小量的比较 .....	76
1. 无穷小量的比较 .....	76
2. 等价无穷小量代换 .....	78
习题 3.5 .....	79
3.6 函数的连续性 .....	80
1. 函数的连续性 .....	80
2. 闭区间上连续函数的性质 .....	83
习题 3.6 .....	84
复习题 3 .....	85
<b>第 4 章 导数与微分 .....</b>	<b>87</b>
4.1 导数概念 .....	87
1. 两个实例 .....	87
2. 导数定义 .....	88
3. 左导数与右导数 .....	90
4. 可导与连续的关系 .....	91
5. 导数的几何意义 .....	92
习题 4.1 .....	93
4.2 函数的微分法 .....	94
1. 函数四则运算的微分法 .....	94
2. 复合函数的微分法 .....	96
3. 隐函数的微分法 .....	98
4. 基本导数表 .....	100
习题 4.2 .....	100
4.3 高阶导数 .....	102
习题 4.3 .....	103
4.4 微分 .....	104
1. 微分概念 .....	104
2. 微分运算 .....	106
3. 微分在近似计算中的应用 .....	108
习题 4.4 .....	109
4.5 微商与参数方程所表示的函数的微分法 .....	110

---

1. 微商与导数 .....	110
2. 参数方程表示的函数的微分法 .....	111
习题 4.5 .....	111
复习题 4 .....	112
<b>第 5 章 微分中值定理与导数应用</b> .....	<b>113</b>
5.1 微分中值定理 .....	113
1. 罗尔定理 .....	113
2. 拉格朗日定理 .....	116
3. 柯西定理 .....	118
习题 5.1 .....	119
5.2 洛必达法则 .....	120
1. $\frac{0}{0}$ 型的定值法 .....	120
2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型的定值法 .....	123
3. 其他未定式的定值法 .....	124
习题 5.2 .....	125
5.3 函数的单调性与极值 .....	126
1. 函数单调性的判定 .....	126
2. 函数的极值 .....	128
习题 5.3 .....	132
5.4 最大值与最小值问题 .....	133
1. 求在闭区间上连续函数最大值与最小值的方法 .....	133
2. 两种特殊情形 .....	134
习题 5.4 .....	136
5.5 曲线的凹凸性与拐点 函数作图 .....	137
1. 曲线的凹凸性与拐点 .....	137
2. 函数作图 .....	139
习题 5.5 .....	142
5.6 方程的近似解法 .....	143
1. 二分法 .....	143
2. 牛顿切线法 .....	145
习题 5.6 .....	147

复习题 5 .....	147
<b>第 6 章 不定积分</b> .....	148
6.1 原函数与不定积分 .....	148
1. 原函数概念 .....	148
2. 不定积分概念 .....	149
3. 不定积分的性质 .....	150
4. 基本积分表 .....	151
习题 6.1 .....	152
6.2 换元积分法 .....	153
1. 第一类换元法 .....	153
2. 第二类换元法 .....	157
习题 6.2 .....	160
6.3 分部积分法 .....	161
习题 6.3 .....	166
6.4 积分表的使用 .....	167
习题 6.4 .....	168
6.5 简单微分方程 .....	169
习题 6.5 .....	174
复习题 6 .....	175
<b>第 7 章 定积分及其应用</b> .....	178
7.1 定积分的概念 .....	178
1. 两个实际问题 .....	178
2. 定积分定义 .....	179
3. 定积分的几何意义 .....	182
习题 7.1 .....	183
7.2 定积分的性质 .....	183
习题 7.2 .....	187
7.3 定积分与不定积分的关系 .....	187
1. 变上限定积分 .....	188
2. 牛顿-莱布尼茨公式(微积分基本定理) .....	189
习题 7.3 .....	191
7.4 定积分的换元法 .....	193

习题 7.4 .....	195
7.5 定积分的分部积分法 .....	197
习题 7.5 .....	199
7.6 定积分的近似计算 .....	200
1. 矩形法 .....	200
2. 梯形法 .....	201
3. 抛物线法 .....	201
习题 7.6 .....	203
7.7 定积分的应用 .....	204
1. 平面图形的面积 .....	204
2. 平面曲线的弧长 .....	208
3. 旋转体的体积 .....	210
4. 引力 .....	212
5. 功 .....	213
6. 水压力 .....	214
7. 平均值 .....	215
习题 7.7 .....	216
7.8 广义积分 .....	218
1. 无穷区间上的广义积分 .....	218
2. 无界函数的广义积分 .....	221
习题 7.8 .....	223
复习题 7 .....	223
<b>第 8 章 多元函数微积分</b> .....	<b>225</b>
8.1 空间解析几何简介 .....	225
1. 空间直角坐标系 .....	225
2. 距离公式与中点公式 .....	226
3. 常见曲面及其方程 .....	228
4. 空间曲线及其方程 .....	232
习题 8.1 .....	235
8.2 多元函数 .....	235
1. 多元函数概念 .....	236
2. 二元函数的极限 .....	237
3. 二元函数的连续性 .....	239

习题 8.2 .....	240
8.3 偏导数与全微分 .....	240
1. 偏导数 .....	240
2. 高阶偏导数 .....	243
3. 全微分 .....	244
4. 多元复合函数与隐函数的微分法 .....	247
习题 8.3 .....	250
8.4 多元函数极值 最小二乘法 .....	251
1. 二元函数的极值及其判定 .....	252
2. 条件极值与拉格朗日乘法 .....	253
3. 最小二乘法 .....	257
习题 8.4 .....	259
8.5 二重积分 .....	260
1. 二重积分的概念 .....	260
2. 二重积分的性质 .....	262
3. 二重积分在直角坐标系中的计算方法 .....	263
4. 二重积分在极坐标系中的计算方法 .....	266
习题 8.5 .....	269
复习题 8 .....	271
<b>第 9 章 线性代数初步</b> .....	<b>272</b>
9.1 行列式 .....	272
1. 二阶行列式与三阶行列式 .....	272
2. 排列与逆序 .....	275
3. $n$ 阶行列式定义 .....	276
4. 行列式的性质 .....	278
5. 行列式按一行(列)展开 .....	282
6. 克拉默法则 .....	288
习题 9.1 .....	289
9.2 高斯消元法 .....	291
1. 高斯消元法 .....	291
2. 齐次线性方程组 .....	298
习题 9.2 .....	300
9.3 矩阵 .....	302

1. 矩阵概念 .....	302
2. 矩阵运算 .....	303
3. 逆矩阵 .....	310
4. 初等矩阵 .....	315
5. 矩阵的秩 .....	320
习题 9.3 .....	323
9.4 向量 .....	326
1. 向量及其线性运算 .....	326
2. 向量组的线性相关性 .....	328
习题 9.4 .....	331
9.5 线性方程组 .....	332
1. 齐次线性方程组的基础解系 .....	332
2. 非齐次线性方程组解的结构 .....	336
习题 9.5 .....	338
复习题 9 .....	339
<b>第 10 章 概率论初步 .....</b>	<b>341</b>
10.1 随机事件与样本空间 .....	341
1. 随机现象、随机试验和随机事件 .....	341
2. 基本事件与样本空间 .....	341
3. 事件之间的关系与运算 .....	342
习题 10.1 .....	344
10.2 排列与组合 .....	344
1. 两个基本原理 .....	344
2. 排列 .....	345
3. 组合 .....	346
习题 10.2 .....	348
10.3 概率 .....	348
1. 统计概率与古典概率 .....	348
2. 条件概率与独立性 .....	352
3. 伯努利概型与二项概率 .....	357
4. 全概率公式与贝叶斯公式 .....	358
习题 10.3 .....	360
10.4 随机变量的分布与数字特征 .....	363

1. 随机变量的概念 .....	363
2. 离散型随机变量的概率分布 .....	363
3. 随机变量的分布函数 .....	368
4. 连续型随机变量的概率密度 .....	369
5. 随机变量的数字特征 .....	374
习题 10.4 .....	380
10.5 正态分布 .....	382
1. 正态分布的概念与性质 .....	383
2. 正态分布的数学期望与方差 .....	384
3. 标准正态分布 .....	384
4. 一个近似公式 .....	386
习题 10.5 .....	387
复习题 10 .....	388
附录 1 不定积分表 .....	391
附录 2 泊松分布 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 的数值表 .....	402
附录 3 正态分布函数 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 的数值表 .....	404
附录 4 文科数学期终试题 .....	406
习题答案与提示 .....	408
参考书目 .....	447

# 第1章 数学概观

---

本章首先从数学与文科的关系谈起,也谈到数学与其他各个学科领域的关系,讨论数学的特点和本质,介绍数学发展简史,涉及数字的起源和中、外数学发展对比,有助于读者对数学的全面了解.然后着重介绍微积分的创建过程,微积分的出现,是数学发展史上的重要里程碑.微积分是本书的主要内容.本章最后详细介绍数学命题的概念及常用的证明方法,有助于读者对数学严谨的逻辑推理过程有个认识,也为今后的学习打下基础.

## 1.1 文科与数学

数学是人类文化的一个重要组成部分;在人类社会文化活动中,起着越来越重要的作用.过去人们认为与数学没什么关系的文科,如文学、语言学、历史学、考古学、心理学等,如今数学也能在其中起到令人信服的作用.文科学生需要提高在数学方面的素质修养,需要增强逻辑思维的能力;尤其是在电子计算机高度发展的时代,数学在文科领域内的应用日益广泛.将高等数学列入文科教学计划,是一项十分必要的措施.这一节谈谈文科和数学的关系.

### 1. 文学中有数学

字典中的字词排列严谨有序就是一种很好的数学方法;在数学中称之为字典排列法,被用来排列有序数组的先后顺序.

在我国古典名著《水浒传》中描写一百单八将,在《红楼梦》中描述贾宝玉和金陵十二钗等诸多人物的音容笑貌,行为举止,个个栩栩如生,就好像我们真的亲眼目睹一般.这正是现代发展起来的模糊数学和模式识别的雏形.

大西南人爱吃辣椒是出了名的.在曾经流行一时的《辣妹子》中,四川人说“不怕辣”,云南人说“怕不辣”,贵州人说“辣不怕”.其实这就是数学上的排列与组合,这里只是“不”、“怕”、“辣”三个字的三种排列而已.常用汉字三千多个,一句完整的话就是一些单字的一种排列.英文字母 26 个,每个英文单词就是若干个字母的一种排列.

白居易诗曰:



琴诗酒友皆抛我,雪月花时最忆君.

其句型的结构可以用数学公式

$$(A+B+C)M=AM+BM+CM$$

表示出来.在上句中, $A, B, C$ 分别表示“琴友”、“诗友”、“酒友”, $M$ 表示“我”,乘积表示“抛弃”;在下句中, $A, B, C$ 分别表示“下雪时”、“月明时”、“花开时”, $M$ 表示“君”,乘积表示“最想念”.等式左端是诗句的句型,等式的右端是诗句的分解意义.

在一些对联、诗词中巧用数字是常见的事,这样使得这些文学作品更加脍炙人口,令人印象更加深刻.且看几例.

**例 1.1** 1952年,新中国首次派科学家代表团出国访问,成员中有著名科学家钱三强、茅以升、华罗庚、赵九章等人.在飞机上闲着无事,华罗庚看看钱三强和赵九章,突发灵感,脱口说出了个上联:

三强韩赵魏

让大家对下联.虽然在座的都是学富五车的人物,也都想到下联中应该有李四光或赵九章的大名出现,可一时也难以完整地对出下联来.华罗庚笑指赵九章,道出下联:

九章勾股弦

上联中的韩赵魏是战国时期(公元前475年—公元前221年)的三个强国.下联中的勾股弦表示直角三角形的三条边,这里是指勾股定理.勾股定理是我国古代数学名著《九章算术》的研究内容之一.上下联对仗工整,天衣无缝,堪称绝对.

这副对联只有一对数,有的对联可以有好几对数,甚至全由数对组成.

**例 1.2** 郑板桥是清代乾隆年间的文学家和书画家.他在山东潍坊任县令时,一年春节,他与朋友外出,在南门外见到这样一副春联:

二三四五

六七八九

横批是“南北”二字.他赶紧回衙取了一些粮食和衣物,给这户人家送去.朋友忙问:“你怎么知道他家就没有这些东西呢?”郑板桥回答:“对联上都写着啦.上联缺一(衣),下联少十(食),横批只有南北,没有东西.”当他们敲开这家门时,果然这一家大小都挤在一张破床上,衣单灶冷,全无一点过年的气氛.见此情景,朋友十分佩服郑板桥的洞察才能和体惜民情的作风.

**例 1.3** 幼时读过一首古诗:

一去二三里,

烟村四五家.

亭前六七树,

八九十枝花.

句句有数字,一环扣一环,朗朗上口,几十年过去了,仍记忆犹新.