金榜考研成功
系列丛书

2005年全国
硕士研究生入学考试用书

数学
基础过关660题

理工类

主编/李永乐

新华出版社

2005年全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关660题

（理工类）

主　编：李永乐

编　者：（按姓氏笔画）

北京科技大学　申亚男

清　华　大　学　刘庆华

清　华　大　学　李永乐

北京交通大学　赵达夫

东北财经大学　龚兆仁

新　华　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

数学基础过关 660 题(理工类)/李永乐主编. - 北京:
新华出版社,2004.2
(2005 年全国硕士研究生入学考试用书)
ISBN 7 - 5011 - 6552 - 1

Ⅰ.数... Ⅱ.李... Ⅲ.高等数学 - 研究生 - 入学
考试 - 习题 Ⅳ.013 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004603 号

敬告读者

本书封面粘有策划者专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,请读者注意识别。

2005 年全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关 660 题(理工类)

主编:李永乐

*

新华出版社出版发行

(北京石景山区京原路 8 号 邮编:100043)

新华出版社网址:http://www.xinhuapub.com

中国新闻书店 (010)63072012

新华书店总经销

北京机工印刷厂印刷

787 毫米×1092 毫米 16K 22 印张 536 千字

2004 年 2 月第 1 版 2004 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7 - 5011 - 6552 - 1/G·2383 定价:30.00 元

若有印装质量问题,请与印刷厂联系(010)82570299

第二版前言

本书自去年7月出版以来，已加印三次，此次再版最大的变化是改变 为理工与经济各一册（均各为660题），这样题目更丰富，更贴近考试大纲对基础知识、概念、方法的要求，提高了考生对题目的有效利用率。除了补充、更换、编写了一些新题之外，有的题还增加了新的解法，对于同学不太好理解，或不大注意的地方，在评注中增加了较多的题外话。

为了把每个知识块复习好，建议同学把填空题与选择题中对应的知识点结合在一起复习。希望本书的修订再版，能对同学们的复习备考有更大帮助。

编　者

2004年2月

前 言

本书是为报考硕士研究生的考生编写的数学复习备考用书，适合于数学一至数学四4个卷种，内容包括高等数学（微积分）、线性代数、概率论与数理统计。题型为填空题与选择题。注意，2004年卷子结构改变为：8个选择题，6个填空题，9个解答题，其中选择、填空共56分，解答94分。

硕士研究生入学考试的性质是“具有选拔功能的水平考试”，在强调选拔、强调能力考查的时候，并不意味着要削弱对基础知识和基本理论的要求，“考查考生对基础知识的掌握程度，是数学考试的重要目标之一”。近几年来，相当一部分考生在答题中的一些失误，恰恰是对大纲中规定的基本概念、基本原理、基本方法的理解与掌握上存在某些偏差欠缺，甚至有所偏废所致。如果基本的数学方法没掌握，定理公式不熟悉，势必在知识点的衔接与转换上会有各种障碍，那么思维水平和创造意识亦将受到影响。

不论是数学基本理论的建立，还是数学运算或逻辑推理的进行，无一不是以明确、清晰的概念为基础。考生要重视对概念的复习，应当从不同的角度，不同的侧面进行思考，准确地把握住概念的内涵，注意相关概念的联系与区别，否则解题时思维上就会出现疑惑与混乱，方法上也就会有种种谬误。

数学离不开计算，考研也非常重视对计算能力的考查。因此，考生复习时要注意提高运算能力，要提高计算的准确性，不仅要动脑而且要动手，不能华而不实，眼高手低，丢三拉四，总犯“低级”错误。

是否具有较为扎实的基础知识和基本理论，是培养、提高分析问题与解决问题能力的基础，我们正是在认真研究历年试题的基础上，对考试的重点、难点加以分解剖析，对考生常出的错误归纳整理，我们用化整为零各个击破以及基础与综合相结合的方法，用点面结合，抓住基础突出重点的方法，设计出不同解题思想层次的习题整合成书。期望能帮助同学搞清概念、搞清原理、搞清方法，只有基础过关在考试中才能取得好成绩。同学们在使用本书时，最好能先自己动手想与算，不要急于看解答，评注中的一些题外话亦值得细心揣摩。

研究生考试科目从2003年调整之后，数学科的权重在原有基础上增加了50%，因此与往年相比，数学成绩对总分将有更大的影响，数学科的地位愈显重要，同时由于数学科本身的特点，考生的数学成绩历来相关较大，这说明数学科的考试选拔性质更加突出。因此，希望考生们要根据考试大纲认真踏实全面系统地复习，心态要平和，戒浮燥，要循序渐进，不断积累步步提高，面对激烈的竞争，望有志者抓紧抓细抓早。

本书也可供大专院校的学生在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计时参考。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编 者

2003年7月

目　录

第一部分　填空题

§　高等数学(微积分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}-x & x\leqslant 1\\ 3+x & x>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^3 & x\leqslant 1\\ 2x-1 & x>1\end{cases}$

则　$\lim\limits_{x\to 1}f[g(x)]=$ ________.

【答案】　不存在.

【分析】　$f[g(x)]=\begin{cases}-g(x) & g(x)\leqslant 1\\ 3+g(x) & g(x)>1\end{cases}=\begin{cases}-x^3 & x\leqslant 1\\ 3+(2x-1) & x>1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to 1^+}[3+(2x-1)]=4$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x^3)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f[g(x)]\neq\lim\limits_{x\to 1^-}f[g(x)]$

因此　$\lim\limits_{x\to 1}f[g(x)]$不存在.

2. 设 $a_k=\cos\dfrac{x}{2^k}$，$A_n=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n(n=1,2,\cdots)$　则　$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=$ ________.

【答案】　$\dfrac{\sin x}{x}$.

【分析】　$A_n=\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}$

$$=\frac{\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin x\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin x\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}}{2^2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}$$

$$= \cdots = \frac{\sin x \cdot \cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n}}$$

$$= \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n \cdot \frac{x}{2^n} = x$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}$

【评注】 在计算极限时，要注意极限过程，在本题求极限过程中，应把 x 看作常数.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}} =$ ______,
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}} =$ ______.

【答案】 3,1

【分析】 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$= \frac{2+1}{1} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$= \frac{-2+1}{-1} = 1$$

【评注】 求本题极限时，要注意 $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

4. $\lim\limits_{x \to 0}(\cos 2x + \sin 3x)^{\cot 5x} =$ __________.

【答案】 $e^{\frac{3}{5}}$

【分析】 $\lim\limits_{x \to 0}(\cos 2x + \sin 3x)^{\cot 5x}$

$$= \lim_{x \to 0}[1 + (\cos 2x + \sin 3x - 1)]^{\frac{\cot 5x}{\cos 2x + \sin 3x - 1}(\cos 2x + \sin 3x - 1)}$$

而 $\lim\limits_{x \to 0}\cot 5x \cdot (\cos 2x + \sin 3x - 1)$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{\cos 2x - 1 + \sin 3x}{\sin 5x} \cdot \cos 5x$$

$$= \left(\lim_{x \to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin 5x} + \lim_{x \to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}\right) \cdot \lim_{x \to 0}\cos 5x$$

$$= \left(0 + \frac{3}{5}\right) \times 1 = \frac{3}{5}$$

于是 $\lim\limits_{x \to 0}(\cos 2x + \sin 3x)^{\cot 5x} = e^{\frac{3}{5}}$

【评注】 所要计算的极限属“1^∞”时，通常利用重要极限 $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 计算 .

5. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}\right)^{\frac{1}{x}} =$ __________

【答案】 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

【分析】 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}}$

而 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x} = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left[1 + \left(\dfrac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x} - 1\right)\right]$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x} - 1\right) = \lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{2^{x^2}+3^{x^2}-2^x-3^x}{2^x+3^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2^x+3^x}\left(\frac{2^{x^2}-1}{x}+\frac{3^{x^2}-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}-\frac{3^x-1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\ln 2}{x}+\frac{x^2\ln 3}{x}-\frac{x\ln 2}{x}-\frac{x\ln 3}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 6$$

所以，原式 $= e^{-\frac{1}{2}\ln 6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

【评注】 所要计算的极限属"1^∞"型时，也可将极限改写为如下形式计算起来较为简单．

$\lim u^v = e^{\lim(u-1)\cdot v}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}} =$ ________.

【答案】 $\dfrac{1}{n!}$

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{(\cos x-1)+1})(1-\sqrt[3]{(\cos x-1)+1})\cdots(1-\sqrt[n]{(\cos x-1)+1})}{(1-\cos x)^{n-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{(\cos x-1)+1}}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{(\cos x-1)+1}}{1-\cos x}\cdot\cdots\cdot\frac{1-\sqrt[n]{(\cos x-1)+1}}{1-\cos x}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

【评注】 由 $x\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$，有当 $x\to 0$ 时，$1-\sqrt[n]{(\cos x-1)+1}\sim-\dfrac{1}{n}(\cos x-1)$．

7. 设 $a>0, a\neq 1$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}) = \ln a$，则 $p =$ ________.

【答案】 2

【分析】 $a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}} = a^{\frac{1}{x}}(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)$ 当 $x\to+\infty$ $a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\sim\dfrac{\ln a}{x(x+1)}$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}) = \lim\limits_{x\to+\infty}x^p a^{\frac{1}{x}}\dfrac{\ln a}{x(x+1)}$

$$= \ln a\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x(x+1)}$$

$$= \ln a \quad (\text{当 } p = 2 \text{ 时})$$

【评注】 容易看出：当 $p<2$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}) = 0$，当 $p>2$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}) = +\infty$．

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}=$ ________.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\tan x-\sin x}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

上式最后一步利用 $x\to 0$ 时 $e^{\tan x-\sin x}-1\sim\tan x-\sin x$.

【评注】 在计算极限时，正确利用等价无穷小的代换定理能简化计算.

常遇到的等价无穷小有：

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$a^x-1\sim x\ln a$ $(a>0)$，$\ln(1+x)\sim x$.

9. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

【答案】 e^2

【分析】 把 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$ 改写为指数形式：$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}}=e^3$

由此得 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=3 \qquad (1)$$

当 $x\to 0$ 时，分母为无穷小，所以分子也为无穷小，因此，当 $x\to 0$ 时

$\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)\sim x+\dfrac{f(x)}{x}$，所以(1)可写为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=3$.

因此 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2.$$

于是 $$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$$

10. 设 $a_1,a_2,\cdots a_m$ 为正数($m\geqslant 2$),则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=$ ______.

【答案】 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$.

【分析】 不妨设 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}=a_1$

则 $a_1\leqslant(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant a_1 m^{\frac{1}{n}}$

令 $n\to\infty$, $m^{\frac{1}{n}}\to 1$,由夹逼定理

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=a_1$(即 $\max\{a_1,a_2\cdots a_m\}$)

11. $[x]$ 表示 x 的最大整数部分,则 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{2}{x}\right]=$ ______.

【答案】 2

【分析】 $\frac{2}{x}-1<\left[\frac{2}{x}\right]\leqslant\frac{2}{x}$

因此,当 $x>0$ $\quad 2-x<x\left[\frac{2}{x}\right]\leqslant 2$

当 $x<0$ $\quad 2\leqslant x\left[\frac{2}{x}\right]<2-x$

又 $\lim\limits_{x\to 0}(2-x)=2$.

于是 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{2}{x}\right]=2$.

【评注】 上一题和本题都是利用夹逼定理求极限,解这一类题的关键是要找出两个特殊的数列(或函数),这要求我们熟练掌握一些常用的数列(或函数)的极限.

12. 设 $\{a_n\}$ 为数列, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, $|q|<1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ______.

【答案】 0

【分析】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|<1$,所以数列 $|a_n|$ 是单调减少的,又 $|a_n|\geqslant 0$,由单调有界数列收敛定理推出 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ 存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=a$,则 $a=0$,若不然, $a\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{a}{a}=1$,这与 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|<1$ 矛盾.

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

【评注】 运用这一结果,可求出以下函数的极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n}{n!}=0$ 等.

13. 设$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-f(0))=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)-f(-x)|=$ ______.

【答案】 0

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}[(f(x)-f(0))+f(0)]=f(0)$

由函数在一点连续的定义得$f(x)$在$x=0$处连续

因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(-x)=f(0)$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)-f(-x)|=|\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-f(-x))|$

$=|f(0)-f(0)|=0$

14. 设函数$f(x)$在$x=1$连续,且$f(1)=1$则$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln[2+f(x^{\frac{1}{x}})]=$ ______.

【答案】 ln3

【分析】 先求出$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$

由函数的连续性得$\lim\limits_{x\to\infty}f(x^{\frac{1}{x}})=f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln[2+f(x^{\frac{1}{x}})]=\ln 3$

15. 函数$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$的间断点及类型是______.

【答案】 $x=\pm 1$是$f(x)$的第一类间断点

【分析】 分别就$|x|=1$, $|x|<1$, $|x|>1$时求极限

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$,得出$f(x)$的分段表达式:

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|>1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|<1\end{cases}$$

在$|x|=1$处,由$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1\neq\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$

$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=-1\neq\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=1$

得 $\lim\limits_{x\to\pm 1}f(x)$不存在.

所以,$x=\pm 1$ 为$f(x)$的第一类间断点.

16. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\arctan(1+x^n)$,则$f(x)$的定义域是______,$f(x)$的间断点是

______________.

【答案】 $(-1,+\infty), x=1$

【分析】 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4} & x\in(-1,1)\\ \arctan 2 & x=1\\ \dfrac{\pi}{2} & x\in(1,+\infty)\end{cases}$

由 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\dfrac{\pi}{2}\neq\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\dfrac{\pi}{4}$,得 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点.

【评注】 在解本题时要注意 $x\leqslant-1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n$ 不存在,及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

17. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\ln(1+2x)}{x}+b & x>0\\ a & x=0\\ \dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{1}{x^2} & x<0\end{cases}$

则 $a=$ ______________, $b=$ ______________ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【答案】 $\dfrac{1}{3},-\dfrac{5}{3}$

【分析】 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,必须使 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$.

而 $$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+2x)}{x}+b\right]$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2e^{-\frac{2}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+2x)}{x}+b\right]$$

$$=0+\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{x}+b=2+b$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{x+\sin x}{x}=2\lim_{x\to0^-}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0^-}\frac{1-\cos x}{3x^2}=2\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

所以,应有 $2+b=\dfrac{1}{3}$ 及 $a=\dfrac{1}{3}$,因此,当 $a=\dfrac{1}{3}, b=-\dfrac{5}{3}$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

18. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, $f(0)=1$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,并满足 $f(2x)=f(x)$,则在 $(-\infty,+\infty)$ 上, $f(x)=$ ________.

【答案】 1

【分析】 只需证明 $x\in(-\infty,+\infty)$, $f(x)\equiv f(0)$. 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$ $x\neq 0$,由 $f(2x)=f(x)$ 可得

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)=\cdots=f\left(\frac{1}{2^n}x\right)$$

在上式中,令 $n\to+\infty$,由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{2^n}x\right)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}x\right)=f(0)$,因此有 $f(x)=f(0)=1$.

【评注】 注意极限过程, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=f(x)$.

19. 若 $f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ $g'(0)=g(0)=0$,则 $f'(0)=$ ________.

【答案】 0

【分析】 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)\sin\frac{1}{x}}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{[g(x)-g(0)]\sin\frac{1}{x}}{x}=0$$

在上式中,因 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=0$,又 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界量,无穷小量与有界量的乘积为无穷小量,因此,答案为零.

【评注】 求分段函数在分段点处的导数时一般要用定义来求,或函数在分段点连续的条件下求导数的极限. 即用下面定理求分段函数在分段点的导数: (1) $f(x)$ 在 x_0 处连续; (2) $f(x)$ 在 x_0 的某空心领域内可导, (3) $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在,则 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$

但就本题而言,就不能用上述定理,因题设中没有"$g'(x)$ 在 $x=0$ 的某空心领域内存在"的条件.

20. 设 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$,则 $f'(x)=$ ________

【答案】 $\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x(1+x)} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

【分析】 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=\left[e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e\right]'$$

$$=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)'$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e]'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{2x}$$

$$=-\frac{e}{2}$$

【评注】 (1) 求幂指函数 $[u(x)]^{v(x)}$ 的导数，可化为对 $e^{v(x)\ln u(x)}$ 求导，或用对数求导法.

(2) 解本题时，(1) 式到 (2) 的过程必不可少，即先用求极限的乘法运算法则，再对 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$ 利用罗比塔法则，若直接对 (1) 式利用罗比塔法则，又遇到求幂指函数 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的导数，计算会越来越复杂.

21. 设函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，又 $F(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(1-\cos x)}{\tan x^2}=$ ______.

【答案】 $\frac{1}{2}F'(0)$

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(1-\cos x)}{\tan x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(1-\cos x)-F(0)}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(1-\cos x)-F(0)}{1-\cos x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$$

$\underline{\underline{\text{令 } 1-\cos x = u}} \frac{1}{2}\lim\limits_{u\to 0}\frac{F(u)-F(0)}{u} = \frac{1}{2}F'(0)$

22. $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,且 $f(a)\neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x =$ ________.

【答案】 $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$

【分析】 所求极限属"1^∞"型不定式,可化为:$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln f\left(a+\frac{1}{x}\right)-\ln f(a)\right]}$

而 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln f\left(a+\frac{1}{x}\right)-\ln f(a)\right]$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln f\left(a+\frac{1}{x}\right)-\ln f(a)}{\frac{1}{x}} \xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t} \lim_{t\to 0}\frac{\ln f(a+t)-\ln f(a)}{t}$$

$$= [\ln f(x)]'\Big|_{x=a}$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)}\Big|_{x=a}$$

$$= \frac{f'(a)}{f(a)}$$

于是所求极限为 $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

【评注】 (1) 本题也可用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ 计算。

(2) 在上面的解法中,假定 $f(a)>0$,如果 $f(a)<0$,则令 $g(x)=-f(x)$,先求出 $\left[\frac{g\left(a+\frac{1}{x}\right)}{g(a)}\right]^x = e^{\frac{g'(a)}{g(a)}}$,再代回 $f(x)$ 即可。

(3) 下面方法是错误的:$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln f(a+t)-\ln f(a)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{f'(a+t)}{f(a+t)}}{1} = \frac{f'(a)}{f(a)}$,这是因为题设中没有 $f'(x)$ 在 $x=a$ 连续,就不一定有 $\lim\limits_{t\to 0}f'(a+t)=f'(a)$ 成立.

23. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} x^2\arctan\frac{1}{x} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ \ln(1+x^2) & x>0 \end{cases}$, $f(x)$ 可导,则 $\frac{d}{dx}f[\varphi(x)] =$ ________.