丘成桐主编

数学翻译丛书

# 初等几何的著名问题

# Famous Problems of Elementary Geometry


Felix Klein

沈一兵 译



高等教育出版社

Higher Education Press

丘成桐主编
数学翻译丛书

# 初等几何的著名问题

# Famous Problems of Elementary Geometry

■ Felix Klein
■ 沈一兵 译

高等教育出版社
Higher Education Press

International Press

**图书在版编目（CIP）数据**

初等几何的著名问题/（德）克莱因（Klein,F.）；
沈一兵译. —北京：高等教育出版社，2005.7
（数学翻译丛书/丘成桐主编）
书名原文：Famous Problems of Elementary Geometry
ISBN 7-04-017389-1

Ⅰ.初… Ⅱ.①克… ②沈… Ⅲ.初等几何-数学
问题 Ⅳ.0123

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 061235 号



**策划编辑** 张小萍 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波
**责任绘图** 尹文军 **责任印制** 韩 刚

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| 经　　销 | 北京蓝色畅想图书发行有限公司 | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 印　　刷 | 高等教育出版社印刷厂 | | http://www.landraco.com.cn |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2005年7月第1版 |
| 印　　张 | 6.25 | 印　　次 | 2005年7月第1次印刷 |
| 字　　数 | 85 000 | 定　　价 | 15.00元 |



**物料号　17389-00**

# 《数学翻译丛书》序

改革开放以后，国内大学逐渐与国外的大学增加交流．无论到国外留学或邀请外地学者到中国访问的学者每年都有增长，对中国的科学现代化都大有帮助．但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多．基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写，有些已经比较陈旧，追不上时代了．很多国家，例如俄罗斯、日本等，都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容，对数学的研究都大有裨益．高等教育出版社和海外的国际出版社有见及此，开始计划做有系统的翻译，由王元院士领导，北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作．参与的教授很多，有杨乐院士，刘克峰教授等等．我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学，丰富他们的知识．海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助，我们谨此鸣谢．

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005 年 1 月

# 前 言

由现代数学发展起来的更精确定义和更严格证明方法，在中学教师看来，既深奥难懂又极其抽象，因而只对少数专家来说有意义．为了应对这种倾向，我很高兴从去年夏天开始，在一系列讲座中，向比以往更多的听众讲解了现代科学如何看待初等几何作图的可能性．前不久，我有机会在Göttingen的复活节假日课程中介绍了这些讲座的梗概．听众似乎很感兴趣，夏季学期的经历也证实了这一点．恰好数学教学与自然科学促进协会在Göttingen开会，所以我斗胆在会上做了关于我讲座的一个简要说明．这个说明是由欧洲数学会的O. Tägert准备的，他参加了刚才提到的那次假日课程．他手中还有几个夏季学期的学生在我指导下写的讲座笔记．我希望这本拙作能为推动该协会的有益工作而做些贡献．

F. KLEIN

Göttingen, 1895年复活节

# 英译者前言

在德国数学教学与自然科学促进协会的Göttingen会议上，F. Klein教授用现代科学研究的观点，讨论了著名的古代三大几何问题（倍立方，三等分角，圆的求积）.

此举是为了将大学数学研究与中学数学教学更紧密地结合起来. Klein教授在这方面很可能取得了成功，因为该协会对他的讲座给予好评，各教育刊物一致推荐，其法译本和意大利译本也已问世.

本书对问题的论述简明易懂，读者甚至不需要微积分知识. 本书解答了如下的问题：在什么情况下几何作图是可能的？用什么手段可实现几何作图？什么是超越数？如何证明 e 和 π 是超越数？

由于相信这样一本重要著作的英译本能吸引许多无法阅读原著的读者，出版社关于进行翻译的要求很快得到了 Klein 教授的首肯.

笔者在准备阶段参考了 Algiers 的 J. Griess 教授的法译本，遵循了其中的合理修改.

笔者还感谢 Ziwet 教授对译文的润色及校样.

W. W. BEMAN

D. E. SMITH

1897 年 8 月

# 编者前言

Klein 的小书在 35 年前出版后的三年内，已被翻译成英文、法文、意大利文和俄文[1]. 在美国，它满足了多年来的强烈需求，不少教师对这本著作的脱销感到遗憾. 没有一本著作能像它一样，以如此简练的形式提供完备的信息. 所以，应广大读者要求，我们纠正第一版中的某些笔误，添加注释以丰富内容，再次刊出新版.

此版中的修正以及注解，基本上与我在 1914 年《美国数学月刊》上发表的文章中所修订的摘录相同[2]. 在此感谢编辑允许再次发表这些材料.

R. C. ARCHIBALD

1930 年 2 月

[1]法文版： Griess, 1896, Paris, Nony; 意大利文版： Giudice, 1896, Turin, Rosenberg e Sallier；俄文版： Parfentiev, Sintsov, 1898, Kazan．最后这个俄文版似乎没有让 Klein 论文集的编辑部知道（见 Vol.3, 1923, p.28）.

[2]Remarks on Klein's "Famous Problems of Elementary Geometry", Vol.21, 247~259.

# 郑 重 声 明

# 目　录

# 引 言

本教程起因于我想让大学的数学研究更紧密地联系中学的需要. 尽管如此, 这并不是针对初学者的, 因为讨论的东西是用比中学更高的观点来处理的. 另一方面, 我们假定读者做了一点准备, 并具有数学分析的初步知识, 例如, 指数函数的幂级数展开.

我们打算论述一些几何作图问题, 并且我们的目标不是去寻求每个问题的适定解, 而更多地是要确定求解的 *可能* 或 *不可能* 性.

下面三个问题是古代研究较多的对象, 将有着特别的重要性. 它们是:

**1.** *倍立方问题* (也称为 Delian问题);

**2.** *任意角的三等分*;

**3.** *圆的求积*, 即 $\pi$ 的作图.

在所有这些问题中, 古人试图用直尺和圆规来求解, 结果却是徒劳一场. 这些问题之所以著名, 主要是由于它们的求解似乎需要运用更高等的工具. 事实上, 我们将要证明这种尺规求解是不可能的.

尺规求解第三个问题的不可能性最近才被证明. 而第一和第二个问题的不可能性的证明则隐含在当今高等代数论文中发表的 Galois 理论中. 另一方面, 除了 Petersen 的教材, 我们还没有找到其他的初等形式的清晰证明, 这个教材在其他方面也值得借鉴.

首先, 我们必须强调 *实际* 作图和 *理论* 作图的区别. 例如, 如果我们需要一个圆度盘作为测量工具, 那么我们只要简单地去试制它. 在理论上, 早期人们认为一个圆能够 (即用直尺和圆规) 被分成若干等

份，份数只是 $2^n$ 、 3 、 5 以及它们的乘积. 后来 Gauss 增加了其他情形，他证明了当 $p$ 为形如 $p=2^{2^\mu}+1$ 的素数时将圆 $p$ 等分的可能性，以及对所有其他数的不可能性. 这些结果并没有实际的优越性；Gauss的进展的意义是纯理论的. 本教程的所有讨论，其意义亦然.

我们的基本问题也许可以这样叙述：*哪些几何作图在理论上是可能的，而哪些又是不可能的？* 为了确切地定义“作图”一词的意思，我们必须指明在每种情形下所要用的工具. 我们将考虑：

**1.** 直尺和圆规；

**2.** 仅仅圆规；

**3.** 仅仅直尺；

**4.** 与直尺和圆规有联系的其他工具.

惊讶之处是初等几何没能对此问题提供解答. 我们必须求助于代数和高等分析. 随之产生的问题是：我们如何用代数和分析的语言来描述直尺和圆规的作图？因为初等几何并不像后两类学科，它没有一般的方法，更没有 *算法* ，所以这种新的处理方法就变得十分必要.

在分析中，我们首先有 *有理* 运算：加、减、乘、除. 借助于比例方法，这些运算可以几何地直接实施在两给定线段上. 如果在除法和乘法的情形，我们要引入一个辅助的单位线段.

进而，分析中也有 *无理* 运算，细分为 *代数的* 和 *超越的* 运算. 最简单的代数运算是开平方和开高次方，以及没有求根公式的代数方程的求解，比如五次和更高次的代数方程. 众所周知，通过一般的有理运算和仅含平方根的无理运算，我们就可以得到 $\sqrt{ab}$ 的作图. 另一方面，每个 *单独* 的几何作图(它可以化为两直线之交，或直线与圆之交，或两圆之交) 等价于有理运算或开平方运算. 所以，对于更高次的无理运算，作图求解是不可能的，*除非我们可以找到借助平方根来实现这种运算的方法*. 显然，在所有这些作图问题中运算次数必须是有限的.

至此，我们可以叙述下面的基本定理：

*一个解析表达式能用直尺和圆规作图的充要条件是该式可以由某些已知量通过有限次的有理运算和开平方得到.*

因此，如果我们想要证明一个量不能用尺规作图出来，我们必须证明相应的方程不能通过有限次开平方来求解.

当所讨论的问题没有相应的代数方程时，作图求解 *当然* 是不可能的. 不满足任何代数方程的表达式被称为超越数. 我们将证明，对于数 $\pi$ 就会出现这种情况.

# 第一部分

# 代数表达式的作图可能性

# 第一章

# 可用平方根求解的代数方程

下面一些取自代数方程理论的命题，读者可能已经知道，但为了获得清晰的思路，我们将给出简要的证明.

*如果一个量 $x$ 只与有理式及平方根有关，那么它是一个不可约方程 $\phi(x)=0$ 的根，这个方程的次数是 2 的幂.*

**1.** 为了对量 $x$ 的结构有一个清楚的概念，例如，可设为如下形式

$$x=\frac{\sqrt{a+\sqrt{c+ef}}+\sqrt{d+\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{p+\sqrt{q}}{\sqrt{r}},$$

其中 $a,b,c,d,e,f,p,q,r$ 是有理式.

**2.** 在 $x$ 的任一项中，重叠根号的次数称为该项的*阶数*；上式中含有阶数为 $0,1,2$ 的项.

**3.** 用 $\mu$ 表示*最大阶数*, 使得任一项中的重叠根号的次数都不超过 $\mu$.

**4.** 在例子 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 中，我们有三个一阶项，但它又可以写成

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3},$$

因而它实际上只有两个不同的项.

*我们将假设：$x$ 的一切项都做了上面那种分解，使得在 $n$ 个 $\mu$ 阶项中，没有一个可以由其他 $n-1$ 个 $\mu$ 阶项或低阶项来有理地表示.*

对于 $\mu-1$ 阶项或更低阶的项，无论它是显式还是隐式，我们也将作同样的假设. 这个假设显然是十分自然的，并且在后面的讨论中是极其重要的.

**5. $x$ 的正规形式.**

如果表达式 $x$ 是一些不同分母的项之和，则我们可以通分化简，使得 $x$ 成为两个整函数的商.

假设 $\sqrt{Q}$ 是 $x$ 中的 $\mu$ 阶项；由于 $\mu$ 是最大阶数，所以它只能以显式出现. 又因为 $\sqrt{Q}$ 的幂可以表示成 $\sqrt{Q}$ 和 $Q$ 的函数，其中 $Q$ 是低一阶的项，故我们可以令

$$x=\frac{a+b\sqrt{Q}}{c+d\sqrt{Q}},$$

其中除了低阶项外，$a,b,c,d$ 至多包含 $n-1$ 个 $\mu$ 阶项.

对分式的上下同时乘以 $c-d\sqrt{Q}$，则 $\sqrt{Q}$ 从分母中消失，我们就有

$$x=\frac{(ac-bdQ)+(bc-ad)\sqrt{Q}}{c^2-d^2Q}=\alpha+\beta\sqrt{Q},$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 至多包含 $n-1$ 个 $\mu$ 阶项.

对于第二个 $\mu$ 阶项 $Q_1$，用同样方法处理，我们有 $x=\alpha_1+\beta_1\sqrt{Q}_1$，以此类推.

*所以，$x$ 可化为只在分子中含有给定的 $\mu$ 阶项的形式，并且关于每个 $\mu$ 阶项都是线性的.*

然而，我们注意到，由于 $\alpha$ 和 $\beta$ 仍与 $n-1$ 个 $\mu$ 阶项有关，故可能出现 $\mu$ 阶项的乘积. 于是我们可置

$$\alpha=\alpha_{11}+\alpha_{12}\sqrt{Q_1},\qquad \beta=\beta_{11}+\beta_{12}\sqrt{Q_1},$$

从而有

$$x=(\alpha_{11}+\alpha_{12}\sqrt{Q_1})+(\beta_{11}+\beta_{12}\sqrt{Q_1})\sqrt{Q}.$$

**6.** 对于在 $Q,Q_1,\cdots$ 等项中显式出现的那些 $\mu-1$ 阶项，我们用类似的方法处理，使得每个量都变成 $\mu-1$ 阶项的整线性函数. 然后我们继续对更低阶的项做同样的事情，最后得出 $x$ 或 $x$ 的各个不同阶的项，都被表示成单个根式的有理整线性函数的显式. 这时我们就说 $x$ 化成了*正规形式*.