第四次修订版

走向清华北大

同步导读

丛书主编　希　扬

主　　编　戴佳珉

高一数学

（上）

龍門書局

www.Longmen.com.cn

走向清华北大·同步导读

（第四次修订版）

高一数学（上）

主编　戴佳珉
编者　戴佳珉　[illegible]庆
　　　周鸿生

主编寄语

清华北大是科学家的摇篮——上清华北大，高中阶段强势准备，蓄势待发。

——希扬

龍門書局
北京

图书在版编目(CIP)数据

走向清华北大同步导读.高一数学.上/希扬主编;戴佳珉分册主编.—修订版.—北京:龙门书局,2004

ISBN 7-80111-971-1

Ⅰ.走…　Ⅱ.①希…②戴…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 006714 号

责任编辑:曾晓晖　夏少宁

封面设计:郭　建

龍 門 書 局 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

http://www.longmen.com.cn

世界知识印刷厂 印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2000 年 6 月第　一　版　　开本:890×1240　A5

2004 年 6 月第四次修订版　　印张:8 1/4

2004 年 6 月第十三次印刷　　字数:280 000

印数:296 001-356 000

定　价:10.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

品牌越世纪，书香二百年

——《走向清华北大·同步导读》序

“我要上清华！”“我要上北大！”这是时代的强音，是立志成才报效祖国的莘莘学子发自心底的呼声。1998 年，在文教图书界享有盛誉的龙门书局应时推出了鼓舞人心、大气凝重的《走向清华北大·高考阶梯训练》丛书，在强手如林、竞争激烈的图书市场异军突起，好评如潮。丛书主编曾应邀在北京图书大厦及全国各大城市中心书店签名售书，又掀起一股股小波澜。

2000 年，为了响应教育部全面推行素质教育、培养创新人才的号召，龙门书局又隆重推出了《走向清华北大·高考阶梯训练》丛书的姊妹篇——《走向清华北大·同步导读》丛书。

《走向清华北大》以她特有的风采，风风火火地走过了六个春秋，其销售量已达 60 余万套，她响亮的名字给人以鼓舞、她厚重的内容给人以自信、她所激发的灵感给人以无穷的智慧。莘莘学子因为有了她步入了理想的殿堂——圆梦重点高中、重点大学。

这套与现行教材同步的丛书，以能力培养为目的，以教育部最新教改精神为准绳，以最新教材为依据，精心编纂，自成一家。她具有“三名”“一新”的显著特色。

“三名”即名家策划、名师主笔、名社出版。

为了编纂一套高质量的教辅书，以便为全国重点院校培养更多人才，龙门书局特邀了教育界有影响的专家学者研究、策划，并编制蓝图与提纲；又聘请了多位工作在教学第一线的“高分老师”，尤其聘请了辅导高考卓有成效，每年都为清华北大等名校输送很多新

生的特、高级教师撰稿；再由久负盛名的龙门书局出版，构成了本书的“三名”特色。

“一新”即体例新，使本书别具一格，书香四溢。

在铺天盖地的教辅书世界里，最难作假，最逃不过读者明眼的，应该是书的质量。龙门书局在广泛调查文教图书市场之后，引发了新的思考，在博采众长的基础上，设计了科学、高效、实用、创新的新体例。同时，将试题中基础题、中等题和难题的比例设计为5:3:2，以便拉开档次，使高材生脱颖而出。60余万套的销量正是这套丛书质量的体现。

2004年新版的《走向清华北大·同步导读》丛书，新增与课标本配套的七、八年级语文、数学，能够满足更多的学生对知识的渴求，请接受她的爱吧，您的学习将因为有她而变得更加精彩。

希　扬

修订版前言

2004年是教育改革和教材改革力度最大的一年,中学教材进行了较大的改革和更新。《走向清华北大·同步导读》紧跟教改形势,保持了与现行最新教材同步到节(课)的特点,以全新的教学理念指导丛书的全面修订与内容更新,必将成为广大中学生不可多得的教学辅导用书。

丛书发行五年来,销量已达数十万套,颇受广大读者欢迎与厚爱。此次修订在保持内容的新颖性、同步性的基础上,对丛书的有关栏目、例题、习题进一步更新并加以整合,突出名师和读者的互动关系,形成作者与读者之间零距离的交流,使之更加贴近学生实际。修订后丛书的主要特点有:

每章依照课本的节(课)同步写成。每节(课)中设有"知识要点聚焦"、"重点问题点拨"、"高(中)考样题例释"、"高(中)考误区警示"和"创新互动训练"五个栏目,解读高(中)考的考点,剖析知识学习的重点与难点,点拨典型题型的解法,介绍解题技巧与方法,使读者在阅读典型例题以及创新互动训练过程中,形成渐悟、顿悟,最终大彻大悟,提升学识与能力。

每章的结尾附一套"考名校检测题",用于检测学习效果与能力,指导读者循序渐进,脚踏实地,一步一个脚印地考上清华北大等中华名校。

总之,在修订中我们全面吸收了近五年高(中)考试题和各省、市模拟题的精华,充实到本丛书中,并且将我们数十年教学经验和指导学生所积累的宝贵资源倾囊而授,盼读者从本书中汲取知识精华,百尺竿头更进一步,跃上龙门,金榜题名。

目录

第一章　集合与简易逻辑

集合与简易逻辑是作为高中数学的基础、语言、工具而设置的，而不是全面介绍“集合论”和“数理逻辑”．集合是近代数学最基本的概念之一，是研究数学问题的基础和工具．应用集合的语言、符号、思想来表达数学的基本概念和处理数学问题，有助于深刻理解事物之间的关系和数学的抽象特征．集合及其所反映的思想在日常生活、学习和工作中越来越广泛地得到应用，含有绝对值的不等式和一元二次不等式的解法是研究方程、函数的准备条件，学习它能进一步熟悉和深化对集合概念、术语、符号、运算的认识．逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科，对简易逻辑知识的掌握是学习数学的需要，也是认识问题、研究问题不可缺少的工具，特别是介绍了集合与逻辑用语之间的对应和联系，使本章内容更融合、更有效．

本章共有 10 个知识点，它们是：集合、子集、补集、交集、并集、含绝对值不等式的解法、一元二次不等式的解法、逻辑联结词、四种命题、充要条件．

本章的重点是：

(1)有关集合的基本概念(集合、全集、子集、交集、补集、并集)及其表示方法(包括集合的思想、术语、符号、表示法、运算)；

(2)$|x|<a$ 与 $|x|>a(a>0)$型的不等式的解法，一元二次不等式的解法；

(3)逻辑联结词“或”、“且”、“非”与充要条件(包括利用这些词语进行判断和简单推理)．

本章的难点是：

(1)有关集合概念的含义以及这些概念相互之间的区别与联系；

(2)对绝对值意义的理解；

(3)对一元二次方程、一元二次函数、一元二次不等式的关系的认识和理解；

(4)对一些代数命题真假的判断，关于充要条件和反证法的运用．

本章内容是集合和逻辑的初步知识．其目的是在高中数学的教与学中，通过这些初步知识的学习，对高中数学的基本概念、基础知识理解得更深刻，表达得更明确；对数学中的运算和推理更自觉、更理性；数学思维更顺畅、更符合逻辑．为今后进一步学习其他知识打下一定的基础．因此，教学时，要注意让学生在理解的基础上加以记忆，在不断学习和实践的基础上逐步巩固和提高．

1.1 集 合

知识要点聚集

(1) 点、线、面等概念都是几何中原始的、不加定义的概念，集合则是集合论中原始的、不加定义的概念. 一般地，某些指定的对象集中在一起就成为一个集合，也简称集.

我们一般用大括号表示集合，例如"北京，上海，天津，重庆"等直辖市组成的集合可以表示成{北京，上海，天津，重庆}. 为了方便，我们还常用大写的拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，例如 $A=${北京，上海，天津，重庆}.

自然数集(或非负整数集)，记作 $\mathbf{N}$，自然数集内排除 0 的集，也称正整数集，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ (注意，自然数集包括 0)；

整数集，记作 $\mathbf{Z}$；

有理数集，记作 $\mathbf{Q}$；

实数集，记作 $\mathbf{R}$；

$\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 等数集内排除 0 的集，分别表示为 $\mathbf{Z}^*$ (或 $\mathbf{Z}_+$)，$\mathbf{Q}^*$ (或 $\mathbf{Q}_+$)，$\mathbf{R}^*$ (或 $\mathbf{R}_+$).

(2) 集合中的元素

集合中的每个对象叫做这个集合的元素. 例如"中国的直辖市"这一集合的元素是：北京、上海、天津、重庆.

集合中的元素常用小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；

如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$.

(3) 集合中元素的特性

① 确定性：$a\in A$ 和 $a\notin A$，二者必居其一；

② 互异性：若 $a\in A$，$b\in A$，则 $a\neq b$；

③ 无序性：$\{a,b\}$ 和 $\{b,a\}$ 表示同一个集合.

(4) 集合的表示方法

① 列举法：把集合中的元素一一列举出来，例如集合{北京，上海，天津，重庆}；

② 描述法：用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合，例如{中国的直辖市}；

图 1-1

③ 图示法：用一条封闭的曲线(或数轴)的内部来表

示一个集合，如图1-1和图1-2分别表示集合$\{a,b,c,d,e\}$和$\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x\leqslant 4\}$.

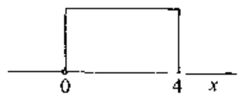

图 1-2

(5) 集合的分类

含有有限个元素的集合叫做有限集，如图1-1表示的集合；

含有无限个元素的集合叫做无限集，如图1-2表示的集合；

不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$.

重点问题点拨

1. 注意教科书中常用数集记法的变化

新的国家标准定义自然数集N含元素0.这样做一方面是为了推行国际标准化组织(ISO)制定的国际标准，以便早日与之接轨；另一方面，0还是十进位数$\{0,1,2,\cdots,9\}$中最小的数，有了0，减法运算$a-a$仍属于自然数，其中$a\in\mathbf{N}$.因此要注意以下三点：

(1) 自然数集合与非负整数集合是相同的集合，也就是说自然数集包括数0;

(2) 自然数集内排除0的集，表示成$\mathbf{N}^*$或$\mathbf{N}_+$，其他数集内排除0的集，也可类似表示如$\mathbf{R}^*$，$\mathbf{Z}_+$，…；

(3) 原教科书或根据原教科书编写的教辅用书中出现的数集符号如$\mathbf{R}^+$，$\mathbf{Q}^-$，…，不再适用.

2. 正确认识集合中元素的特性

(1) 关于确定性

集合中的元素必须是确定的.这就是说，给定一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了.例如给出集合{中国十大元帅}，它只有朱德、彭德怀、林彪、贺龙、陈毅、刘伯承、叶剑英、罗荣桓、聂荣臻、徐向前这十位，其他对象都不属于这个集合.如果说“由接近π的数组成的集合”，这个“接近π的数”是没有严格标准、比较模糊的概念，它不能构成集合.

(2) 关于互异性

集合中的元素是互异的.这就是说，集合中的元素是不能重复的，集合中相同的元素只能算是一个.例如方程$x^2-4x+4=0$有两个等根$x_1=x_2=2$，其解集只能记为$\{2\}$，而不能记为$\{2,2\}$.

(3) 关于无序性

集合中的元素是不排顺序的，这和点的坐标概念不同，在平面直角坐标系中，点(2,1)和点(1,2)表示不同的两个点，而集合$\{2,1\}$和集合$\{1,2\}$表示同一个集合.

3. **辩证理解集合和元素这两个概念**

(1) 集合和元素是两个不同的概念,符号$\in$和$\notin$是表示元素与集合之间的关系的,不能用来表示集合之间的关系.例如$\{0\}\in\{-1,0,1\}$的写法是错误的,而$\{0\}\in\{\{-1\},\{0\},\{1\}\}$的写法就是正确的.

(2) 一些对象一旦组成了集合,那么这个集合的元素就是这些对象的全体,而非个别对象.例如对于集合$\{x\in\mathbf{R}\mid x<0\}$,就是指所有小于0的实数,而不是指“$x$可以在小于0的实数范围内取值”,不是指“$x$是小于0的一个实数或某些实数”,也不是指“$x$是小于0的任一实数值”……

(3) 集合具有两方面的意义,一方面是凡符合条件的对象都是它的元素,另一方面是只要是它的元素就必须符合条件.

4. **关于集合的表示法**

列举法、描述法、图示法各有优点,应该根据具体问题确定采用哪种表示法.有的集合可以分别用这三种表示法表示,例如“大于3小于7的自然数组成的集合”就可以表示为:

(1) 列举法:$\{4,5,6\}$;

(2) 描述法:$\{x\in\mathbf{N}\mid 3<x<7\}$;

(3) 图示法:如图1-3.

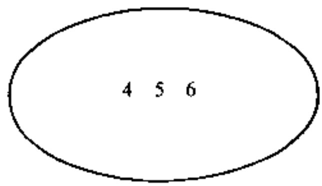

图 1-3

一般地,无限集不宜采用列举法,例如“由大于3小于7的实数组成的集合”就不宜用列举法表示,因为不能将这个无限集中的元素一一列举出来,这个集合可以用描述法和图示法(数轴)表示.

用描述法表示集合,要特别注意这个集合中的元素是什么,它应该符合什么条件,从而准确理解集合的意义.例如:

(1) 集合$\{(x,y)\mid y=\sqrt{x}\}$中的元素是(x,y),这个集合表示方程$y=\sqrt{x}$的解集,或者理解为表示曲线$y=\sqrt{x}$上的点组成的点集;

(2) 集合$\{x\mid y=\sqrt{x}\}$中的元素是x,这个集合表示函数$y=\sqrt{x}$中自变量x的取值范围,即$\{x\mid x\geqslant 0\}$;

(3) 集合$\{y\mid y=\sqrt{x}\}$中的元素是y,这个集合表示函数值y的取值范围,即$\{y\mid y\geqslant 0\}$;

(4) 集合$\{y=\sqrt{x}\}$中的元素只有一个(方程$y=\sqrt{x}$),它是用列举法表示的单元素集合.

实际上,这是四个不同的集合.

5. 空集是一个特殊的集合，除了它本身的实际意义外，在研究集合及其子集、集合的包含关系、集合的运算时，必须予以充分的考虑

集合相等的概念，课本上是这样定义的："如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么 $A=B$"．这实际上给出了一种证明两个集合相等的方法：即欲证 $A=B$，只需证 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 同时成立即可．实际上也可以说，当且仅当两个集合的元素完全相同或都是空集时，它们相等．形式上不同的两个集合可能相等，例如 $\{x|x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}=\{$地球上活的恐龙$\}=\varnothing$；形式上相似的两个集合却不一定相等，例如 $\{x|x=2m-1,m\in\mathbf{N}\}\neq\{x|x=2m+1,m\in\mathbf{N}\}$．因此两个集合是否相等，必须严格按定义来判断．

高考样题例释

高考名题点评

例 1　已知集合 $M=\left\{x\in\mathbf{Z}\left|\dfrac{6}{2-x}\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，则 M 中的元素个数是______．

（2000 年江西省高考模拟试题）

点悟：集合 M 以 x 为元素，且 $|2-x|$ 必须是 6 的约数．

解：$x\in\mathbf{Z}$，且 $|2-x|=1,2,3,6$．

$\therefore\quad M=\{-4,-1,0,1,3,4,5,8\}$．

$\therefore\quad M$ 中有 8 个元素，故填 8．

点拨：要正确理解描述法表示的集合中的元素是"谁"，本题容易误解为把 $\dfrac{6}{2-x}$ 的值作为 M 中的元素．

若集合 $M=\left\{x\in\mathbf{Z}\left|\dfrac{6}{2-x}\in\mathbf{N}\right.\right\}$，则 M 中的元素个数是多少？

创新题型导学

例 2　下列各组对象能否构成一个集合？指出其中的集合是无限集还是有限集？并用适当的方法表示出来：

(1) 直角坐标平面内横坐标与纵坐标互为相反数的点；

(2) 高一数学课本中所有的难题；

(3) 方程 $x^4+x^3+x^2+2=0$ 的实数根；

(4) 图 1-4 中阴影部分的点（含边界上的点）．

点悟：集合是一组确定的对象的全体．因此观察一组对象能否构成集合，关键是看这组对象是否是确定的．用适当的方法表示集合的关键是搞清集合中的元素是什么，它们有什么特征或者应该符合什么条件，然后考虑用描述法、列举法还是图示法来表示．

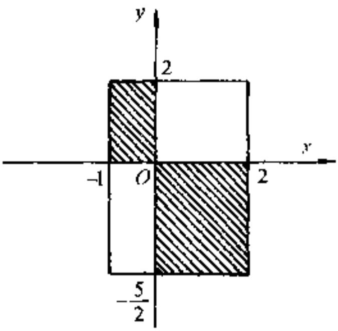

图 1-4

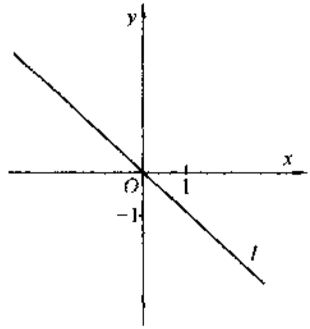

图 1-5

解:(1) 是无限集合.其中元素是点,这些点要满足横坐标和纵坐标互为相反数.

可用两种方法表示这个集合

描述法:$\{(x,y)\mid y=-x\}$;

图示法:如图 1-5 中直线 l 上的点.

(2) 不是集合.难题的概念是模糊的、不确定的,实际上一道数学题是"难者不会,会者不难",因而这些难题不能构成集合.

(3) 是空集.其中元素是实数.这些实数应是方程 $x^4+x^3+x^2+2=0$ 的根,这个方程没有实数根,所以它的解集是空集.可用描述法表示为:

$$\varnothing\text{或者}\{x\in\mathbf{R}\mid x^4+x^3+x^2+2=0\}.$$

(4) 是无限集合.其中元素是点,这些点必须落在图 1-4 的阴影部分(包括边界上的点).

图 1-4 本身也可看成图示法表示,我们还可用描述法表示这个集合:

$$\left\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 2,-\frac{5}{2}\leqslant y\leqslant 2,\text{且 }xy\leqslant 0\right\}.$$

点拨:细心的读者可能会想,(3)中的方程 $x^4+x^3+x^2+2=0$ 为什么没有实数根?事实上,

$$x^4+x^3+x^2+2=0,$$
$$(x^3+1)+(x^4+x^2+1)=0,$$
$$(x^3+1)+[(x^4+2x^2+1)-x^2]=0,$$
$$(x+1)(x^2-x+1)+(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0,$$
$$(x^2-x+1)(x^2+2x+2)=0.$$

注意 $x^2-x+1=0$ 与 $x^2+2x+2=0$ 均无实数根!

熟练掌握上面因式分解的方法和技巧,将对我们进一步学习大有好处.

例 3　用列举法表示下列集合：

(1) $A=\left\{x\in\mathbf{N}\left|\dfrac{9}{9-x}\in\mathbf{N}\right.\right\}$；

(2) $B=\left\{\dfrac{9}{9-x}\in\mathbf{N}\left|x\in\mathbf{N}\right.\right\}$；

(3) $C=\{y\mid y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$；

(4) $D=\{(x,y)\mid y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$；

(5) $E=\left\{x\left|\dfrac{p}{q}=x,p+q=5,p\in\mathbf{N},q\in\mathbf{N}^*\right.\right\}$.

点悟：注意五个集合的各自特点：

集合 A 中的元素是自然数 x，它必须满足条件 $\dfrac{9}{9-x}$ 也是自然数；

集合 B 中的元素是自然数 $\dfrac{9}{9-x}$，它必须满足条件 x 也是自然数；

集合 C 中的元素是自然数 y，它必须满足的条件实际上是二次函数 $y=-x^2+6(x\in\mathbf{N})$ 的函数值的取值范围；

集合 D 中的元素是点，这些点必须满足的条件是它们在二次函数 $y=-x^2+6$ 的图象上，且横坐标、纵坐标都必须是自然数；

集合 E 中的元素是 x，它必须满足的条件是 $x=\dfrac{p}{q}$，其中 $p+q=5$，且 $p\in\mathbf{N}$，$q\in\mathbf{N}^*$.

解：(1) 当 $x=0,6,8$ 这三个自然数时，$\dfrac{9}{9-x}=1,3,9$ 也是自然数.

$\therefore$　$A=\{0,6,8\}$.

(2) 由(1)知，$B=\{1,3,9\}$.

(3) 由 $y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}$ 知，$y\leqslant 6$，

$\therefore$ $x=0,1,2$ 时，$y=6,5,2$ 符合题意.

$\therefore$　$C=\{2,5,6\}$.

(4) 点 (x,y) 满足条件 $y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}$，则有

$$\begin{cases}x=0,\\y=6;\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\y=5;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$$

$\therefore$　$D=\{(0,6),(1,5),(2,2)\}$.

(5) 依题意，$p+q=5,p\in\mathbf{N},q\in\mathbf{N}^*$，则

$$\begin{cases}p=0,\\q=5;\end{cases}\quad\begin{cases}p=1,\\q=4;\end{cases}\quad\begin{cases}p=2,\\q=3;\end{cases}\quad\begin{cases}p=3,\\q=2;\end{cases}\quad\begin{cases}p=4,\\q=1.\end{cases}$$

x 要满足条件 $x=\dfrac{p}{q}$，

$\therefore \quad E=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},4\right\}.$

点拨:用列举法表示集合,就是要根据集合的一般特性(确定性、互异性、无序性)和集合本身的特征,把集合中的元素不重复、不遗漏、不计顺序地一一表示出来.

例4 已知$A=\{x|x=5n+1,n\in\mathbf{N}\}$,

$B=\{x|x=5n+2,n\in\mathbf{N}\}$,

$C=\{x|x=5n+3,n\in\mathbf{N}\}$,

$D=\{x|x=5n+4,n\in\mathbf{N}\}$.

若$\alpha\in A,\beta\in B,\theta\in C,\gamma\in D$,则(　　).

(A) $\alpha^2\in A,\beta^2\in D,\theta^2\in D,\gamma^2\in A$

(B) $\alpha^2\in A,\beta^2\in B,\theta^2\in C,\gamma^2\in D$

(C) $\alpha^2\in A,\beta^2\in C,\theta^2\in B,\gamma^2\in A$

(D) $\alpha^2\in B,\beta^2\in D,\theta^2\in D,\gamma^2\in B$

点悟:注意四个不同集合的特点,它们分别是被5整除后余数是1,2,3,4的四类自然数,可通过变换进行判断.

解法一:设$\alpha=5n+1(n\in\mathbf{N})$,则

$\alpha^2=(5n+1)^2=5(5n^2+2n)+1$,

$\because \quad 5n^2+2n\in\mathbf{N}$,

$\therefore \quad \alpha^2=(5n+1)^2\in A$;

同理可得,

$\beta^2=(5n+2)^2=5(5n^2+4n)+4\in D$;

$\theta^2=(5n+3)^2=5(5n^2+6n+1)+4\in D$;

$\gamma^2=(5n+4)^2=5(5n^2+8n+3)+1\in A$.

$\therefore$ 选A.

解法二:也可用特殊值法进行判断($n=0$时).

设$\alpha=1$,则$\alpha^2=1\in A$;

$\beta=2$,则$\beta^2=4\in D$;

$\theta=3$,则$\theta^2=9=5+4\in D$;

$\gamma=4$,则$\gamma^2=16=5\times3+1\in A$.

$\therefore$ 选A.

点拨:这是元素和集合的关系问题,只要根据所给集合的元素的特征,就不难判断它们之间的属于或者不属于的关系.

综合题型巧解

例5　数集 A 满足条件：若 $a\in A$，则有 $\frac{1+a}{1-a}\in A(a\neq 1)$.

(1) 已知 $2\in A$，求证：在 A 中必定还有另外三个数，并求出这三个数；

(2) 若 $a\in\mathbf{R}$，求证：A 不可能是单元素集合.

解：(1) $\because 2\in A$，$\therefore \frac{1+2}{1-2}=-3\in A$，

$\frac{1+(-3)}{1-(-3)}=-\frac{1}{2}\in A$，$\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}\in A$.

$\therefore$　A 中必定还有另外三个数 -3、$-\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$.

(2) 若 A 是单元素集合，则必有

$$a=\frac{1+a}{1-a},\qquad (※)$$

即 $a^2+1=0$，可见满足(※)式的实数 a 不存在.

$\therefore$　A 不可能是单元素集合.

点拨：想一想，满足上述条件的集合 A 中，你还能求出另外的第四个数吗？不妨一试，若有第四个数，则求出第四个数；若没有第四个数，请说明理由.

若将数集 A 满足的条件改为：若 $a\in A$，则 $\frac{1}{1-a}\in A(a\neq 1)$. 你能说出集合 A 中有几个元素吗？请证明你的结论.

例6　设集合 $M=\{z\mid z=x^2-y^2,x,y\in\mathbf{N}\}$.

(1)试验证 5 和 6 是否属于集合 M；

(2)关于集合 M，还能得出什么结论吗？

点悟：这是一道数学开放题. 第(1)问是个引子，第(2)问可以让我们展开想像，得出丰富多彩的答案.

解：(1)因为 $5=3^2-2^2$，所以 $5\in M$.

设 $6\in M$，则 $6=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$. 而 $6=2\times 3=1\times 6$，这就说明 $x+y$ 和 $x-y$ 必有一个为偶数，另一个为奇数.

另外又有 $(x+y)+(x-y)=2x$ 是偶数，这说明 $x+y$ 和 $x-y$ 必同为偶数或同为奇数.

这是一对矛盾，故 $6\notin M$.

(2)可以得到如下结论：

①一切奇数属于 M.

对任一奇数 $a=2n+1=(n+1)^2-n^2$，故 $a\in M$.