东方龙文化
—考研系列

全国硕士研究生入学统一考试

历届考题名家解析

理工数学一

2006

全国考研数学辅导专家组 组编

黄先开 曹显兵
施明存 殷先军 编写

朝華出版社

全国硕士研究生入学统一考试

历届考题名家解析

理工数学一

全国考研数学辅导专家组 组编

黄先开 曹显兵
施明存 殷先军 编写

朝華出版社

图书在版编目(CIP)数据

理工数学一／黄先开等编.—北京:朝华出版社,2005.3
(全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析)
ISBN 7-5054-1166-7

Ⅰ.理… Ⅱ.黄… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 009581 号

全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析:理工数学一

编　　著　黄先开等

策划编辑　田　辉　谭隆全
责任编辑　张　冉
责任印制　赵　岭
封面设计　东　方

出版发行　朝华出版社
地　　址　北京市车公庄西路 35 号　　邮政编码　100044
电　　话　(010)68433166(总编室)
　　　　　(010)68413840/68433213(发行部)
传　　真　(010)88415258(发行部)
印　　刷　北京印刷一厂
经　　销　全国新华书店
开　　本　787×1092 毫米　1/16　　字　　数　380 千字
印　　张　15.5
版　　次　2005 年 3 月第 1 版　第 1 次印刷
版　　别　平
书　　号　ISBN 7-5054-1166-7/G·0565
定　　价　22.00 元

出版说明

历届考题就是最好的模拟试题。因为，**历史是一面镜子**。懂得昨天，才会明白今天；掌握了历史和现实，才能驾驭未来。

本套丛书具有**资料完整、分析详细、解剖透彻、技巧灵活**的特点。首先，汇集了 1990～2005 年数学，1999～2005 年政治理论，1995～2005 年英语的历届研究生入学考试试题，包括政治理论、英语、理工数学一、理工数学二、经济数学三、经济数学四，共 6 册；其次，真正做到了逐题解析，分析详尽，解答规范，特别是填空题和选择题均给出了详细的解答过程，另外针对近几年的考题，做到先是分析——解题的基本思路、方法，然后是详解——详细、规范的答题过程，再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结，所涉及到的知识点、命题意图和可能延伸的考查情形。这种对命题思路、解题的重点、难点进行深入细致的解析，相信有助于考生把握解题规律、扩展分析思路、提炼答题技巧，从而大大提高应试水平。

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来，至今已有 19 年，共命制试卷 100 余份，数千道试题。这些试题是广大参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，它既反映了《考试大纲》对考生数学、英语和政治理论方面知识、能力和水平的要求，展示出统考以来三门基础课考试的全貌，又蕴涵着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想，是广大考生和教师了解、分析、研究全国硕士研究生入学统一考试最直接、最宝贵的第一手资料。

鉴于研究生入学统一考试已超过 10 届，所以很难保证每年的试题都是最新编制的。事实上，近几年的考题都与往年的试题有相当一部分是雷同的。比如：**2005** 年数学一第一大题第(3)题与 1991 年数学一第三大题第(2)题，**2005** 年数学一第一大题第(4)题与 2004 年数学一第三大题第(17)题，**2005** 年数学一第(16)题与 1990 年数学一第四大题，**2005** 年数学一第(20)题与 1996 年数学一第九大题，**2005** 年数学一第(22)题与 1991 年数学一第十一大题，**2005** 年数学二第(5)题与 2003 年数学二第一大题第(1)题，**2005** 年数学二第(8)题与 1994 年数学一第一大题第(4)题，**2005** 年数学二第(22)题与 2004 年数学四第二大题第(9)题，**2005** 年数学三、四第(4)题与 2002 年数学三第一大题第(4)题，**2005** 年数学三第(18)题与 2003 年数学三第六大题，**2005** 年数学四第(21)题与 2001 年数学一第十大题；2004 年数学一第(17)题与 1996 年数学一第四大题，2004 年数学一第(23)题与 1997 年数学一第十大题，2004 年数学一第(20)题与 2003 年数学三第九大题；2004 年数学一第(15)题与 1993 年数学一第六大题，2004 年数学一第(11)题与 1997 年数学一第八大题，2004 年数学一第(12)题与 1993 年数学一第二大题第

(5)题，2004 年数学二第(9)题与 2002 年数学二第一大题第(4)题，2004 年数学二第(22)题与 2003 年数学三第九大题，2004 年数学三、四第(18)题与 1992 年数学四、2002 年数学四第七大题，2004 年数学三第(19)题与 2002 年数学第七大题，2004 年数学三第(20)题与 2000 年数学三、四第九大题，2004 年数学四第(21)题与 1997 年数学三第十大题，2004 年数学一、三、四第(22)题与 2003 年数学四第十二大题等等都是相同或非常相似的，且解题思路几乎完全一样，可见仅在**最近 2 年**的数学考题中就有**多达 20 余道题**是与往届考题雷同的。考生若把这些历届考题全部消化巩固，将为考研成功打下坚实的基础。正因为如此，广大准备考研的同学和教师都迫切希望有一套完整的历届考试资料作为参考，共享这些优秀的试题。编者们多年来一直在做这方面的收集、整理工作，现在出版的这套丛书相信能满足大家的要求。

本套丛书按时间顺序成套题形式编排，目的是便于广大考生完成基础知识复习后进行模拟训练。尽管每题均有详尽规范的解答，但不希望读者轻易去查看答案和评注，而一定要自己先动手去进行演练。通过做成套的真题，一方面达到深化知识理解，提升思维水平的目的；另一方面可掌握做题节秦和调整考试心态。可能的话，相邀几个准备考研的朋友，一起在规定的三个小时之内真刀真枪地进行一番演习，刻意给自己制造一个紧张的气氛，去体会那种让人怦怦心跳的考试环境。通过对历年试题的真实模拟，把握好做题的节奏，分配好各部分的时间，从而不断提升自己的应试水平。

在每套题做完后，再回过头去看书中的分析、详解和评注，仔细回顾、研究一下自己的思路和解答过程与书中的答案有什么异同，了解自己在基础知识、分析思路及求解推理过程中存在哪些不足，与前面已做过的题比较是否有了提高……，等等，注意这样的归纳总结过程是必不可少的，其重要性甚至超过做题本身。整本书都这样复习下来后，在掌握基本概念、基本理论和基本方法上，在灵活运用知识和思维能力的训练上，相信读者一定会有一个质的提高。

由于时间比较仓促，难免还有不足之处，恳请广大读者朋友批评指正，以使本系列丛书能不断完善。

全国考研数学辅导专家组

目　次

1990 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分.)

(1) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是________.

(2) 设 a 为非零常数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$ ________.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$,则 $f[f(x)]=$ ________.

(4) 积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的值等于________.

(5) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$,则该向量组的秩是________.

二、选择题(本题满分 15 分,每小题 3 分.)

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x)=\int_x^{\mathrm{e}^{-x}} f(t)\mathrm{d}t$,则 $F'(x)$ 等于

(A) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$. (B) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$.

(C) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$. (D) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$.

【 】

(2) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是

(A) $n![f(x)]^{n+1}$. (B) $n[f(x)]^{n+1}$.

(C) $[f(x)]^{2n}$. (D) $n![f(x)]^{2n}$.

【 】

(3) 设 α 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.

(C) 发散. (D) 收敛性与 α 的取值有关.

【 】

(4) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续,且 $f(0)=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

(A) 不可导. (B) 可导,且 $f'(0)\neq 0$.

(C) 取得极大值. (D) 取得极小值.

【 】

(5) 已知 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解(一般解)必是

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

【　】

三、(本题满分 15 分,每小题 5 分.)

(1) 求 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

(2) 设 $z=f(2x-y,y\sin x)$，其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3) 求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}$ 的通解(一般解).

四、(本题满分 6 分)

求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域，并求其和函数.

五、(本题满分 8 分)

求曲面积分 $I=\displaystyle\iint_S yz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧在 $z\geqslant 0$ 的部分.

六、(本题满分 7 分)

设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$. 证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$.

七、(本题满分 6 分)

设四阶矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix},$$

且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},$$

其中 E 为四阶单位矩阵，$\boldsymbol{C}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵. 将上述关系式化简并求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

八、(本题满分 8 分)

求一个正交变换化二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 成标准形.

九、(本题满分 8 分)

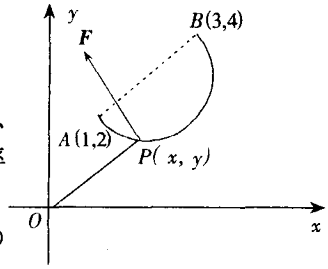
质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\boldsymbol{F}$ 作用(见图). $\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$. 求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所作的功.

十、填空题(本题满分 6 分,每小题 2 分.)

(1) 已知随机变量 X 的概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty,$$

则 X 的概率分布函数 $F(x)=$ ________.



(2) 设随机事件 A、B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4、0.3 和 0.6，若 $\bar{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\bar{B}$ 的概率 $P(A\bar{B})=$ ________.

(3) 已知离散型随机变量 X 服从参数为 2 的泊松(Poisson)分布，即 $P\{X=k\}=\frac{2^k e^{-2}}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，则随机变量 $Z=3X-2$ 的数学期望 $E(Z)=$ ________.

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量(X,Y)在区域 $D:0<x<1,|y|<x$ 内服从均匀分布，求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$.

1990年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题分析、详解及评注

一、填空题

(1) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases}x=-t+2\\ y=3t-4\\ z=t-1\end{cases}$ 垂直的平面方程是 $\underline{x-3y-z+4=0}$.

[分析] 根据题设，直线的方向向量即为待求平面的法向量，而将参数式直线方程改写为标准式方程即可得直线的方向向量.

[详解] 将直线 L 的参数方程改写为对称式方程

$$L:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{1},$$

其方向向量为 $s=\{-1,3,1\}$，根据题设即可作为待求平面的法向量. 故所求平面方程为

$$-1\cdot(x-1)+3\cdot(y-2)+(z+1)=0,$$

即 $\quad x-3y-z+4=0.$

[评注] 直线的参数式、对称式和一般式方程之间的相互转换应熟练掌握. 对称式方程便于确定直线的方向向量.

(2) 设 a 为非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\underline{e^{2a}}.$

[分析] 本题为 1^∞ 型未定式，直接按第二类重要极限或化为指数函数求极限即可.

[详解 1]

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{2a}{x-a}\right)\right]^{\frac{x-a}{2a}}\right\}^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}.$$

[详解 2] 本题可化为指数函数求极限为：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\frac{x+a}{x-a}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{2a}{x-a})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}.$$

也可考虑先作变量代换：$x=\dfrac{1}{t}$，再求极限.

[评注] 本题考查基本极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$. [详解 1] 和 [详解 2] 是处理"$1^\infty$"型极限时常用的两种方法. [详解 1] 利用了以下结论：若 $\lim f(x)=1$，$\lim g(x)=\infty$，且 $\lim[f(x)-1]g(x)=A$，则 $\lim f(x)^{g(x)}=\lim\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{(f(x)-1)}}\}^{[f(x)-1]g(x)}=e^A$.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=\underline{\quad 1\quad}$.

[分析] 直接按复合函数的定义计算即可. 注意 $|f(x)|\leqslant 1$.

[详解] 由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，知 $|f(x)|\leqslant 1$. 因此有 $f[f(x)]=1$.

[评注] 本题主要考查分段函数的复合. 要求两个分段函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，实际上就是将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$，而这里的关键是要搞清 $u=\varphi(x)$ 的函数值 $\varphi(x)$ 落在 $y=f(u)$ 的定义域的哪一部分.

(4) 积分$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$的值等于$\underline{\frac{1}{2}(1-e^{-4})}$.

[分析] 由于e^{-y^2}的原函数不能用初等函数表示,故应改变积分次序再积分.

[详解] 交换积分次序,有

$$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=\int_0^2 e^{-y^2}dy\int_0^y dx=\int_0^2 e^{-y^2}y\,dy=\frac{1}{2}(1-e^{-4}).$$

[评注] 题设条件为累次积分的形式,一般都应考虑交换积分次序,对应积分区域为$D:0\leqslant x\leqslant 2,x\leqslant y\leqslant 2$,可先画出草图,再转换为$D:0\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant x\leqslant y$.

(5) 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$,则该向量组的秩是$\underline{\ 2\ }$.

[分析] 本题为常规题,通过初等变换求秩即可.

[详解] 以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为列作矩阵$\boldsymbol{A}$,并对$\boldsymbol{A}$施行初等行变换,得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-3&-4\\0&-3&-4&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

可见秩$r(\boldsymbol{A})=2$,因此向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为2.

[评注] 单纯求秩时,既可用行初等变换又可用列初等变换,但若要求进一步求极大线性无关组,则强调只用初等行变换,这样便于确定极大线性无关组,并可将其余向量用极大线性无关组线性表示.

二、选择题

(1) 设$f(x)$是连续函数,且$F(x)=\int_x^{e^{-x}}f(t)dt$,则$F'(x)$等于

(A) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$. (B) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$.

(C) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$. (D) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$.

【 】

[答] 应选(A).

[分析] 根据公式$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)dt=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$计算即可.

[详解] $F'(x)=f(e^{-x})(e^{-x})'-f(x)x'=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$.

[评注] 本题也可用取特殊值法求解:取$f(x)=1$,则$F(x)=e^{-x}-x$,于是

$F'(x)=-e^{-x}-1$,

代入四个选项中,只有(A)符合要求.

(2) 已知函数$f(x)$具有任意阶导数,且$f'(x)=[f(x)]^2$,则当n为大于2的正整数时,$f(x)$的n阶导数$f^{(n)}(x)$是

(A) $n![f(x)]^{n+1}$. (B) $n[f(x)]^{n+1}$.

(C) $[f(x)]^{2n}$. (D) $n![f(x)]^{2n}$.

【 】

[答] 应选(A).

[分析] 可先求出一阶导数,二阶导数,…,等等,再找出一般性的规律.

[详解] 由$f'(x)=[f(x)]^2$,有

$$f''(x)=2f(x)f'(x)=2f(x)[f(x)]^2=2![f(x)]^3,$$

$$f'''(x)=2!\cdot 3[f(x)]^2f'(x)=3![f(x)]^2[f(x)]^2=3![f(x)]^4,$$

一般地，用数学归纳法，有 $f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$.

[评注] 本题也可先找出满足 $f'(x)=[f(x)]^2$ 的 $f(x)=-\frac{1}{x}$(解微分方程)，再求导：

$$f^{(n)}(x)=n!(-1)^{n+1}\frac{1}{x^{n+1}}=n!f^{n+1}(x).$$

从而得到正确答案为(A).

(3) 设 α 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.

(C) 发散. (D) 收敛性与 α 的取值有关.

【 】

[答] 应选(C).

[分析] 本题考查级数的运算性质：若一般项中一项收敛，另一项发散，则相加减后一定发散.

[详解] 因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$ 的一般项有 $\left|\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$ 收敛；又显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，根据级数的运算性质知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 必发散.

[评注] 除了熟练掌握正项级数、交错级数和一般项级数的判敛方法外，对于级数的运算性质和收敛的必要条件等也不应忽视. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 必发散. 反过来，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 必发散.

(4) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

(A) 不可导. (B) 可导，且 $f'(0)\neq 0$.

(C) 取得极大值. (D) 取得极小值.

【 】

[答] 应选(D).

[分析] 在一点是否可导，一般应根据定义进行分析. 而是否取极值，则可利用两个判定定理，当不满足判定定理的条件时，往往也要求回到定义进行讨论.

[详解] 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}=2\cdot 0=0$，即有 $f'(0)=0$，因此可排除(A)、(B)两项.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，根据极限的保号性，存在 $x=0$ 的某邻域，在此邻域内有 $\frac{f(x)}{1-\cos x}>0$，即 $f(x)>0=f(0)$，由极值的定义知，在 $x=0$ 处 $f(x)$ 取得极小值.

[评注] 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{x-x_0}=B$，则有 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)=AB$. 可见，本题条件 $f(0)=0$ 是多余的，根据 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，即可推导出来.

(5) 已知 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1，k_2 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解(一般解)必是

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

【　】

[答]　应选(B).

[分析]　本题考查解的性质与结构:非齐次方程组的通解应为对应齐次方程组的通解加上非齐次方程组的特解,因此重点在于判断四个答案中前后两部分是否符合要求.

[详解]　根据解的性质知,$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 不是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的特解,排除(A)、(C)两个选项;而 $\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2$ 尽管为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解,但 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2$ 是否线性无关是未知的,因此 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2)$ 并不一定构成 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系,排除(D);故正确选项为(B).

事实上,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,因此 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2)$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解,而

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A\beta}_1 + \boldsymbol{A\beta}_2) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b},$$

说明 $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个特解,故 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解.

[评注]　**线性方程组解的判定、性质和结构问题,是常考题型,应当熟练掌握克莱姆法则和齐次线性方程组、非齐次线性方程组解的判定、性质和结构.**

三、(1) 求 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

[分析]　被积函数为两个不同类型函数的乘积,可考虑用分部积分法.

[详解]

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}\left(\frac{1}{2-x}\right)\\ &= \frac{1}{2-x}\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(2-x)}\\ &= \ln 2 - \frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln 2.\end{aligned}$$

[评注]　**用分部积分公式 $\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$ 时,一般对数函数、反三角函数应保留下来作为 u,而其余部分可考虑与 $\mathrm{d}x$"凑"成 $\mathrm{d}v$ 的形式.**

(2) 设 $z = f(2x - y, y\sin x)$,其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

[分析]　本题为常规题型,应用复合函数求偏导公式即可.

[详解]　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2f'_1 + y\cos x\cdot f'_2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= -2f''_{11} + 2\sin x f''_{12} + \cos x f'_2 + y\cos x(-f''_{21} + \sin x f''_{22})\\ &= -2f''_{11} + (2\sin x - y\cos x)f''_{12} + y\sin x\cos x f''_{22} + \cos x f'_2.\end{aligned}$$

[评注]　**注意 f'_1, f'_2 仍为两个中间变量的函数,对其求偏导时,仍要求应用复合函数求偏导的公式进行计算.**

(3) 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}$ 的通解(一般解).

[分析]　本题为常规题型,先求特征根和对应齐次方程的通解,再根据特征根和右端项

确定待求特解的形式.

[详解] 特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$,其根为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$,故对应齐次方程的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)e^{-2x}.$$

因为 $\alpha=-2$ 是特征方程的二重根,因此原方程的特解可设为

$$y^*=Ax^2e^{-2x},$$

代入原方程,解得 $A=\frac{1}{2}$,故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}x^2e^{-2x},$$其中 C_1、C_2 为任意常数.

[评注] 右端项为指数函数、多项式函数、三角函数以及这些函数相加、相乘后的所得函数,如何用待定系数法确定特解,应当熟练掌握.

四、求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域,并求其和函数.

[分析] 注意收敛域应考虑端点的情形,而收敛区间指开区间. 其和函数可通过逐项求导得到.

[详解] 因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)+1}{2n+1}=1$,所以收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}=1$,

因此当 $-1<x<1$ 时,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 收敛;

当 $x=\pm1$ 时,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 显然发散.

故此幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

记 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$,则

$$S(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2x(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)'+\frac{1}{1-x}$$
$$=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2},-1<x<1.$$

[评注] 在收敛域内求幂级数的和函数的一般方法是,利用某些已知其和函数的幂级数(如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},|x|<1$),或转化为基本情形:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$,再利用逐项求导、逐项积分性质求和函数.

五、求曲面积分 $I=\iint\limits_{S}yz\,dzdx+2dxdy$,其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧在 $z\geqslant0$ 的部分.

[分析] 添加曲面后使之成为封闭曲面,再利用高斯公式. 也可考虑用投影轮换法进行计算.

[详解 1] 令 $S_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant4\\ z=0\end{cases}$,其法向量与 z 轴的负向相同,则 $S+S_1$ 构成封闭曲面.

设所围成的区域为 Ω,根据高斯公式,有

$$I=\iint\limits_{S}yz\,dzdx+2dxdy=\iint\limits_{S+S_1}yz\,dzdx+2dxdy-\iint\limits_{S_1}yz\,dzdx+2dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\left(-\iint_{x^2+y^2\leqslant 4} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+8\pi=12\pi.$$

［详解 2］ 由球面方程 $x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant 0)$，有 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，根据投影轮换法，得

$$I=\iint_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S[yz\cdot(-z'_y)+2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_S\left(\frac{zy^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S(y^2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}(y^2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2\sin^2\theta+2)r\mathrm{d}r=12\pi.$$

［评注］ 本题也可用直接投影法，但计算量很大，容易出错．当曲面不封闭时，添加适当的曲面（一般为平面区域）后，使之封闭再用高斯公式，而在添加的曲面上采用直接投影法，是计算第二类曲面积分最常用的方法．

六、设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$．证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$．

［分析］ 与未知函数在一点的导数值有关，自然想到用微分中值定理，但 $f(a)=f(b)$ 只能推导出一点的导数为零．考虑到题设 $f(x)$ 不恒为常数，因此存在一点 c，使 $f(c)\neq f(a)=f(b)$，再在 $[a,c]$ 或 $[c,b]$ 上应用拉格朗日中值定理即可．

［详解］ 因 $f(x)$ 不恒为常数且 $f(a)=f(b)$，故至少存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)\neq f(a)=f(b)$．

若 $f(c)>f(a)$，则在 $[a,c]$ 上 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件，因此至少存在一点 $\xi\in(a,c)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{1}{c-a}[f(c)-f(a)]>0.$$

若 $f(c)<f(a)=f(b)$ 的情形，在 $[c,b]$ 上应用拉格朗日中值定理即可．

［评注］ 本题也可用反证法进行证明，即假设对任意 $x\in(a,b)$，有 $f'(x)\leqslant 0$，于是 $f(x)$ 单调减少，因此有 $f(a)\geqslant f(x)\geqslant f(b)$，而 $f(a)=f(b)$，故有 $f(x)=f(a)=f(b)$ 为常数，与题设矛盾．

七、设四阶矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix},$$

且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为四阶单位矩阵，$\boldsymbol{C}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵．将上述关系式化简并求矩阵 $\boldsymbol{A}$．

［分析］ 本题相当于解矩阵方程，先利用矩阵的转置性质化简，再进行计算．

［详解］ 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$，

于是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$．

故 $$\boldsymbol{A}=[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$$

[评注] 求逆矩阵$[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}$时,可以用初等变换,也可以通过分块矩阵求逆.这类问题一定要注意先化简(用矩阵的运算法则),再计算.

八、求一个正交变换化二次型$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$成标准形.

[分析] 本题是基本题型,主要考查矩阵的特征值、特征向量以及正交化方法.

[详解] 二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$,对应$\boldsymbol{A}$的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-4&4\\-2&4&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9),$$

所以特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=9$.

解$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得对于$\lambda_1=\lambda_2=0$的两个正交特征向量为

$\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(4,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

解$(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(9\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得对于$\lambda_3=9$的特征向量为

$\boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$.

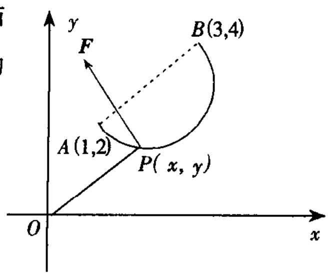
将上述相互正交化的特征向量单位化,得

$$\boldsymbol{\eta}_1=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(\frac{4}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}},-\frac{1}{3\sqrt{2}})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_3=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}.$$

令$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{3\sqrt{2}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$,则在正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$下,原二次型变为$f=9y_3^2$.

[评注] 属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=0$的特征向量不惟一,因此本题的答案也不惟一.

九、质点P沿着以AB为直径的半圆周,从点$A(1,2)$运动到点$B(3,4)$的过程中受变力$\boldsymbol{F}$作用(见图).$\boldsymbol{F}$的大小等于点P与原点O之间的距离,其方向垂直于线段OP且与y轴正向的夹角小于$\frac{\pi}{2}$.求变力$\boldsymbol{F}$对质点P所作的功.



[分析] 变力沿曲线运动对质点所做的功可用曲线积分描述$\mathrm{d}W=\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$,这里$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\}$,因此关键是求出变力$\boldsymbol{F}$的表达式.

[详解] 根据题设,变力

$$\boldsymbol{F}=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left\{\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}=\{-y,x\},$$

圆弧$\widehat{AB}$的参数方程是

$$\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\cos t\\y=3+\sqrt{2}\sin t\end{cases},-\frac{3}{4}\pi\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

故变力$\boldsymbol{F}$所做的功为

$$W=\int_{AB}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}[\sqrt{2}(3+\sqrt{2}\sin t)\sin t+\sqrt{2}(2+\sqrt{2}\cos t)\cos t]\mathrm{d}t=2(\pi-1).$$