普通高等教育基础课规划教材

高等数学

多元微积分及其实验

（MATLAB版）

任玉杰 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

高　等　数　学
多元微积分及其实验
（MATLAB 版）

主　编　任玉杰
副主编　李艳娟
参　编　孙文惠　梁传广

机械工业出版社

本书是《高等数学——一元微积分及其实验（MATLAB 版）》的续本，共分 6 章，主要内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和常微分方程的基本理论和方法，以及与各个知识点相匹配的 MATLAB 的符号解法、数值解法及其图形显示程序。

本书各章均安排了演示与实验，增加了用 MATLAB 计算多元函数微积分、级数、常微分方程的数值解法、符号解法及其图形显示，数学建模的基本内容和基本方法等，在每章末附有上机实验的课题。作者把多年在大学数学实验教学中编写的大量 MATLAB 程序和算例融入到本书中，为高等数学中的每种方法都配备了 MATLAB 数值计算、符号计算及其图形可视化的 MATLAB 程序，许多程序具有科研和使用价值。

本书可作为高等院校工科、理科、经济学及管理等各专业高等数学的教材，也可以作为数学实验教材选用，另外还可以作为教师、学生和工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．多元微积分及其实验：MATLAB 版/任玉杰主编．
—北京：机械工业出版社，2005.4
普通高等教育基础课规划教材
ISBN 7-111-16334-6

Ⅰ．高…　Ⅱ．任…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材
②微积分－高等学校－教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 022457 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：刘小慧
责任编辑：马军平　版式设计：霍永明　责任校对：魏俊云
封面设计：张　静　责任印制：洪汉军
北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2005 年 4 月第 1 版·第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16·23.75 印张·588 千字
定价：34.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68326294
封面无防伪标均为盗版

前　言

本套教材分为《高等数学　一元微积分及其实验（MATLAB版）》和《高等数学　多元微积分及其实验（MATLAB版）》两册　它是“辽宁省高等教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划”中的项目“高等数学课程教学内容和体系改革”的研究成果，也是根据作者多年来的教学和科研经验，集思广益，广泛吸取国内外一些相关教材之所长，在此基础上把教学内容、教学体系、教学手段的改革融为一体的21世纪的新型改革教材。它显示了如下几方面的新的探索。

1. 从数学统一性的观点，从全面素质教育的高度，打破了传统的大学数学教学体系，设计了一套新大学课程的体系，将数值分析和计算机数学软件MATLAB的相关内容分别融入到《高等数学》、《线性代数》和《概率论与数理统计》课程之中，增加实验环节，形成非数学专业的三门必修课——《高等数学及其实验（MATLAB版）》、《线性代数及其实验（MATLAB版）》和《概率论与数理统计及其实验（MATLAB版）》. 在作者讲授高等数学课时，经常有学生问这样的问题：如果不知道一个函数的具体表达式，而仅仅已知该函数的一些离散的点，如何求它的微积分或解常微分方程？对于传统的教材，作者只能向学生说：你提出的问题非常好，这也是以后参加工作经常遇到的问题，这属于计算方法（数值分析）的内容。从历届毕业生参加工作后反馈的信息告诉我们：打破传统的教学体系，将计算方法（数值分析）化整为零融入到大学数学的每门课程中，再将计算机数学软件与这些课程融合，向学生传授一套完整地、科学地解决这一类问题的方法，使学生能够适应将来的工作和科研环境需要是十分重要的。因此，本教材除精选了非数学专业的学生必须掌握的高等数学的全部内容之外，还特别融入了与之对应的计算方法（数值分析）、计算机数学软件MATLAB的使用等内容，增加了数学实验环节，从而开拓了高等数学的解析解法和数值解法及其用计算机软件MATLAB进行科学计算相融合的新举措。

2. 在计算手段的处理上，采用了手工计算和计算机计算各有侧重的处理手法。在高等数学的内容处理上，采用了以手工计算为主，计算机计算为辅的策略。为了使学生理解和掌握高等数学的理论和方法，在每节都配备了A组的基本题和B组的提高题，每章还给出了总复习题以供学生进行手工计算，在每章最后都加入了用计算机软件MATLAB作数学实验的内容，通过计算机模拟仿真，给出可视化动态图形，加深学生对知识的理解，并给出了用计算机处理实际问题的算例和程序，使学生了解用计算机软件进行科学计算的方法。在计算方法（数值分析）的内容和高等数学的技巧题上，强化了用MATLAB程序通过计算机进行科学计算，削弱了手工计算。

3. 在内容安排上，考虑到目前我国硕士研究生数学入学考试的要求和师资队伍的结构等问题，将非数学专业的学生必须掌握的高等数学的全部内容安排在每章的前几节，而数学实验内容安排在每章最后，将采用MATLAB进行与高数有关的平面图形和动画制作放在附录中，以便根据情况选用，拓宽学生的知识视野。

4. 作者把多年在大学数学实验的教学中编写的一些MATLAB程序和例题融入到本教材

中，在每个数学实验、符号解法和数值解法的例题中都配备了MATLAB计算程序。本书中有许多程序和算例目前在其他书籍中尚未见到。例如，拉格朗日插值多项式构造 n 阶导数的数值计算公式的MATLAB主程序、用MATLAB程序计算多重积分、曲线积分和曲面积分、常微分方程等的符号计算或数值计算的完整的方法、许多作图程序等都是作者首创，并且首次公开出版，具有科研和实用价值。

5. 加强数学应用能力和科学计算能力的培养。本书在讲解数学内容的同时，力求突出在解决实际问题中有重要应用的数学思想方法，揭示重要数学概念和方法的本质。把数学建模的最基本的内容和方法融入教材，便于学生在学习微积分的过程中也学会用数学方法将实际问题转化为数学模型，然后用计算机程序进行科学计算。此外，在教材中除保留了几何应用和物理应用以外，还增加了上机实验的应用问题。在每章的数学实验中，列举了大量的用MATLAB计算和绘图的例题和上机实验的习题，使学生在学会微积分解决实际问题的同时，也学会用计算机软件解决对应问题的方法，从而培养学生数学应用能力和科学计算能力，使学生能够适应将来的工作和科研环境。

6. 在数学实验环节中，作者利用自己编写的动态演示程序等画图程序，动态地显示各种类型的二元函数的图形及其定义域、二（三）重积分的积分区域、空间曲线（曲面）的切线（切平面）和法平面（法线）等，从几何直观帮助学生理解有关的概念和定理及其方法，用这种将数学软件MATLAB融入教学之中，增加了数学实验环节，加强应用和几何直观，增加了应用性的例题和习题，每章配有使用计算机计算的数学实验课题的手段，培养学生的科学计算能力，使学生的知识、能力和素质都能够得到提高。应该说，这是原有教学过程的一个飞跃。

相应地，这套教材对教师也提出了更高的要求：不但能讲授知识，而且会应用计算机软件，还要改进教学方法，能够进行创新研究。这当然有利于教师能力和教学水平的提高。

本书由大连轻工业学院任玉杰任主编，沈阳大学李艳娟任副主编。各章节执笔人是：任玉杰（编写第1章，第2章2.7、2.9~2.12，第3章3.6~3.8，第4章4.6和4.7，第5章，第6章6.1、6.8、6.10~6.13及附录）；辽宁师范大学孙文惠（编写第4章4.1~4.5）；李艳娟（编写第2章2.1~2.6、2.8、第3章3.1~3.5）；大连理工大学梁传广（编写第6章6.2~6.7、6.9）。

本书编写的过程中得到了大连国际商务学院校长张文超教授、张博校长、王芸生处长、大连轻工业学院党委书记林茂全、校长余加祐、副校长李长吾、教务处处长马铁成以及数理和信息工程学院的领导和教师的大力支持，还得到了大连理工大学张鸿庆教授和滕素珍教授等人的热情支持和帮助。景卓帮助孙文惠进行文字录入，大连理工大学王灯山帮助李艳娟修改第2章和第3章部分内容。北京邮电大学的贺祖国教授详细地审阅了书稿，并提出了宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

21世纪的改革教材应该多模式、多品种，本书只是对其中的一种模式所作的初步探索和尝试，在内容精简和实现数学机械化以及培养学生数学应用能力和科学计算能力等方面，我们虽然也作了一些努力，但仍感觉与目标差距很大。真诚地欢迎同行、读者和专家提出不同的见解，并希望广大读者对教材中的错误、缺点和不足之处提出批评和指正。最后，我们也真诚地欢迎对本教材有兴趣的同行参加试用。

任玉杰

目　录

第 1 章　向量代数与空间解析几何

用代数方法研究空间几何图形，这就是空间解析几何学，它是平面解析几何的拓广。空间图形比平面图形复杂，每个点有三个坐标，演算和表述更繁杂，处理方式必须改进，于是引进向量这个有利的武器。空间解析几何是研究多元微积分学的重要基础，向量代数不仅是研究空间几何图形的有效方法，也是后继课程和工程技术中常用的数学工具。

本章首先建立空间直角坐标系，在此基础上着重讨论向量的概念、向量的坐标表达式及其运算。然后以向量为工具研究空间的平面和直线方程，并介绍几种常用的空间曲面和空间曲线的有关知识。

1.1　空间直角坐标系

1.1.1　空间直角坐标系的建立

为了用代数方法研究空间几何图形的性质，仿照平面解析几何的方法，我们首先建立空间点与有序数组之间的对应关系，为此引进空间直角坐标系。

三根在原点 O 相交又互相垂直的数轴 Ox、Oy 和 Oz 就构成一空间直角坐标系，记为 $O—xyz$。O 仍称作坐标原点。Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴也分别称作横轴、纵轴和竖轴。通常 Ox 轴和 Oy 轴在水平面内，而 Oz 轴放在与水平平面垂直的位置上。

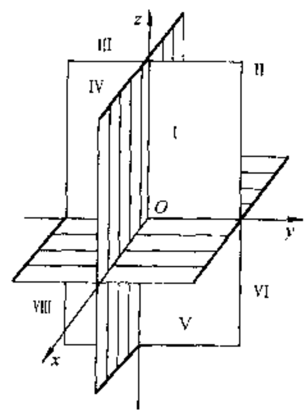

图 1-1

任意两条坐标轴可以确定一个平面，Ox 轴和 Oy 轴、Oy 轴和 Oz 轴、Ox 轴和 Oz 轴所确定的三个平面分别称作 xOy 平面、yOz 平面和 xOz 平面，统称为坐标平面。三个坐标平面把整个空间分为八个部分，每一部分的空间称为一个卦限。如图 1-1 所示，分别以 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的正半轴为棱的卦限为第Ⅰ卦限，位于 xy 平面上方的其他三个卦限，按逆时针方向依次称为第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限。位于 xy 平面下方，与第Ⅰ卦限相对应的为第Ⅴ卦限，其后按逆时针方向依次称为第Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限。

空间直角坐标系分为两类。如果 $O—xyz$ 坐标系，用右手四指由 x 轴正向到 y 轴正向的方向握住 z 轴，拇指恰好指向 z 轴正向，则称为右手系。反之称为左手系。本书采用右手系。

1.1.2　空间点的直角坐标

在空间直角坐标系中，已知空间一点 M，过点 M 分别作垂直于 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的

三个平面，它们与三个坐标轴依次交于 P、Q、R 三点，如图 1-2 所示。设这三点在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的坐标依次为 x、y、z。这样点 M 就惟一确定一个有序数组 x、y、z。

反之，对给定的一个有序数组 x、y、z，总可以在 Ox 轴取坐标为 x 的点 P、在 Oy 轴取坐标为 y 的点 Q、在 Oz 轴取坐标为 z 的点 R，过 P、Q、R 三点分别作垂直于 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的三个平面，这三个垂直平面的交点 M 便是由有序数组 x、y、z 所确定的惟一的点。从而就建立了空间点 M 与有序数组 x、y、z 之间的一一对应的关系。把由点 M 所确定的这组数 x、y、z 称为点 M 的坐标，并依次称 x、y、z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标。坐标为 x、y、z 的点 M 记作 $M(x,y,z)$。

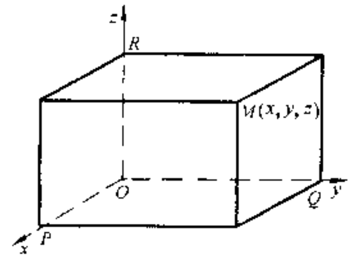

图 1-2

建立了空间直角坐标系之后，空间内的任意一点的位置就完全由它的坐标所确定。例如，坐标原点 $O(0,0,0)$，在 Ox 轴上的点 $P(x,0,0)$、Oy 轴上的点 $Q(0,y,0)$ 和 Oz 轴上的点 $R(0,0,z)$。xOy 平面内的点可用 $(x,y,0)$ 表示，yOz 平面内的点可用 $(0,y,z)$ 表示，xOz 平面内的点可用 $(x,0,z)$ 表示。

为了便于确定空间点 $M(x,y,z)$ 的位置，下面将点 M 的坐标 x,y,z 在各卦限中的符号列入表 1-1。

表 1-1　M 的坐标在各卦限的符号

符号 卦限 / 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

【例 1-1】 在空间直角坐标系中，标出点 $M(2,3,-2)$ 的位置。

解 根据点 $M(2,3,-2)$ 坐标的符号特点，可知点 M 在第Ⅴ卦限内。分别将 x 轴和 y 轴上坐标为 2 和 3 的点依次记作 P 和 Q。在 xOy 平面内过点 P 和 Q 分别作 y 轴和 x 轴的平行线，相交于一点 M_1，再过点 M_1 作 z 轴的负半轴的平行线，并在其上取点 M，使 $M_1M=2$，根据点的坐标概念，点 M 的坐标依次为 $2,3,-2$，所以点 M 即为所求，如图 1-3 所示。

【例 1-2】 已知点 $M(2,3,-2)$，求：

(1) 与点 M 关于坐标原点对称的点 M_1。

(2) 与点 M 关于 x 轴对称的点 M_2。

(3) 与点 M 关于 yOz 坐标面对称的点 M_3。

解 求空间点就是求其坐标。关于与坐标原点、坐标轴、坐标面对称的点的坐标特点是：对称两点的对应坐标绝对值相等，其符号由各点所在的卦限而定。

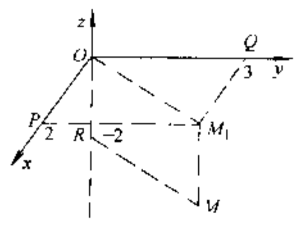

图 1-3

(1) 因为点 $M(2,3,-2)$ 在第Ⅴ卦限，与点 M 且关于

坐标原点对称的点 M_1 在第Ⅲ卦限;根据对称点的坐标特点和该点在卦限内的符号,可知 $M_1(-2,-3,2)$。

同理可得

(2) 与点 M 关于 x 轴对称的点 $M_2(2,-3,2)$。

(3) 与点 M 关于 yz 坐标面对称的点 $M_3(-2,3,-2)$。

1.1.3 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点,试求 M_1 与 M_2 之间的距离。

过 M_1 和 M_2 分别作平行于三个坐标平面的平面。这六个平面围成如图 1-4 所示的长方体,这个长方体的三条棱长分别为 $|AB|=|y_2-y_1|$,$|AC|=|x_2-x_1|$,$|CD|=|z_2-z_1|$。

因为 $\angle M_1BA$ 和 $\angle M_1AM_2$ 都是直角,所以

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

因此,M_1 与 M_2 之间的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特殊地,点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

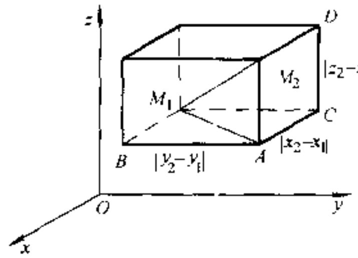

图 1-4

【例 1-3】 试求 $M_1(1,0,-1)$ 与 $M_2(2,-1,3)$ 之间的距离。

解 $|M_1M_2|=\sqrt{(2-1)^2+(-1-0)^2+(3+1)^2}=3\sqrt{2}$

【例 1-4】 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点。

解 因为所求的点在 z 轴上,所以设该点为 $C(0,0,z)$,根据题意得

$$|CA|=|CB|$$

即

$$\sqrt{(-4-0)^2+(1-0)^2+(7-z)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$$

两边去根号,解得

$$z=\frac{14}{9}$$

所以,所求的点为 $C\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$。

【例 1-5】 试证以 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$ 和 $C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形。

证明 因为

$$|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$$

$$|AC|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7$$

$$|BC|=\sqrt{(10-2)^2+(-1-4)^2+(6-3)^2}=7\sqrt{2}$$

所以,$|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$,故 $\triangle ABC$ 是直角三角形。又因为 $|AB|=|AC|$,因此,$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形。

习 题 1.1

A 组

1-1 在空间直角坐标系中,标出下列各点的位置,并说明它们各在第几卦限:

(1) $A(1,-3,2)$ (2) $B(3,3,-2)$ (3) $C(2,-3,-2)$ (4) $D(-1,-3,2)$

1-2 说明下列各点的位置的特殊性:

(1) $A(0,3,0)$ (2) $B(0,0,2)$ (3) $C(2,-3,0)$ (4) $D(-1,0,-2)$

1-3 已知点 $M(1,3,-2)$,求

(1) 与点 M 关于坐标原点对称的点 M_1;

(2) 与点 M 关于 x 轴对称的点 M_2;

(3) 与点 M 关于 yOz 坐标面对称的点 M_3。

1-4 试求 $M_1(3,5,-1)$ 与 $M_2(-2,-1,3)$ 之间的距离。

1-5 在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征?指出下列各点的位置:$A(2,4,0)$;$B(0,3,4)$;$C(2,-1,-5)$;$D(-1,\ 4,3)$;$E(0,0,3)$。

B 组

1-6 求点 $A(4,-3,5)$ 到坐标原点、各坐标轴以及各坐标平面间的距离。

1-7 试证以 $A(4,3,1)$、$B(7,1,2)$ 和 $C(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形。

1-8 已知两点 $A(4,-7,1)$ 和 $B(6,2,z)$ 满足 $|AB|=11$,求 z 的值。

1-9 在 y 轴上求与两点 $A(-3,2,7)$ 和 $B(3,1,-7)$ 等距离的点。

1-10 求点 $M(a,b,c)$ 关于:①坐标原点;②各坐标轴;③各坐标面的对称点的坐标。

1-11 自点 $M(a,b,c)$ 分别作各坐标轴和各坐标面的垂线,写出各垂足的坐标。

1-12 过点 $M(a,b,c)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 yOz 坐标面的平面,问在它们上面的点的坐标有什么特点?

1-13 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 坐标面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴和 y 轴上,求其各顶点的坐标。

1.2 向量及其线性运算

1.2.1 向量概念

在现实生活中,我们遇到的量通常有两种类型:一类是有大小但无方向的量称为标量(也称数量),例如,某地昨天室外最低气温零下 13°C,某物体的质量是 400g,某三角形的面积是 12cm^2;另一类是即有大小又有方向的量称为向量(也称矢量),例如位移,向南走 12m 和向西走 12m,虽然都是走 12m,但方向不同,其效果也不同。除位移以外,力、速度、加速度、电场强度等也都是向量。

向量常用有向线段来表示。以 A 为起点,B 为终点的向量记为$\overrightarrow{AB}$,箭头"→"表示方向;向量也可以用一个黑体字母表示,如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\cdots$(印刷用),或者用一个小写的英文字母加箭头表

示,如$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$…(用于书写),如图 1-5 所示。

向量的大小称作向量的模,也称作向量的长度。向量$\overrightarrow{AB}$的模记作$|\overrightarrow{AB}|$;向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作$|\boldsymbol{a}|$。模为 0 的向量称作零向量,记作 $\boldsymbol{O}$ 或$\vec{O}$。规定零向量 $\boldsymbol{O}$ 的方向为任意方向;模等于 1 的向量称作单位向量。

在实际问题中,有些向量与起点有关,而有些向量与起点无关。本书只研究与起点无关的向量。在保持其大小和方向不变的前提下可以自由平移的向量称为自由向量(简称向量)。

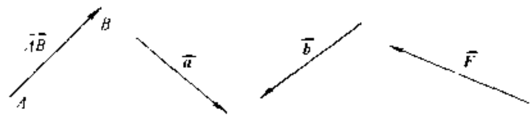

图 1-5

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,且方向相同,则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,且方向相反,则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互为负向量,记作 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$。

1.2.2 向量的加法和减法

如何规定向量的加法,从下面的实际问题可以清楚的看到。

以位移问题为例。一物体从 A 点沿$\overrightarrow{AB}$位移到 B 点,再沿$\overrightarrow{BC}$位移到 C 点,其最终效果是位移$\overrightarrow{AC}$(见图 1-6),即

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

由此可知,向量需要这样的三角形加法:已知两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,将 $\boldsymbol{b}$ 平移,使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,则 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和,即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

由两个向量的加法很容易推广到有限多个向量的加法。从图 1-7 可以看到,将向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 依次首尾相接,而第一个向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点到最后一个向量 $\boldsymbol{d}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 的和,记作 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$。这种加法又称为多边形加法或折线法。

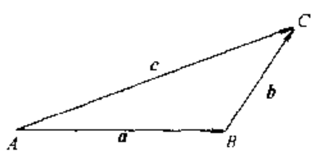

图 1-6

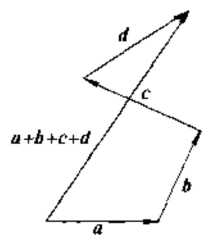

图 1-7

在物理中,力或速度的合成常用平行四边形法则:已知两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不平行,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB 和 AD 为两条邻边作一平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC,则向量$\overrightarrow{AC}$等于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和 $a+b$(见图 1-8)。

向量的加法满足下列的运算律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$。

(2) 结合律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(见图 1-9)。

(3) 三角不等式$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$。

这个不等式的几何意义为：三角形两边之和大于或等于第三边。

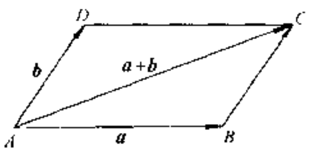

图 1-8

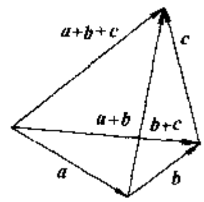

图 1-9

向量的减法可作为加法的逆运算。若有 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。即将向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的起点重合，则由 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的差，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(见图 1-10)。

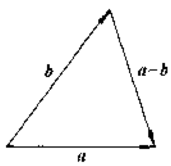

图 1-10

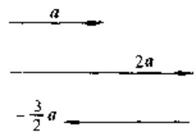

图 1-11

1.2.3 数乘向量

从实际问题中容易得知，若用一个正数乘一个向量，这个向量的模会伸长或缩短，而方向不变；若用一个负数乘一个向量，这个向量的模会伸长或缩短，但方向相反。

定义 1-1 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$。当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ 的方向是任意。

例如，已知向量 $\boldsymbol{a}$，则向量 $2\boldsymbol{a}$ 和 $-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}$ 为图 1-11 所示的向量。

根据数乘向量的定义，容易验证数乘向量满足下列的运算律：

(1) 交换律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$。

(2) 结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$。

向量相加、相减及数乘向量统称为向量的线性运算。

设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$，与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记作$\boldsymbol{a}^{\circ}$，显然 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$，即任何非零向量都可以表示为它的模与同向单位向量的乘积。同时，$\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，即与一个向量同向的单位向量可由该向量除以它的模得到。$\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\pm\boldsymbol{a}^{\circ}=\pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$。

如果将向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平移到同一起点上时，它们都在同一条直线上，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行，

记作 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$。

定理 1-1 设向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$,那么向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是:存在惟一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$。

证明 "必要性"。如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行,且 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$,则可以取 λ,使得 $|\lambda| = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同时,λ 取正号;当 $\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反时,λ 取负号,这样就有 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$。

"充分性"。如果 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 必同向或反向,都有 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$。

【例 1-6】 在平行四边形 $ABCD$ 中,设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$,$M$ 是平行四边形对角线的交点,试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$(见图 1-12)。

解 由于平行四边形的对角线互相平分,所以

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AM}$$

得

$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$

因为 $\overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{MD} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$,所以 $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$。由于 $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$,故 $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$。

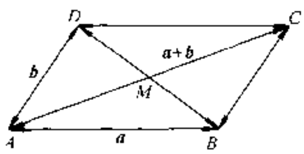

图 1-12

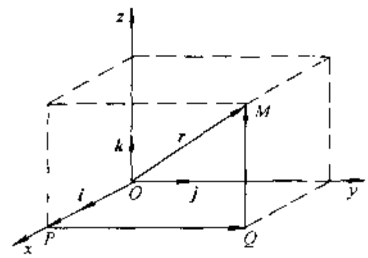

图 1-13

1.2.4 向量的坐标

在空间直角坐标系中,在三个坐标轴上各取一单位向量 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$,使它们分别指向 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的正向,如图 1-13 所示,$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 称作基本单位向量。

对于任意向量 $\boldsymbol{r}$,先将 $\boldsymbol{r}$ 平行移动,使其起点落在原点 O,这时 $\boldsymbol{r}$ 的终点为 M。过 M 作垂直于 xOy 平面的垂线,垂足为 Q。再过 Q 作直线垂直于 x 轴,垂足为 P(见图 1-13)。根据向量多边形加法,得

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{OM}$$

$\overrightarrow{OP}$,$\overrightarrow{PQ}$,$\overrightarrow{QM}$ 分别与 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 平行,根据定理 1-1,存在三个实数 x,y,z,使 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{PQ} = y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{QM} = z\boldsymbol{k}$,从而

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

式(1-1)称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{PQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{QM}=z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量。有序数组 x,y,z 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 或 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，x,y,z 也称作向量 $\boldsymbol{r}$ 在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的投影。例如，基本单位向量的坐标为 $\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$，$\boldsymbol{j}=\{0,1,0\}$，$\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$。

向量的坐标与点的坐标有着密切的联系。起点在坐标原点的向量称作向径。例如，向量 $\overrightarrow{OM}$ 也称作向径。从图 1-13 容易看出，$\overrightarrow{OM}$ 的坐标与终点 M 的坐标相同，即当一个向量起点在坐标原点时，向量的坐标就是终点的坐标。

【例 1-7】 已知空间中两个点 $A(1,-5,6)$ 和 $B(x,y,z)$，求向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 坐标分解式和坐标及其在 Oy 轴上的投影。

解 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}=\{1,-5,6\}$，$\overrightarrow{OB}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\{x,y,z\}$

向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 在 Oy 轴上的投影分别为 -5，y。

1.2.5 利用坐标作向量的线性运算

利用向量的坐标，可以得到向量的加法、减法以及数乘向量的运算如下：

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，即

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}\qquad \boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$$

λ 为实数，根据向量加法的交换律，数乘向量的结合律和分配律，得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2)\boldsymbol{i}+(y_1-y_2)\boldsymbol{j}+(z_1-z_2)\boldsymbol{k}$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}$$

或

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\}$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2\}$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}$$

推论 1 两个向量 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ 互相平行的充要条件是

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}\tag{1-2}$$

事实上，根据定理 1-1，当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$ 时，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行相当于存在惟一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，坐标表达式为

$$\{x_2,y_2,z_2\}=\lambda\{x_1,y_1,z_1\}$$

即

$$\{x_2,y_2,z_2\}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}$$

根据两个向量相等的定义，得式(1-2)。

【例 1-8】 设 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,3\}$，$\boldsymbol{b}=\{5,2,-1\}$，求 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$。

解
$$\begin{aligned}2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}&=2\{1,-2,3\}-3\{5,2,-1\}\\&=\{2,-4,6\}-\{15,6,-3\}\\&=\{-13,-10,9\}\end{aligned}$$

【例 1-9】 已知空间中两个点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 坐标分解式

和坐标。

解 根据向量减法(图 1-14),得

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\{x_2,y_2,z_2\}-\{x_1,y_1,z_1\}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$
$$=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

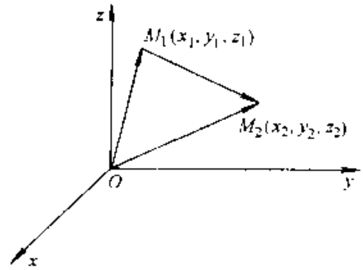

图 1-14

【例 1-10】 已知空间中两个点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,实数 $\lambda\neq-1$,在直线 M_1M_2 上求点 M,使

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$$

解 设点 M 的坐标为 $M(x,y,z)$,则根据例 1-9,得

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\},\lambda\overrightarrow{MM_2}=\lambda\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}$$

根据$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$,得

$$\begin{cases}x-x_1=\lambda(x_2-x)\\y-y_1=\lambda(y_2-y)\\z-z_1=\lambda(z_2-z)\end{cases},\text{解得点 } M \text{ 的坐标为}\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\\z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\end{cases}$$

其中点 M 称作有向线段$\overrightarrow{M_1M_2}$的 λ 分点。特别地,当 $\lambda=1$ 时,得线段 M_1M_2 的中点的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

1.2.6 向量的模和方向角

1. 向量的模

设向量 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$,作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,如图 1-13 所示。根据模的定义知,$\boldsymbol{r}$ 的模$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|$就是点 $M(x,y,z)$到原点 $O(0,0,0)$的距离,即

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

设有空间中两个点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,则点 M_1 和 M_2 间的距离就是向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模,即

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

【例 1-11】 已知空间中两个点 $M_1(4,0,5)$和 $M_2(7,1,4)$,求与向量$\overrightarrow{M_1M_2}$同向的单位向量$\boldsymbol{a}^{\circ}$。

解 根据例 1-9,得

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{7-4,1-0,4-5\}=\{3,1,-1\}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{11}$$

故与向量$\overrightarrow{M_1M_2}$同向的单位向量为

$$a^\circ=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{1}{\sqrt{11}}\{3,1,-1\}$$

2. 向量的方向角和方向余弦

用坐标表示向量的方向的一种方法是用方向角。向量 $\boldsymbol{r}$ 分别与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的正向的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角，并规定 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi$。以后凡谈到两个向量的夹角，都遵从此规定。当一个向量的三个方向角确定了，此向量的方向也就确定了（见图 1-15）。

但是，用坐标计算方向角比较复杂，改用方向角的余弦表示方向。向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角 α,β,γ 的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦。由于方向角都在 0 到 π 之间，所以当方向余弦确定了，则方向角就确定了，从而向量的方向也就确定了。因此，可以用方向余弦来表示向量的方向。

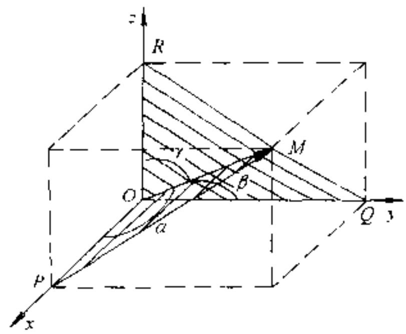

图 1-15

设向量 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，从图 1-15 可以看到，在三个直角 $\triangle OPM$、$\triangle OQM$、$\triangle ORM$ 中，$\angle OPM=\angle OQM=\angle ORM=90°$，所以

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$

或者可以表示成

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

直接验证可知

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

与向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$同向的单位向量

$$\boldsymbol{r}^\circ=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\left\{\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

【例 1-12】 设向量 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,2\}$，求 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦和与它同向的单位向量。

解 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$，则 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\cos\beta=-\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{2}{3}$$

与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量

$$\boldsymbol{a}^\circ=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}$$

【例 1-13】 已知一向量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦 $\cos\alpha=\frac{2}{7},\cos\gamma=\frac{3}{7}$，又知 $\boldsymbol{a}$ 与 y 轴的夹角是钝角，求 $\cos\beta$。

解 由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，得