21 世纪高等院校教材

大学数学教程

第一册：一元函数微积分与无穷级数

韩旭里 主编

韩旭里　刘碧玉　李军英 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

大学数学教程

第一册:一元函数微积分与无穷级数

韩旭里　主编

韩旭里　刘碧玉　李军英　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是大学数学教程系列教材的第一册(一元函数微积分与无穷级数),内容包括函数及其图形、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、应用数学模型.本书体系新颖,结构严谨,内容丰富,叙述清晰,重点突出,难点分散,例题典型.重视对学生分析、推理、计算和应用数学能力的培养.

本书可作为高等学校理工科非数学专业本科生的高等数学课程教材或教学参考书,也可供科学研究与工程技术人员学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程:第一册·一元函数微积分与无穷级数/韩旭里主编;韩旭里等编.—北京:科学出版社,2004

21世纪高等院校教材

ISBN 7-03-013323-4

Ⅰ.大… Ⅱ.①韩…②韩… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第043095号

责任编辑:李鹏奇/责任校对:钟 洋

责任印制:安春生/封面设计:黄华斌 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2005年1月第二次印刷 印张:24 1/4

印数:7 001—10 000 字数:462 000

定价: 29.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

大学数学教程

韩旭里　主编

第一册　一元函数微积分与无穷级数
韩旭里　刘碧玉　李军英　编

第二册　线性代数与空间解析几何
刘伟俊　亢保元　杨文胜　编

第三册　多元函数微积分与常微分方程
秦宣云　刘旺梅　刘碧玉　编

第四册　概率论与数理统计
王家宝　陈亚力　裘亚峥　编

前　言

大学数学课程是高等教育中最基础和最重要的课程之一，各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学.为了适应科学技术进步的要求，培养高素质的人才，我们在各级教育主管部门领导的支持下，进行了多年的大学数学教学改革实践.我们进行教学改革的特点是：根据大学数学基础课程的内在联系，突破原有课程的界限，将微积分、线性代数、空间解析几何、概率论、数理统计、应用数学模型的内容有机结合，加强相互渗透，加强数学思想方法的教学，加强应用数学能力的培养，统一开设大学数学课程.按照这种教学改革的思想，我们组织编写了一体化数学教材，并经过了多年的教学实践，效果是让人满意的.现在，我们在原教材的基础上，广泛吸取国内外知名大学的教学经验，并进一步改进，出版了这套系列教材.

本系列教材的目标定位是作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课的教材，内容经选择也适用于对数学要求较高的其他各类有关专业的数学课程教学.本系列教材全部内容按大约260学时的教学计划编写.对于学时安排较少的专业，可根据要求选择使用.对全部教学内容，建议按三个学期整体安排.

本系列教材，在数学观点和思想方法上，全书贯穿集合、向量及映射的概念，体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想.在内容体系上，进一步理顺了内容之间的关系，整体优化，强调分析、代数、几何的有机结合.对大学数学基础内容统一安排教学，既有利于学生对知识的理解与深化，又能使大学数学的基本内容在教学管理、教师选课和学生选课上，保持同等重要和重视的地位.在知识巩固和应用数学能力的培养上，除了精心选取例题和练习外，每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章，内容原则上只用到前面所学的知识，可以供在相关章节中选讲，以培养学生的应用意识和提高学习兴趣，提高学生分析问题和解决问题的能力.

本系列教材是“湖南省普通高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”重点资助项目的研究成果的延续，得到了“湖南省高等教育21世纪课程教材”立项资助和“中南大学教育教改研究项目”的立项资助.在此，向对本系列教材的编写与出版给予帮助和支持的同志表示衷心感谢.

由于编者水平有限，若有不妥与错误之处，恳请专家、同行和读者不吝指正.

编　者

2004年3月

目　录

第 1 章　函数及其图形

本书的核心内容是微积分.微积分研究的对象是函数,为了准确而深刻地理解函数概念,集合、映射的知识是不可缺少的.本章将简要地介绍一些逻辑符号,集合和映射的一些基本概念,在此基础上重点介绍函数的概念及其图形.

1.1　逻辑符号与逻辑命题

很多数学概念写成包含有某些逻辑符号的表达式形式会带来方便,本节将简要地介绍一些常用的逻辑符号与逻辑命题.

1.1.1　逻辑符号

符号 $\forall$ 称为全称量词,它可用来代替"对于任何的"、"对于一切的"、"不论对于什么样的"等语句.

符号 $\exists$ 称为存在量词,它可用来代替"存在"、"可找到"、"有"等语句.

除了全称量词 $\forall$ 与存在量词 $\exists$ 外,还常常利用逻辑推理的符号"$\Rightarrow$"及等价符号"$\Leftrightarrow$".符号"$\Rightarrow$"表示"推出"(一个命题由另一个推出),"$\Leftrightarrow$"表示在它两边的命题等价.

1.1.2　逻辑命题

一个命题就是一个陈述句.这个句子陈述的事情或者是真的,或者是假的.我们用字母 A,B,C 等来表示命题.

如果从命题 A 成立,能推出命题 B 正确,那么 A 就称为 B 的充分条件,而 B 就称为 A 的必要条件.这个事实可写成 $A\Rightarrow B$,即"由 A 推出 B".如果 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$,那么 A 称为 B 的充分必要条件,或 B 称为 A 的充分必要条件,也称 A 与 B 等价,记为 $A\Leftrightarrow B$.

与某命题 A 相反的命题,称为 A 的否定,记作 $\neg A$,显然对于非 A 的否定就是 A,即 $\neg(\neg A)=A$.

假定对于一切 $x\in M$(表 x 属于 M)有某性质 $\alpha(x)$ 成立,简记为 $\forall x\in M$: $\alpha(x)$.

这个命题的否定是:"至少可以找到一个元素 $x^*\in M$,使 $\alpha(x^*)$ 不成立".即 $\neg\alpha(x^*)$ 成立.

可以证明关系式:

$$\neg\ (\forall x \in M{:}\alpha(x)) \Leftrightarrow \exists x^* \in M{:}\neg\ \alpha(x^*),$$

即在否定从量词$\forall$开始的表达式时,结果$\forall$要用量词$\exists$来代换,而否定符号则转移到性质 $\alpha(x)$上,类似有

$$\neg\ (\exists x^* \in M{:}\beta(x^*)) \Leftrightarrow \forall x \in M{:}\neg\ \beta(x),$$

即在否定从量词$\exists$开始的表达式时,结果$\exists$要用量词$\forall$来代换,而否定符号转移到性质 $\beta(x)$上.

定理 1.1.1 当且仅当命题$\neg\ B \Rightarrow \neg\ A$ 成立时,命题 $A \Rightarrow B$ 成立,即

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg\ B \Rightarrow \neg\ A.$$

证 设 $A \Rightarrow B$,假定$\neg\ B$ 成立,如果在此情况下 A 成立,则由条件 $A \Rightarrow B$ 便可推得$\neg\ B \Rightarrow B$,而这是不可能的,所以有$\neg\ B \Rightarrow \neg\ A$.

反之,设$\neg\ B \Rightarrow \neg\ A$,由上面已证的事实,$\neg\ (\neg\ A) \Rightarrow \neg\ (\neg\ B)$,即 $A \Rightarrow B$.

这个定理实际上是反证法的理论根据.今后,当证明直接命题 $A \Rightarrow B$ 比证明其等价命题$\neg\ B \Rightarrow \neg\ A$ 困难时,将采用反证法.

我们还规定:A 与 B 是两个命题,则:

$A \vee B$ 表示命题“A 或B”;

$A \wedge B$ 表示命题“A 且B”.

例 1.1.1 当 $a \neq 0$ 时,$ax^2+2bx+c>0(\forall x \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow a>0, b^2-ac<0$.

1.2 集合与实数集

集合是数学中一个最基本的概念,它在现代数学与工程技术中有着重要的作用.本节将简要地介绍集合的概念及其运算,然后简要介绍实数集及其完备性.

1.2.1 集合及其运算

我们将具有某种确定性质的事物的全体称为一个**集合**,简称**集**.组成集的事物称为该集的**元素**.例如,某大学一年级所有的学生组成一个集合,它的元素是学生;某系统状态的全体组成一个集合,它的元素是状态;实数的全体组成一个实数集,它的元素是实数等等.

通常我们用大写的拉丁字母 $A, B, C, \cdots$表示集合;用小写的拉丁字母 $a, b, c, \cdots$表示集合的元素.

若 a 是集合A 的元素,则称 a 属于A,记作 $a \in A$;若 a 不是集合A 的元素,就称 a 不属于A,记作 $a \notin A$.

两个集合 A 与B,若 B 中的每个元素都是A 中的元素,则称 B 是A 的子集,也称 B 被A 包含,或 A 包含B,记作 $B \subseteq A$. B 是A 的子集也可这样叙述:$B \subseteq A$

$\Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A$.

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A = B$，否则 A 与 B 不相等，记作 $A \neq B$.

若 $B \subseteq A$，且 $A \neq B$，则称 B 是 A 的真子集，记作 $B \subset A$.

含有有限个元素的集合称为**有限集**；不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$；不是有限集也不是空集的集合称为**无限集**.

例如，某大学一年级学生的全体组成的集是有限集，全体实数组成的集是无限集，方程 $x^2+1=0$ 的实根组成的集是空集.

集合的表示法通常有两种，一种是枚举法，即将集合的元素一一列举出来，写在一个花括号内，元素之间用逗号隔开. 例如，由 26 个英文字母组成的集合可表示为

$$A = \{a, b, c, \cdots, y, z\}.$$

另一种是描述法，即把集合中各元素所具有的共同性质写在花括号内来表示这一集合. 例如，

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x, y \text{ 为实数}\}$$

表示 xOy 平面上单位圆周上点的集合. 一般地，若集合 A 是由具有性质 $p(x)$ 的元素 x 组成的，则把它表示为

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p(x)\}.$$

本课程主要涉及的集合有区间、邻域、区域、空间等等. 今后，我们用 **N** 表示全体自然数集，**Z** 表示全体整数集，**Q** 表示全体有理数集，**R** 表示全体实数集.

设 A, B 是两个集，由属于 A 或属于 B 的所有元素构成的集称为 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由同时属于 A 与 B 的元素构成的集称为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集称为 A 与 B 的差集，记作 $A - B$，即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

两个集合的并、交、差如图 1-1 所示阴影部分.

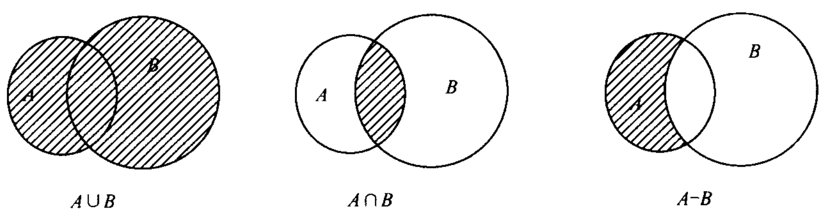

图 1-1

在研究某个问题时,如果所考虑的一切集都是某个集 X 的子集,则称 X 为基本集.若 A 是 X 中任意集,则差集 $X-A$ 常简称为 A 的补集或余集,记作 $\mathscr{C}A$.

两个集的并集与交集可以推广到任意多个集的并集与交集.若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 不相交,若 $A\cap B\neq\varnothing$,则称 A 与 B 相交.

集合的交、并、余的运算满足下面的基本性质:

定理 1.2.1　设 A,B,C 为三个任意集合,则:

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律:

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C),$$
$$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C);$$

(4) 幂等律:$A\cup A=A$,$A\cap A=A$;

(5) 吸收律:$A\cup\varnothing=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$.

定理 1.2.2　设 $A_i(i=1,2,\cdots)$为一列集,则:

(1) 若 $A_i\subseteq C(i=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\subseteq C$;

(2) 若 $A_i\supseteq C(i=1,2,\cdots)$,则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\supseteq C$.

定理 1.2.3　设 X 为基本集,$A_i(i=1,2,\cdots)$为一列集,则

$$\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i,\quad \mathscr{C}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$$

即一列集的并的余集等于它们余集的交,一列集的交的余集等于它们余集的并.

以上定理根据集合并、交、差以及集合相等的定义都可验证.这里我们来证明定理 1.2.3 的第一个结论,其余证明留给读者作练习.

设 $x\in\mathscr{C}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)$,则 $x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,从而 $x\notin A_i(i=1,2,\cdots)$,即 $x\in\mathscr{C}A_i(i=1,2,\cdots)$,于是 $x\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$,故 $\mathscr{C}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)\subseteq\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$.

反之,设 $x\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$,则 $x\in\mathscr{C}A_i(i=1,2,\cdots)$,从而 $x\notin A_i(i=1,2,\cdots)$,即 $x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,于是 $x\in\mathscr{C}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)$,故 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i\subseteq\mathscr{C}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)$.

因此

$$\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i.$$

设 A,B 是两个非空集合,且 $x\in A$,$y\in B$,则称有次序的一对元素 x,y 为一个序偶,记作(x,y).由集合 A,B 中所有元素作成的序偶构成的集合,称为 A 与

B 的 Cartesian 乘积,记作 $A \times B$,即

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

例如,$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$表示整个坐标平面,记作 $\mathbf{R}^2$,即 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

1.2.2 实数集及其完备性

我们把全体实数构成的集合称为实数集,并用 $\mathbf{R}$ 表示.本段仅从几何直观上简要介绍实数集的性质,区间集以及实数集的完备性.

1. 实数集的性质

实数集具有下列基本性质:

(1) 任意两个实数的和、差、积、商(要求分母不为零)仍是实数.

此性质称为实数集对四则运算(即加、减、乘、除)是封闭的.

(2) 任意两个实数 a 与 b,必满足且仅满足下列关系之一:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b,$$

且若 $a<b$,$b<c$,则 $a<c$.

此性质说明实数集是有序集.

(3) 任意两个实数之间仍有实数.

此性质称为实数集是稠密集.特别地,有理数和无理数在实数集中是稠密的,即任意两个有理数之间必有有理数,任意两个无理数之间必有无理数.

在实数集内,有下列常用不等式.

实数 a 的绝对值 $|a|$ 定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

容易推出三角形不等式:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|,$$
$$||a| - |b|| \leqslant |a-b|.$$

利用数学归纳法不难证明:任意 n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足不等式

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

2. 常量与变量

在日常生活与科学技术中存在着各种不同的量.例如,长度、面积、体积、时间、速度、温度等等.在某一变化过程中,有些量不发生任何变化,即始终保持固定的数值;而有些量则不断地发生变化,即可以取各种不同的数值.数学上,把那些在某一过程中保持数值不变的量称为**常量**,通常用 $a, b, c, \cdots$ 表示;而把那些不断变化,可以取各种不同数值的量称为**变量**,用 $x, y, z, \cdots$ 表示.例如,一辆正在行驶的客

车,车内的乘客数是常量,而汽车的运行速度是变量.

在数轴上,常量表示定点,而变量表示动点.

3. 区间与邻域

设 a,b 为两实数,将满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数组成的数集称为**开区间**,记作(a,b),即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\},$$

a 称为开区间(a,b)的左端点,b 称为开区间(a,b)的右端点,这里 $a\notin(a,b)$且 $b\notin(a,b)$.

类似地,称数集

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\},$$

为**闭区间**,a,b 也分别称为闭区间$[a,b]$的左、右端点,这里 $a\in[a,b]$且 $b\in[a,b]$.

称数集

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$$

和

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$

为**半开半闭区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**,数 $b-a$ 称为区间的**长度**.此外还有无限区间:

$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R},$$
$$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\},$$
$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\},$$
$$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\},$$

等等.这里记号“$-\infty$”与“$+\infty$”分别表示“负无穷大”与“正无穷大”.

邻域也是常用的一类数集.

设 x_0 是一个给定的实数,δ 是某一正数,称数集

$$\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

为**点 x_0 的 δ 邻域**,记作 $U(x_0,\delta)$.称点 x_0 为此邻域的中心,δ 为此邻域的半径(如图 1-2).

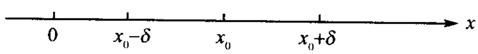

图 1-2

称 $U(x_0,\delta)-\{x_0\}$为 **x_0 的去心 δ 邻域**,记作 $U(\bar{x}_0,\delta)$,即

$$U(\bar{x}_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

当不需要指出邻域的半径时,我们用 $U(x_0)$,$U(\bar{x}_0)$分别表示 x_0 的某邻域和 x_0 的某去心邻域.

4. 实数集的完备性与确界存在定理

由于任何一个实数都对应数轴(如图 1-3)上唯一的一个点,反之,数轴上任何一个点都有唯一一个实数与之对应,因此实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴 Ox 上的点是一一对应的.实数集的这个特性称为实数集的**连续性**或**完备性**.

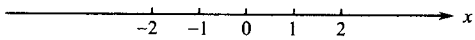

图 1-3

正因为这样,今后我们将对实数与数轴上的点不加区分.实数集也称为一维点集.

有理数集不能与坐标轴上的所有点一一对应,因此,有理数集是不完备的.

实数集的完备性是实数的最基本的属性之一,下一章将要讲述的极限就是建立在实数集完备性的基础上.

为了刻画实数集的完备性,我们引进确界的概念.

定义 1.2.1 设 A 为一非空实数集,若 $\exists L\in\mathbf{R}$,使得 $\forall x\in A$,都有 $x\leqslant L$,则称 ***A* 有上界**,常数 L 称为 A 的一个上界;若 $\exists l\in\mathbf{R}$,使得 $\forall x\in A$,都有 $x\geqslant l$,则称 ***A* 有下界**,常数 l 称为 A 的一个下界;若 A 既有上界又有下界,则称 A 有界,否则,称 A 无界.

容易证明:A 有界$\Leftrightarrow\exists M\in\mathbf{R},M>0$,使得 $\forall x\in A$,都有$|x|\leqslant M$.

显然,一个数集若有上界(或下界),则必有无穷多个上界(或下界).我们自然要问,这无穷多个上界(或下界)中是否存在一个最小的上界(或最大的下界)?所谓最小上界(或最大下界),首先是上界(或下界),但将它减去一个不论多么小的正数(或将它加上一个不论多么小的正数)就不再是上界(或下界)了,由此就得到上(下)确界概念.

定义 1.2.2 设 $A\subseteq\mathbf{R},A\neq\varnothing$,若 $\exists\beta\in\mathbf{R}$(或 $\alpha\in\mathbf{R}$)满足条件:

(1) $\forall x\in A$,都有 $x\leqslant\beta$(或 $x\geqslant\alpha$);

(2) $\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in A$,使 $x_0>\beta-\varepsilon$(或 $x_0<\alpha+\varepsilon$),则称 β 为数集 A 的**上确界**,α 为 A 的**下确界**,记作

$$\beta=\sup A,\quad \alpha=\inf A.$$

容易证明,如果一个数集的上确界(下确界)存在,那么它必定唯一.

如定义 1.2.2 所述,上确界(下确界)只是最小上界(或最大下界)的一种精确

的数学描述.那么有上界(或下界)的数集是否一定存在上确界(或下确界)呢? 下面从几何直观上论述这个问题.

例如,若 $A=[1,2)$,则显然 2 是 A 的上确界,1 是 A 的下确界. 又如,$A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$的上确界是 1,下确界是 0.

实际上,若 A 是一个非空的有上界的实数集,当 A 中的点(实数)向上界方向移动,由于所有上界是连续分布的实数,因此,直观上不难想象,在数轴上必定存在这样一点,在它的右边不再有 A 中的元素,而在这一点的左边的元素(实数)都不是 A 的上界,这一点所对应的实数就是 A 的上确界. 对于非空有下界的实数集也有同样的情况. 这就是说,直观上,非空有上界(或下界)的数集必有上确界(或下确界). 我们将这个事实不加证明地叙述如下,并称之为确界存在定理.

定理 1.2.4　任一有上(下)界的非空实数集 A 必有上(下)确界.

上、下确界统称为确界. 确界存在定理只在实数集内成立,而在有理数集内是不成立的.

如果数集 A 没有上(下)界,自然也没有上(下)确界,对于这种情况,我们规定

$$\sup A=+\infty \quad (\inf A=-\infty).$$

习　题　1.2

1. 假定 $A=\{x \mid 0<x<1, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 2, x\in\mathbf{R}\}$,求 $A\cap B$, $A\cup B$, $B-A$.

2. 设 A 为平面上平行四边形的全体,B 为矩形的全体,求 $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$.

3. 证明:

(1) $A\cup(A\cap B)=A$;　　(2) $B\subset\mathscr{C}A\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$;

(3) $A-B=A\cap\mathscr{C}B$;　　(4) $A=B\Leftrightarrow A\cup B=A\cap B$.

4. 判断下列结论是否成立:

(1) $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C$;

(2) $A\cap B=A\cap C\Rightarrow B=C$;

(3) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

(4) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

5. 证明:如果一个数集的上确界(或下确界)存在,那么它必定唯一.

6. 设 $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots\right\}$,求 $\sup A$, $\inf A$.

7. 设 $A\subseteq\mathbf{R}$,证明 A 有界$\Leftrightarrow\exists M>0$,使得$\forall x\in A$,恒有$|x|\leqslant M$.

8. 设 A, B 为有界数集,且 $A\subseteq B$. 证明:

(1) $\sup A\leqslant\sup B$;　　(2) $\inf A\geqslant\inf B$.

1.3 映射与函数

映射是现代数学中的一个重要的基本概念.本节我们首先介绍映射的概念,然后用映射的观点讲授函数的概念及其运算性质.

1.3.1 映射的概念

定义 1.3.1 设 A,B 是两个非空的集合.若存在一个对应关系 f,使得对于每个 $x\in A$,通过 f,有唯一确定的 $y\in B$ 与之对应,则称 f 是从 A 到 B 的一个**映射**,或**算子**,记作 $f:A\to B$ 或 $f:x\mapsto y,x\in A$.其中,y 称为 x 在映射 f 下的像,记作 $y=f(x)$.x 称为 y 在映射 f 下的一个原像,A 称为映射 f 的定义域,记作 $D(f)$,A 中所有元素 x 的像 y 的全体所构成的集合称为 f 的值域,记作 $f(A)$,即

$$f(A)=\{y\,|\,y=f(x),x\in A\}.$$

定义中 x 的像是唯一的,但 y 的原像不一定唯一,且 $f(A)\subseteq B$.

映射概念中有两个基本要素,就是定义域和对应关系,定义域表示映射存在的范围,对应关系则是映射的具体表现.

例 1.3.1 设 A 表示某高校大学一年级学生所构成的集合,用一种方法给每个学生编一个学号,B 表示该校一年级学生学号的集合,f 表示编号方法,于是它就确定从 A 到 B 的一个映射 $f:A\to B$.

例 1.3.2 设 $A=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$,$B=\{2,4,\cdots,2n,\cdots\}$.令

$$f:n\mapsto 2n(n=1,2,\cdots),$$

则 f 是一个从 A 到 B 的映射.

例 1.3.3 设 $A=\mathbf{R}^2$,$B=\mathbf{R}\times\{0\}=\{(x,0)\,|\,x\in\mathbf{R}\}$.由对应关系

$$h:(x,y)\in\mathbf{R}^2\mapsto(x,0)\in\mathbf{R}\times\{0\},$$

确定了一个从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}\times\{0\}$ 的映射 h,在几何上,它就是平面上的点到 x 轴上的投影.

设有映射 $f:A\to B$.若 $B=f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$,则称 f 是**满射**.若 f 将 A 中不同的元素映射到 B 中的像也不同,即若 $x_1,x_2\in A$ 且 $x_1\neq x_2$,则 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 是**单射**.若 f 既是满射又是单射,则称 f 是从 A 到 B 的**一一映射**.若 A 与 B 之间存在一一映射,则称 A 与 B 是**一一对应**的.

易知,例 1.3.1 与例 1.3.2 中的映射都是一一映射,而例 1.3.3 中的映射只是满射,但不是单射,从而不是一一映射.有趣的是例 1.3.2 中的 B 是 A 的真子集,但 A 与 B 却是一一对应的,这是无限集的一种特性.

凡与正整数集 $\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 一一对应的集合,均称为**可数集**(或**可列集**).一个无限集,如果不是可数集,就称为**不可数集**.显然集 A 可数的充要条件是,A 中

的所有元素可以排成一无穷序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots.$$

下面介绍复合映射与逆映射的概念.

设映射 $g: A \to B$ 与 $f: B \to C$. 于是有

$$x \in A \xrightarrow{g} u = g(x) \xrightarrow{f} y = f(u) = f(g(x)) \in C.$$

这样,对每个 $x \in A$,经过 $u \in B$,有唯一的 $y \in C$ 与之对应,因此,又产生了一个从 A 到 C 的新映射,记作 $f \circ g: A \to C$,即

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), x \in A.$$

我们称 $f \circ g$ 为 f 与 g 的**复合映射**(如图 1-4).

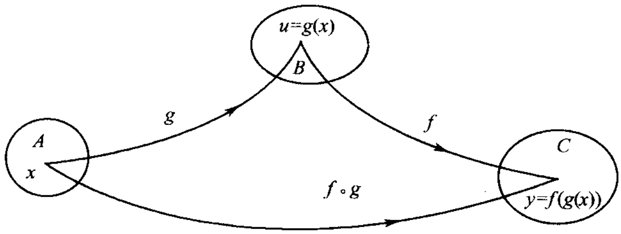

图 1-4

两个映射的复合可推广到有限个映射复合的情形.

设有映射 $f: A \to B$,若存在另一映射 $g: B \to A$,对每个 $y \in B$,通过 g,有唯一的 $x \in A$ 与之对应,且满足关系 $f(x) = y$,则称 g 是 f 的**逆映射**,记作 $g = f^{-1}$.

定理 1.3.1　若映射 $f: A \to B$ 是一一映射,则 f 必存在一个从 B 到 A 的逆映射 f^{-1}.

证　由于 f 是从 A 到 B 的满射知,对每个 $y \in B$,必有 $x \in A$ 与之对应;又 f 是从 A 到 B 的单射,故对每个 $y \in B$,必有唯一的 $x \in A$ 与之对应,且满足 $y = f(x)$,故 f 存在一个从 B 到 A 的逆映射.

1.3.2　函数的概念及其运算

现在,我们利用映射概念来定义函数.

定义 1.3.2　设 A, B 是两个实数集,称映射 $f: A \to B$ 为一元函数,简称**函数**,记作

$$f: x \mapsto y = f(x), x \in A,$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,$f(x)$ 表示函数 f 在 x 处的**函数值**,A 称为函数 f 的**定义域**,记作 $D(f)$;$f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\} \subseteq B$ 称为函数 f 的值域,记作 $R(f)$.