

题源

高中数学

TIYUAN

与各种版本的高中课程教材配套使用

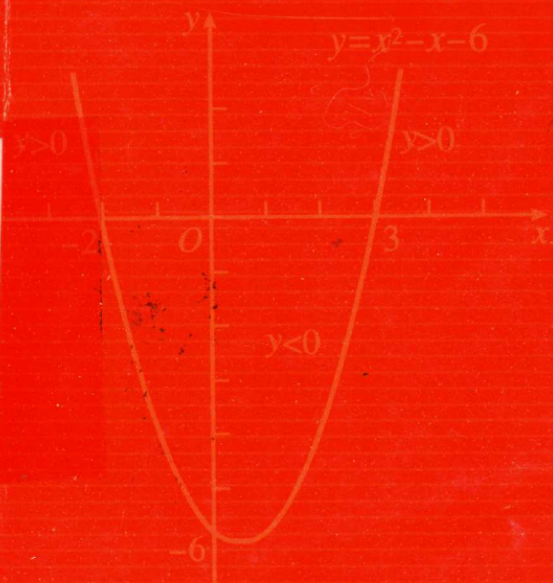
立体几何

GAOZHONGSHUXUE

丛书主编：傅荣强

本册主编：朱岩

按 专 题 分 册
按 知 识 划 块
按 题 型 归 类
按 方 法 总 结
按 梯 度 训 练



河北教育出版社

北京市东城区图书馆



90296844

立体几何题源

高中数学

丛书主编：傅荣强 本册主编：朱 岩



508 14 03



河北教育出版社

丛书编写委员会

主编：傅荣强

编委：王鸿雁 王家志 于长军 傅荣福 朱 岩
 常 青 金 秋 付明忠 苏金生 牛鑫哲
 宋冰倩 韩丽云 马金凤

本书作者

主编：朱 岩

编者：解凤玲 翟凤霞

责任编辑：赵毅蔚

装帧设计：比目鱼工作室

题源 高中数学 立体几何

出版发行	河北教育出版社 (石家庄市友谊北大街 330 号 http://www.hbep.com)
印 刷	保定市印刷厂
开 本	880 × 1230 1/32
印 张	7.25
字 数	208 千字
版 次	2003 年 12 月第 1 版
印 次	2003 年 12 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 7-5434-2396-0/G · 1963
定 价	8.50 元

版权所有 翻版必究

法律顾问 徐春芳 陈志伟

如有印刷质量问题 请与本社出版部联系调换

联系电话：(0311) 7755722 8641271 8641274



前言

本书名曰“题源”，有两层含义：一是“题”；二是“源”。这里的“题”是指精选的例题、习题，题目讲解的角度新颖独特，避免题海战术；“源”是指出处、源头，即题目的来龙去脉。“题源”即通过追溯源头来了解数以万计的“题”为何抽象成了有限的“题型”，各种“题型”如何提炼出具体的解决“方法”，各种“方法”又如何再落实到具体应用。

目前的教材改革提倡由具体到抽象、由特殊到一般的教育理念，由具体入手，通过具体操作，体会方法延伸，以提高其实用价值。

本套书从实战操作入手，从“题”的角度切入，每本书 224 页的内容，足以让你领略“题”的意境；从“源”的角度着重，讲求“题型”、“方法”归纳的简练，提纲挈领，充分让你体会“源”的韵味。

本套书的设计思路：

1. 按专题分册 本套书以现有的各种版本教材为基础，取材于各种教材的交汇处，按专题分册编写，可与各种版本的教科书配套使用。全套书共计 52 册，包含初、高中的数学、物理、化学、三个学科的 40 个专题，计 40 册；另有按册编写的初、高中语文各 6 册。

2. 按知识划块 每册书的内容即一个专题内容，全书按知识点分成若干讲，使你对本部分知识的脉络框架一目了然。

3. 按题型归类 每一讲按具体内容分成若干题型，使你对本部分知识都包含哪些题型心中有数，避免因不清楚自己对本部分知识掌握的深浅程度而浪费精力。

4. 按方法总结 每个题型都有相应总结出的方法作为解题指导，使你能知其然，还能知其所以然。

5. 按梯度训练 每一讲的例题及习题都是精选的与题型相关的经典题、创新题，其中创新题篇幅约占 30%，大多从具体问题入手，以

探究问题的发展趋势为主,由易到难,循序渐进。

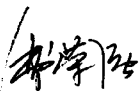
全书栏目设计简单、清晰,具体包括:

1. **题型归纳** 每一讲内容按知识点分布结构归纳成若干题型;
2. **方法概述** 每一个题型后紧随针对此题型的具体解题方法;
3. **例题设计** 每一个方法后是阐述此方法应用的经典例题;
4. **解法点评** 每组例题后相应都有关于此方法适用程度的点评;
5. **要点提示** 解题过程中间或有插入提示指点迷津;
6. **习题配备** 每讲后都配有为巩固本讲知识内容而设置的习题,后附答案与提示。

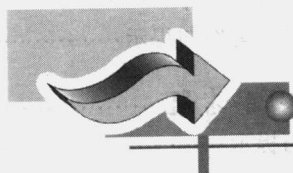
书由“越学越厚”到“越学越薄”,表明接受知识由难到易的进程,本书教你“越学越薄”的办法。俗语说“万变不离其宗”,宗在哪儿?本书旨在告诉大家如何从源头找到解决各种复杂问题的思路,体味什么是真正的“举一反三”。

“问渠哪得清如许,为有源头活水来”。最近几年的中、高考命题,向综合性、多元化、实用性方向发展,如何把握命题方向,从最简单的角度切入复杂问题当中,从而把复杂问题分解、简化,逐一解决,这是本书要着意顾及的。愿本套书的编写模式,能使你不再不知道学得是否到位,不再对新题型懵懵懂懂,不再对难题发怵。

本套书经过近百位一线教师近一年的努力,终于功成。使我们感到欣慰的是本书从整体框架设计、题型结构设计,到例题、习题选取、讲解梯度,都达到了我们设想的最佳水准。当然,因为种种原因,书中还有一些不尽如人意之处,欢迎广大读者提出宝贵意见。



2004 年元月



目 录

第一讲	空间图形的画法	(1)
	习题一 答案与提示	(9)
第二讲	平面的基本性质	(14)
	习题二 答案与提示	(26)
第三讲	空间直线	(30)
	习题三 答案与提示	(49)
第四讲	空间直线与平面	(56)
	习题四 答案与提示	(95)
第五讲	空间两个平面	(99)
	习题五 答案与提示	(131)
 回顾	空间图形的画法 平面的基本性质 空间直线 空间直线与平面 空间两个平面	(137)
	练习 答案与提示	(146)
第六讲	棱 柱	(152)
	习题六 答案与提示	(170)
第七讲	棱 锥	(175)
	习题七 答案与提示	(187)
第八讲	球	(190)
	习题八 答案与提示	(196)



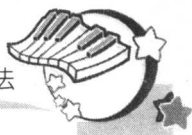
棱柱 棱锥 球.....(199)

练习 答案与提示.....(207)



总复习参考题.....(215)

答案与提示.....(218)



第一讲 空间图形的画法



本讲题型

序 号	题 型
1	水平放置的平面的画法
2	正三角形、正方形、正六边形的画法
3	正方体的画法
4	以正方体为参照物画空间图形

题型

1 水平放置的平面的画法

方法 (1)画平行四边形表示平面

在立体几何中,我们画平行四边形表示平面,平行四边形的锐角画成 45° ,横边画成邻边的 2 倍长,这样的平面表示水平放置的平面.

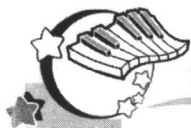
水平放置的平面在空间的相对位置,好比我们生活中的书桌面、地面、平静的水面……

(2)实线、虚线的约定

空间图形中的线,无论是题目中原有的线还是后引的辅助线,没有先后顺序之分,用肉眼能够看得见的线就画成实线,否则,画成虚线或不画线.

【例 1】 解答下列各题.

(1)选择一个适当的角度,画两个平面 α 与 β ,使得 α 是水平平面,表示 α 的平行四边形横边长为 2.4cm,且 α 与 β 相互被遮住一部分,要求“被遮部分”画成“虚线”;



(2)画两个平面 α 与 β , 使得 α 是水平平面, 且 α 与 β 相互被遮住一部分, 要求“被遮部分”不画线.

画法 (1)如图 1-1(1), 由已知, α 是水平平面, 表示 α 的平行四边形横边长为 2.4cm. 按水平放置的平面的画法规则, 表示 α 的平行四边形的“邻边”长为 1.2cm, “锐角”为 45° ; α 与 β 相互被遮住的部分画成虚线, 成图见图 1-1(1);

(2)见图 1-1(2).

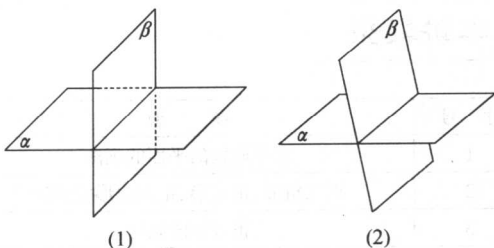


图 1-1



点评

本例涉及的画法规则, 是对水平放置的平面而言的, 看上去很简单, 其实不然, 今后无论是画什么样的空间图形, 都必须先对水平放置的部分图形定位, 然后再去画图形的其他部分, 因此说, 学习水平放置的平面的画法, 是学习画空间图形的必由之路, 它是学好立体几何的始点, 也就是“本”.

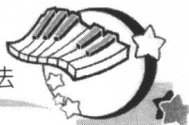
题型 2

正三角形、正方形、正六边形的画法

方法 斜二测画法规则:

(1)在已知图形中取互相垂直的轴 Ox 、 Oy ; 画直观图时, 把它画成对应的轴 O_1x_1 、 O_1y_1 , 使 $\angle x_1O_1y_1 = 45^\circ$ (或 135°), 它们确定的平面表示水平平面;

(2)已知图形中平行于 x 轴、 y 轴的线段 (含落在 x 轴、 y 轴上的线段, 下同) 在直观图中分别画成平行于 x_1 轴、 y_1 轴的线段;



(3) 已知图形中平行于 x 轴的线段, 在直观图中保持长度不变; 平行于 y 轴的线段, 在直观图中长度为原来的一半.

按照这样的画法规则, 我们就可以画出水平放置的正三角形、正方形、正六边形的直观图, 成图的形状要求记忆, 这是学好立体几何的根本.

【例 2】 画出水平放置的边长为 $2a$ 的正三角形、正方形、正六边形.

画法 本例中, 我们采用“斜二测画法”去画水平放置的正三角形、正方形、正六边形的直观图.

先画正三角形的直观图.

如图 1-2(1), $\triangle ABC$ 是边长为 $2a$ 的正三角形.

如图 1-2(2), 取 BC 边所在的直线为 x 轴, 边 BC 的垂直平分线为 y 轴, 这时 A 点落在 y 轴上, 且 $|OA| = \sqrt{3}a$.

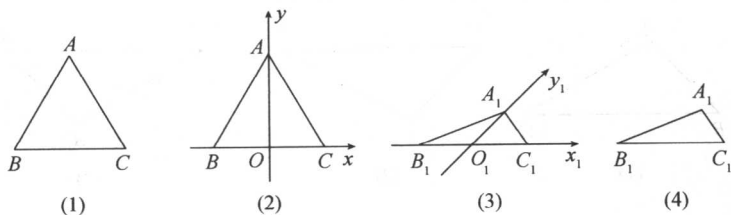


图 1-2

如图 1-2(3), 画出与图 1-2(2) 中 x 轴、 y 轴对应的 x_1 轴、 y_1 轴, 使 $\angle x_1 O_1 y_1 = 45^\circ$. 在 x_1 轴上、 y_1 轴的左右两侧分别取点 B_1 、 C_1 , 使 $|B_1 O_1| = |O_1 C_1| = a$; 在 y_1 轴上、 x_1 轴的上方取点 A_1 , 使 $|O_1 A_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. 连结 $A_1 B_1$ 、 $A_1 C_1$, $\triangle A_1 B_1 C_1$ 就是水平放置的边长为 $2a$ 的正三角形的直观图.

擦去辅助线, 成图见图 1-2(4).

用同样的方法, 可以得到水平放置的边长为 $2a$ 的正方形、正六边形的直观图, 见图 1-3(1)(2).

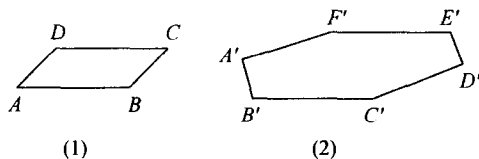
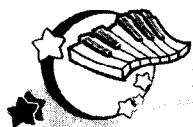


图 1-3



点评

(1) 正三角形、正方形、正六边形在立体几何中的地位

正三角形、正方形、正六边形是空间图形的三个基本模型,很多空间图形中都有它们的身影,不会画这三种图形,和没学过立体几何没什么两样。

除了本例的成图之外,对正三角形,还要掌握它水平放置时的其他形式的成图,用到时,顺手就来,见图 1-4(1)(2)(3);

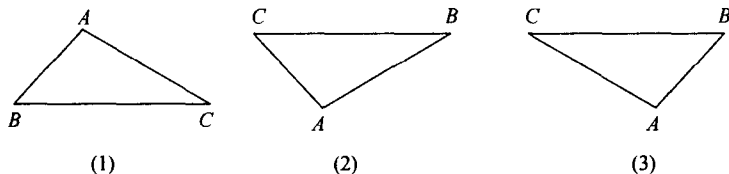


图 1-4

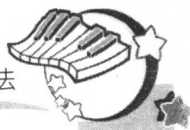
(2) 初学立体几何的人们,要解决的三个观念

学习立体几何,不懂画图,可以说开头就遇到了麻烦,因此,学好立体几何的前提、基础是学好画图,于其中要确立三个观念。

①“空间图形中的‘实线’、‘虚线’没有先后顺序之分”,这是应该确立的第一个观念。

②立体几何中的“直观图”,它的内涵:对于空间形体,用你的肉眼看成什么样就画成什么样,这点和美术的规则是相近或类似的。那么为什么还有“斜二测画法”之说呢?这是因为人们的观察能力不尽相同,而“斜二测画法”恰是人们对这类问题的科学总结。如果人的肉眼和思维没有毛病,那么他观察到的结论与其应当是吻合的。这就是要确立的第二个观念。

③在直观图中,只有人的肉眼主视的铅直平面上的图形才有真实的含义,其图形与原图形是相似或全等的。这是所谓的第三个观念。



题型

3

正方体的画法

方法 水平放置的图形的直观图的画法, 延用“斜二测画法规则”.

在铅直方向上再画一个 z 轴, 它与 x 轴、 y 轴都是垂直的, 铅直方向的画法规则: 平行于 z 轴或落在 z 轴上的线段, 其平行性和长度都不变.

【例 3】 画一个棱长为 1.5 cm 的正方体的直观图.

画法 (1) 画轴. 画 x 轴、 y 轴、 z 轴, 使 $\angle xOy = 45^\circ$, $\angle xOz = 90^\circ$, 见图 1-5(1).

(2) 画上、下面. 按 x 轴、 y 轴画正方形的直观图 $ABCD$, 见图 1-5(2).

(3) 画铅直方向的棱. 过 A 、 B 、 C 、 D 四点分别作 z 轴的平行线段 (含落在 z 轴上的线段) AA_1 、 BB_1 、 CC_1 、 DD_1 , 使它们都等于正方体的棱长, 见图 1-5(3).

(4) 成图. 顺次连结 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 , 就得到正方体 $A_1B_1C_1D_1 - ABCD$ 的直观图, 见图 1-5(4).

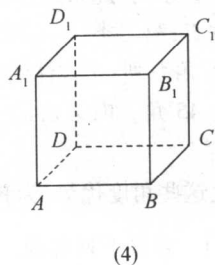
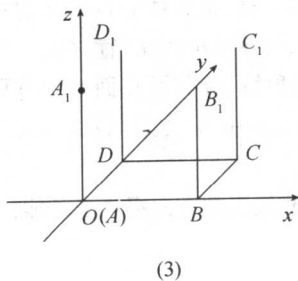
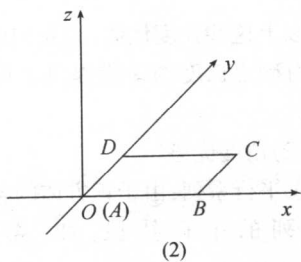
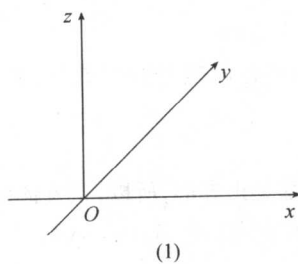
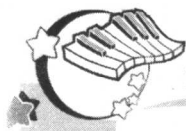


图 1-5



正方体是空间图形的模型之“王”，很多空间图形问题都是由它派生出来的，图形画得准确与否，直接影响解决问题的成败。

题型

4

以正方体为参照物画空间图形

方法 以正方体为参照物画空间图形，优势主要表现在两个方面。参看图 1-6，设正方体的棱长为 a 。

(1) 长度优势

① 正方体的 12 条棱的长都是 a 。

② 正方体的各个面的对角线的长都是 $\sqrt{2}a$ ，如： AC 、 BD 、 A_1B 、 A_1D 、 BC_1 ……

③ 正方体的对角线的长是 $\sqrt{3}a$ ，如： A_1C ……

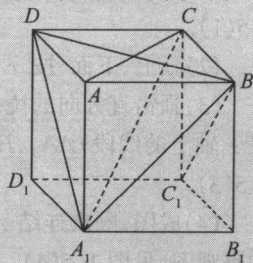


图 1-6

以上这些长度优势，为我们画出各个方向上具有确定长度的线段提供了可能，只不过就是“截取”或“延长”线段罢了。

(2) 角度优势

① 平行系列：由于正方体的各个面都是正方形，所以，正方体中存在一系列的平行线段，如： $AB \parallel DC$ ， $AB \parallel A_1B_1$ ， $AA_1 \parallel BB_1$ ， $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ ……

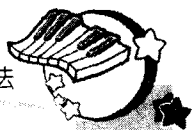
② 垂直系列：此系列分为两大类，第一类，正方体的各个面的相邻两边互相垂直；第二类，正方体的各个面的两条对角线互相垂直。

③ 45°角系列：正方体的各个面的对角线，分其所在面的正方形的内角为两个 45°角，如： $\angle BAC = \angle ACB = \angle AA_1B = \angle DA_1D_1 = \angle BC_1B_1 = 45^\circ$ ……

以上这些角度优势，为我们把握一些线段的方向提供了可能。

【例 4】 解答下列各题。

(1) 三条线段 AB 、 AC 、 AD 两两互相垂直， $AB = AC = 2$ ， $AD = 1$ ，连结



BC 、 CD 、 DB 后可得一个几何体,画出这个几何体的直观图;

(2)在水平放置的平面内,画出一个等腰直角三角形,其腰的长是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

画法 (1)如图 1-7(1),在棱长为 2 的正方体 $PQRS - P_1Q_1R_1S_1$ 中,
 PQ 、 PS 、 PP_1 两两互相垂直,且 $PQ = PS = 2$.

取 PP_1 的中点 P_2 ,则 $PP_2 = 1$.

用“ $\longrightarrow$ ”表示点与点的对应,建立对应如下:

$$P \longrightarrow A, Q \longrightarrow B, S \longrightarrow C, P_2 \longrightarrow D,$$

而后立即得到所求作的几何体,成图见图 1-7(2);

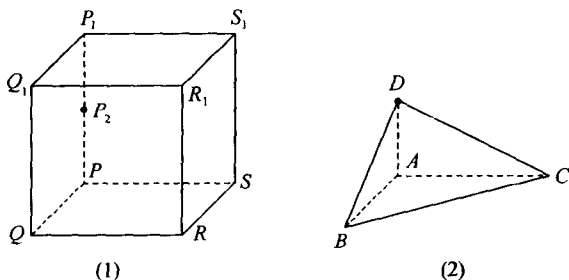


图 1-7

(2)先画出一个水平放置的正方形,其边长是 1,再连结两条对角线,并设它们的交点是 P ,见图 1-8(1).

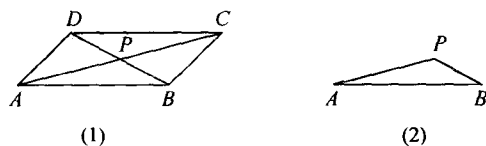


图 1-8

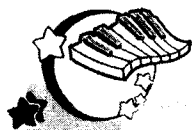
如图 1-8(1),正方形 $ABCD$ 的边长是 1,
 所以,对角线 $AC = BD = \sqrt{2}$,且 $AC \perp BD$.

又 P 是 AC 、 BD 的交点,

所以, $PA = PB = \frac{\sqrt{2}}{2}$,且 $PA \perp PB$,

所以, $\triangle PAB$ 就可以作为所求作的三角形,成图见图 1-8(2).

【例 5】 如图 1-9(1),沿正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 把 $\triangle ABD$ 折起,



立体几何

使 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 分别在铅直平面内和水平平面内,画出这个图形.

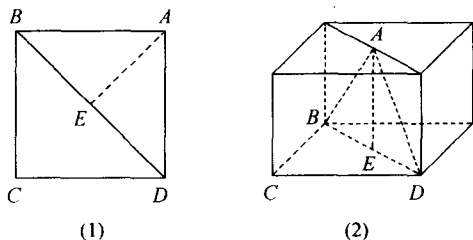


图 1-9

画法 (1)在图 1-9(1)所示的正方形中,作 $AE \perp BD$ 于 E .

(2)如图 1-9(2),以正方形 $ABCD$ 为下底面,以 AE 为高,作一个长方体,折起 $\triangle ABD$ 以后, A 点恰好是长方体的上底面的一条对角线的中点,成图由图 1-9(2)中的 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 组成.

8



点评

(1)以长方体为参照物画空间图形,是以正方体为参照物画空间图形的拓展,两者的本质都是一个几何图形相对于另一个几何图形的嵌入或分离;

(2)以正方体、长方体为参照物画空间图形,解决长度、角度两大难点仍是“标”,“本”是培养读者的空间想象能力.

【例 6】 图 1-10 是上下底面处在水平状态下的棱长为 2cm 的正方体的直观图,比例尺为 $1:1$. 回答下列问题:

(1)线段 AB_1 在图中、实物中的长度是多少? $\angle AB_1A_1$ 在图中、实物中的度数是多少?

(2)在实物中, $\angle ABC$ 、 $\angle AEB$ 、 $\angle BEC$ 、 $\angle ABD$ 、 $\angle CBD$ 的度数是多少?

(3)线段 BC 在图中、实物中的长度是多少? $\angle AD_1A_1$ 、 $\angle CB_1C_1$ 在实物中的度数是多少?

解 (1)面 AA_1B_1B 处在铅直状态下,其内部的图形为真实图形.

由已知, $AA_1 = A_1B_1 = 2\text{cm}$, $AA_1 \perp A_1B_1$,

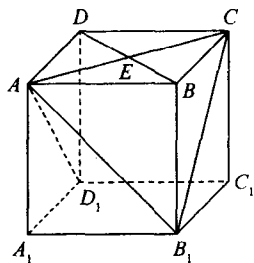
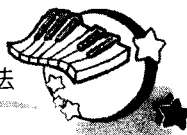


图 1-10



$$\therefore AB_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\text{cm}.$$

$\therefore$ 线段 AB_1 在图中、实物中的长度都是 $2\sqrt{2}\text{cm}$; $\angle AB_1A_1$ 在图中、实物中的度数都是 45° .

(2) 在实物中:

$$\angle ABC = \angle AEB = \angle BEC = 90^\circ;$$

$$\angle ABD = \angle CBD = 45^\circ.$$

(3) 线段 BC 在图中、实物中的长度分别是 1cm 、 2cm ;

$\angle AD_1A_1$ 、 $\angle CB_1C_1$ 在实物中的度数都是 45° .



点评

本例是本书作者自己编写的,用心在于教会读者画空间图形.今后画空间图形时,可以选用正方体为参照物,有关的线段和角的画法,可以参考正方体的上下面、左右面、前后面的线段和角去画.要注意的是(1)正方体的上下面中的图形是依据斜二测画法得来的;(2)正方体的前后面的图形是真实图形;(3)对非作图题,画角时,可参照 45° 角系列,画等角或适当放大(如 60° 的角)、缩小 45° 的角;(4)你数一数,图 1-10 中还有哪些角的度数为 45° ,这是一个系列.

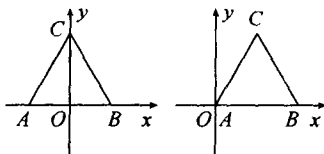
9



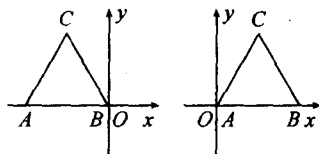
习题一

一、选择题

1. 如图 1-11,在斜二测画法下,边长为 1 的正 $\triangle ABC$ 的直观图不是全等的三角形的一组是 ()



A



B

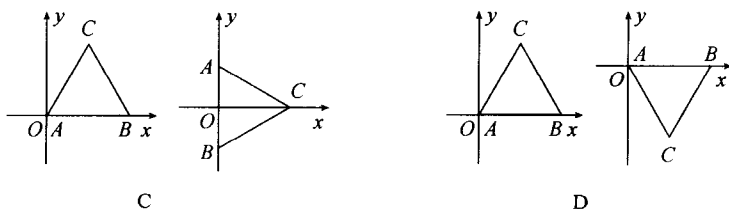
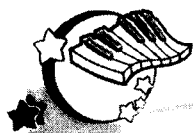


图 1-11

2. 如图 1-12, 用斜二测画法作 $\triangle ABC$ 的直观图得 $\triangle A_1B_1C_1$, 其中 $A_1B_1 = B_1C_1$, A_1D_1 是 B_1C_1 边上的中线. 由图形可知, 在 $\triangle ABC$ (D 是 BC 的中点) 中, 下列四结论正确的是 ()

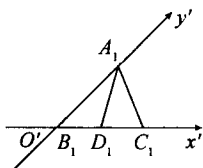


图 1-12

A. $AB = BC = AC$

B. $AD \perp BC$

C. $AC > AD > AB > BC$

D. $AC > AD > AB = BC$

3. 正方体的各个面所在的平面可把空间分成 ()

A. 2 部分 B. 12 部分 C. 18 部分 D. 27 部分

4. 图 1-13 所示的图形中, 画法正确的是 ()

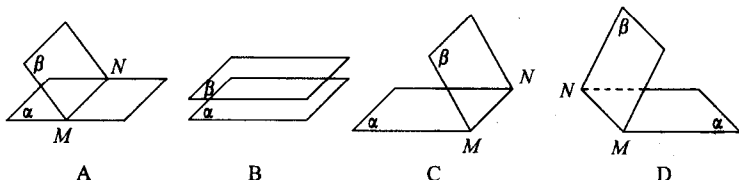


图 1-13

二、填空题

5. 画空间图形, 就是画空间形体的直观图, 其中看得见的线画成_____, 看不见的线画成_____.

6. 在空间图形的直观图中, 肉眼主视的_____平面内的图形, 与其真实图形是全等或相似的几何图形.

7. 在图 1-14 所示的正方体中, 约定:

AB 的走向是左右走向, AD 的走向是前后走向, AA_1 的走向是上下走向.