

透视高考

天利 38 套

2001-2005
最新五年

高考试题分类解析

◆ 全国高考命题研究组 编
北京天利考试信息网

全国学习科学研究会考试研究中心 审

数学

- ◆ 考点归类分析
- ◆ 命题趋向研究

2006
高考必备
畅销

西藏人民出版社

2001~2005
最新五年 透视高考

高考试题分类解析



全国高考命题研究组
北京天利考试信息网 编
全国学习科学研究会考试研究中心 申

数 学



西藏人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

透视高考/北京天利考试信息网编.

-拉萨:西藏人民出版社,2004.8

ISBN 7-223-01701-5

I.透… II.北… III.课程—高中—升学参考资料 IV.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 049513 号

透视高考

——最新五年高考试题分类解析(数学)

作 者 北京天利考试信息网

责任编辑 侯志玲

封面设计 谭仲秋

出 版 西藏人民出版社

社 址 拉萨市林廓北路 20 号 邮政编码 850000

北京发行部:100013 北京市东土城路 8 号林达大厦 A 座 13 层

电 话:010-64466482、64466473、51655511-858

印 刷 北京市江箭印刷有限公司

经 销 全国新华书店

开 本 16 开(787×1092) 字 数 800 千

印 张 41.25

版 次 2005 年 7 月第 2 版第 1 次印刷

标准书号 ISBN 7-223-01701-5/G·722

定 价 45.00 元(全 3 册)

编写说明

有一种现象,有些考生说到课本上的知识头头是道,但在高考题目面前,总是无从下笔;有些考生好像对课本上的知识掌握的不是很准,却在答题时,总能找到命题人的考查意图。造成这种差异的原因,就是考生“考感”的差异,也就是,考生在考试进行状态中,对考题的灵敏而强烈的感觉、感受和感知能力的差异。如何才能提高自己的“考感”成了广大考生特别关注的问题,为此,北京天利考试信息网联合全国学习科学研究会考试研究中心,邀请工作在教学一线的特级、高级教师编写了这套《最新五年高考试题分类解析》。本书通过引导考生分析试题的题型、考试的重点、命题规律、答题思路 and 技巧等方法,让考生逐步提高“考感”,轻松应对高考。

本书主要设置以下的栏目:

【命题趋势】以近5年高考试题中的经典题目为基础,以2006年高考考查要求和最新的高考命题信息为导向,对考点变化、考查角度、考试重点、题型设计进行了全面的评价和预测,以帮助考生明确命题规律和重点,抓住考试基本内容,更积极主动地面对高考。

【应试对策】针对各专题的考点和主要涉及题型的特点,进行了科学、高效的复习方法指导,使考生在第一、二轮复习备考中取得最佳的复习效果。

【试题类编】对近5年高考中常考、典型题目,依照高考考点或题型分布进行分类编排,同时注重了题目能力性、应用性、综合性的发展趋势,既方便考生纵览近5年题目的发展和变化,又满足了考生在了解高考命题方向基础上进行专项训练的要求。

【解题点评】对试题类编中出现的所有题目,从命题角度、考查要点、解题思路等方面进行了全面、系统的点评,帮助考生提升应试水平。

特别说明:1.本书在编排时充分考虑了高考模式、考纲变化及各省市单独命题等各项因素,适用于全国各省市考生;2.试题类编部分所选题目均标明了试题出处,为广大考生备考过程中快捷的检索试题提供了方便;3.与其他版本图书不同,本书将2005年高考试题也按专题进行了分类,考生可以从中得到更新的命题信息;4.本册书命题趋势下的表格,并没有把涉及该专题的所有考题都统计在其中,只选择了典型题目让考生对某知识点在考卷中会以什么题型出现,约占多少分等有一个更直观的了解。

参加本册编写的有:何寅兰,李随心,杨淑娟,孙淑红,刘立新,杨秉会,孙景海等教学一线的教师。

相信本书会成为将要参加高考的你的益友!

编者

2005年7月

Contents



专题一 集合	(1)
专题二 简易逻辑	(5)
专题三 函数与反函数	(9)
专题四 函数的图像及性质	(13)
专题五 二次函数	(19)
专题六 指数函数及对数函数	(23)
专题七 函数的综合问题	(27)
专题八 数列的概念及通项	(35)
专题九 等差数列及等比数列	(41)
专题十 数列求和	(47)
专题十一 数列的综合问题	(53)
专题十二 三角函数的概念	(60)
专题十三 三角函数的变换求值问题	(64)
专题十四 三角函数的图像及性质	(68)
专题十五 解三角形	(72)
专题十六 综合问题	(75)
专题十七 向量的概念及其几何意义	(79)
专题十八 向量的数量积及有关运算	(83)
专题十九 向量的综合问题	(87)
专题二十 不等式的性质与证明	(93)
专题二十一 解不等式	(97)

C 目录 Contents



专题二十二	不等式的最值问题	(101)
专题二十三	不等式综合问题	(105)
专题二十四	直线方程	(109)
专题二十五	圆	(113)
专题二十六	直线与圆	(115)
专题二十七	椭圆	(120)
专题二十八	双曲线	(126)
专题二十九	抛物线	(130)
专题三十	直线与圆锥曲线	(134)
专题三十一	直线与平面	(144)
专题三十二	空间的角和距离	(149)
专题三十三	球	(157)
专题三十四	面积与体积	(161)
专题三十五	排列、组合	(169)
专题三十六	二项式定理	(175)
专题三十七	概率	(179)
专题三十八	概率与统计	(185)
专题三十九	极 限	(193)
专题四十	导数的应用	(197)
专题四十一	复 数	(203)



专题一 集合

【命题趋势】

年份	知 识 点	省 市	题 型	分 值
2005 年	交集的运算	上海春季	填空题	4 分
	全集与子集的概念及集合的运算	全国理	选择题	5 分
	集合元素的属性	湖北理	选择题	5 分
2004 年	子集的概念	浙江理	选择题	5 分
	集合的表示方法及交集运算	安徽理	选择题	5 分
	交集的运算	湖北文	选择题	5 分
2003 年	交集的概念	北京理	选择题	5 分
	交集、补集的概念	上海理	填空题	4 分
2002 年	集合的表示方法及子集的概念	全国理	选择题	5 分
	交集、补集的运算	上海春季	填空题	4 分
2001 年	交集的概念	天津文	选择题	5 分
	交集的概念	上海	填空题	4 分

集合是中学数学最基本的概念之一,基础问题往往体现集合的概念、运算、语言及简单的运用,经常作为工具广泛运用于函数、方程、不等式、三角函数及曲线、轨迹等知识中,在高考中占有重要地位.考纲要求:理解集合、子集、补集、交集、并集的概念,了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.近年的高考题中,集合的考查通常以两种方式出现:(1)考查集合的概念、集合的关系、集合的运算;(2)与其他知识相联系,考查中学数学常见的数学思想,一般以客观题的形式出现,难度不大.

【应试对策】

1. 要准确把握集合的概念,熟练运用集合与集合的关系解决实际问题;
2. 能根据集合元素的性质,尤其是互异性,进行解题后的检验;
3. 注意空集的特殊性,在解题时应特别留心,防止遗漏;
4. 注意数形结合思想(即数轴和韦恩图)的运用;

5. 注意分类讨论、函数与方程、等价转化思想的运用.

【试题类编】

一、选择题

1. (01 天津) 设 $A = \{x | x^2 - x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + x = 0\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
A. 0 B. $\{0, 1, 0, 1\}$ C. $\emptyset$
2. (02 全国) 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ 则 ()
A. $M = N$ B. $M \subsetneq N$ C. $M \supsetneq N$ D. $M \cap N = \emptyset$
3. (03 北京) 设集合 $A = \{x | x^2 - 1 > 0\}$, $B = \{x | \log_2 x > 0\}$ 则 $A \cap B$ 等于 ()
A. $\{x | x > 1\}$ B. $\{x | x > 0\}$
C. $\{x | x < -1\}$ D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$
4. (04 春季高考) 已知向量集合 $M = \{a | a = (1, 2) + \lambda(3, 4), \lambda \in \mathbb{R}\}$,
 $N = \{a | a = (-2, -2) + \lambda(4, 5), \lambda \in \mathbb{R}\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()
A. $\{(1, 1)\}$ B. $\{(1, 1), (-2, -2)\}$
C. $\{(-2, -2)\}$ D. $\emptyset$
5. (04 浙江) 若 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{1, 2\}$, $N = \{2, 3\}$ 则 $\complement_U(M \cup N) =$ ()
A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{2\}$ C. $\{1, 3, 4\}$ D. $\{4\}$
6. (05 全国) 设 I 为全集, S_1, S_2, S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下面论断正确的是 ()
A. $\complement_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \emptyset$ B. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3)$
C. $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \emptyset$ D. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3)$
7. (05 湖北) 设 P, Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P + Q = \{a + b | a \in P, b \in Q\}$. 若 $P = \{0, 2, 5\}$, $Q = \{1, 2, 6\}$, 则 $P + Q$ 中元素的个数是 ()
A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

二、填空题

8. (01 上海) 设集合 $A = \{x | 2 \lg x = \lg(8x - 15), x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x | \cos \frac{x}{2} > 0, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为 _____ 个.
9. (02 上海) 若全集 $I = \mathbb{R}$, $f(x), g(x)$ 均为 x 的二次函数, $P = \{x | f(x) < 0\}$,
 $Q = \{x | g(x) \geq 0\}$, 则不等式组 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ 的解集可用 P, Q 表示为 _____.

10. 【03上海】设集合 $A = \{x \mid |x| < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} =$ _____.

11. 【04湖北】设 A, B 为两个集合, 下列四个命题:

① $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \in B$

② $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

③ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \supseteq B$

④ $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 使得 $x \notin B$

其中真命题的序号是_____. (把符合要求的命题序号都填上)

【解题点评】

1.B 点评: 此题考查了集合的表示方法及交集的概念, 要求考生将集合中的描述法, 改写成列举法, 然后利用交集的定义获解.

$$A = \{x \mid x^2 - x = 0\} = \{0, 1\} \quad B = \{x \mid x^2 + x = 0\} = \{-1, 0\} \quad \therefore A \cap B = \{0\}$$

2.B 点评: 本题主要考查集合间的包含关系, 要求考生先认清它的元素的属性, 进而分析所给集合的涵义, 弄清集合研究的对象及所在范围, 集合间的关系自然就显现出来. 集合 M 的元素为: $x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{4} (k \in \mathbb{Z})$, 集合 N 的元素为: $x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2} = \frac{k+2}{4} (k \in \mathbb{Z})$, 而 $2k+1$ 为奇数, $k+2$ 为整数, 因此 $M \subsetneq N$.

3.A 点评: 本题主要考查了一元二次不等式求解和简单对数不等式求解, 并要求考生能利用数轴求出两不等式解集的交集. $\because x^2 > 1 \quad \therefore x > 1$ 或 $x < -1$, 又 $\because \log_2 x > 0$

$$\therefore \log_2 x > \log_2 1 \text{ 得 } x > 1 \quad \therefore \begin{cases} x^2 > 1 \\ x > 1 \end{cases} \text{ 得 } x > 1$$

本题亦可用排除干扰项 B、C、D 的方法.

4.C 点评: 本题以向量为元素给出两个集合, 考查集合交集的概念及向量相等的条件, 解本题尤其要注意理解两个集合中的 λ 不一定是同一个值, 故解题时应写成 λ_1 和 λ_2 . M 中的元素为 $a = (1+3\lambda_1, 2+4\lambda_1)$, N 中的元素 $a = (-2+4\lambda_2, -2+5\lambda_2)$, 由求 $M \cap N$ 得

$$\begin{cases} 1+3\lambda_1 = -2+4\lambda_2 \\ 2+4\lambda_1 = -2+5\lambda_2 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \therefore \text{两集合的公共元素为 } (-2, -2)$$

5.D 点评: 本题主要考查并集及子集在全集中的补集等知识点, 要求考生熟悉相应的基本概念. $M \cup N = \{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\} \quad \therefore \complement_U(M \cup N) = \{4\}$

6.C 点评: 本题主要考查了全集、子集的概念, 以及交集、并集、补集几种集合的运算. 要

考考生能借助图形或利用等价转化的方法将复杂问题转化为简单问题.

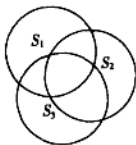
解:法一:利用文氏图求解

由图可知 A、B、D 均不成立

法二:利用摩根法则 $\complement_I A \cap \complement_I B = \complement_I (A \cup B)$

$\complement_I A \cup \complement_I B = \complement_I (A \cap B)$

可知 $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \complement_I (S_1 \cup S_2 \cup S_3) = \complement_I I = \emptyset$. 故选 C.



7.B 点评:本题主要考查集合元素的确定性和互异性,同时考查考生对新定义概念的理解能力.将 P 中的元素取出一个与 Q 中的一个元素相加求和,共有 $C_3^1 \cdot C_3^1 = 9$ 个算式.其中 $0 + 6 = 5 + 1 = 6$.根据集合中元素的互异性,故 $P + Q$ 中有 8 个元素.

8.1 个 点评:本题主要考查对数方程的解法,简单三角不等式的解法以及集合间的基本运算.主要用到化归的数学思想,要注意对数方程转化成代数方程后的等价性.

$$2\lg x = \lg(8x - 15) \text{ 等价于 } \begin{cases} x > 0 \\ 8x - 15 > 0 \\ x^2 = 8x - 15 \end{cases} \quad \text{解得: } x_1 = 3 \quad x_2 = 5.$$

又由 $\cos \frac{x}{2} > 0$ 知 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$-\pi + 4k\pi < x < \pi + 4k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 由 $-\pi < 3 < \pi$ 而 $\pi < 5 < 3\pi$ 知 $x = 3$ 为 A、B 的公共元素.

9. $P \cap \complement_U Q$ 点评:本题是利用集合考查不等式问题.解决这个问题须脱去集合的外衣看到不等式的本质,然后用集合进行表达. $\because Q = \{x | g(x) \geq 0\} \therefore \complement_U Q = \{x | g(x) < 0\}$

$$\therefore \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ 的解集为 } P \cap \complement_U Q$$

10. [1, 3] 点评:本题主要考查含绝对值不等式及一元二次不等式的解法,另外考查了课本上并未给出的差集的求法,要求考生利用课本知识在充分理解题意的情况下做出解答.

$$A = \{x | -4 < x < 4\}, B = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$$

$$\therefore A \cap B = \{x | -4 < x < 1 \text{ 或 } 3 < x < 4\}$$

$$\because x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B \therefore x \in [1, 3]$$

11. ④ 点评:本题考查了子集的概念,要求考生能熟练地运用符号语言,表述对集合间包含关系的理解.子集的定义是:若集合 A 中的任一元素都是 B 中的元素,则 A 是 B 的子集,而对“任意一个均可”的否定应为“存在一个不可”,故而应选④.当然也可通过画文氏图的方法获得正确答案.



专题二 简易逻辑

【命题趋势】

年份	知 识 点	省 市	题 型	分 值
2005 年	函数最值、命题的分类	上海春	选择题	4 分
	充要条件及真假命题的概念	湖北理	选择题	5 分
	直线垂直的充要条件	北京理	选择题	5 分
2004 年	充要条件、复合命题的真值表	福建	选择题	5 分
	充要条件	重庆	选择题	5 分
2003 年	二次不等式求解、充要条件	上海	选择题	4 分
2002 年	奇函数的概念、充要条件	河南、广西、广东	选择题	5 分
2001 年	充要条件的概念	上海	选择题	4 分
	四种命题及等价关系	天津春	填空题	4 分

简易逻辑是高中数学教材中的新增内容,逻辑思维能力是一种重要的思维能力,要注意逻辑思维能力在其他数学知识中的渗透.高考主要考查:理解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义,理解四种命题及其相互关系,掌握充分条件,必要条件及充要条件的意义.逻辑与充要条件的知识为必考内容,往往与其他知识结合起来考查,一般以客观题为主.

【应试对策】

充要条件用来揭示命题的条件与结论之间的逻辑关系,复习时应注意理解这些概念及意义.充要条件的判定是重点也是难点,判定充要条件的方法主要有以下三种:

1. 使用定义,同时注意使用特殊值;
2. 利用集合的包含关系;
3. 使用四种命题的关系.如:原命题与逆否命题等价.

【试题类编】

一、选择题

1. (01上海) $a = 3$ 是直线 $ax + 2y + 3a = 0$ 和直线 $3x + (a - 1)y = a - 7$ 平行且不重合的 ()
 A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分也非必要条件

2. ('02 河南、广西、广东) 函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 是奇函数的充要条件是 ()A. $ab = 0$ B. $a + b = 0$ C. $a = b$ D. $a^2 + b^2 = 0$ 3. ('03 上海) 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为集合 M 和 N , 那么 " $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ " 是 " $M = N$ " 的 ()

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

4. ('04 湖北) 命题 p : 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $|a| + |b| > 1$ 是 $|a + b| > 1$ 的充分而不必要条件, 命题 q : 函数 $y = \sqrt{|x - 1| - 2}$ 的定义域是 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$, 则 ()A. " p 或 q " 为假B. " p 且 q " 为真C. p 真 q 假D. p 假 q 真5. ('04 重庆) 已知 p 是 r 的充分不必要条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件, 那么 p 是 q 成立的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. ('05 春季高考) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 有下列三个命题:① 若存在常数 M , 使得对任意 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f(x) \leq M$, 则 M 是函数 $f(x)$ 的最大值.② 若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得对任意 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq x_0$ 有 $f(x) < f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值.③ 若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) \leq f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值.

这些命题中, 真命题的个数是 ()

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

7. ('05 湖北) 对任意实数 a, b, c , 给出下列命题:① " $a = b$ " 是 " $ac = bc$ " 的充要条件; ② " $a + 5$ 是无理数" 是 " a 是无理数" 的充要条件;③ " $a > b$ " 是 " $a^2 > b^2$ " 的充分条件; ④ " $a < 5$ " 是 " $a < 3$ " 的必要条件.

其中真命题的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

8. ('05 北京) " $m = \frac{1}{2}$ " 是 "直线 $(m + 2)x + 3my + 1 = 0$ 与直线 $(m - 2)x + (m + 2)y - 3 = 0$

相互垂直”的

()

A. 充分必要条件

B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

9. (01天津) 在空间中①若四点不共面, 则这四点中任何三点都不共线; ②若两条直线没有公共点, 则这两条直线是异面直线, 以上两个命题中, 逆命题为真命题的是_____.

【解题点评】

1. C 点评: 本题考查了两直线平行与直线方程的关系, 要求考生将图形间的位置关系转化为方程间的代数关系, 同时也考查了充要条件的概念. 当 $a=3$ 时, 直线 $l_1: 3x+2y+9=0$ 与 $l_2: 3x+2y+4=0$ 联立后方程组显然无解. 而 $l_1 \parallel l_2$ 时, 两直线方程组成方程组无解可算出 $a=3$.

2. D 点评: 本题是一个开放型题目, 以奇函数的概念为背景, 考查学生对充要条件的理解. 若 $a^2+b^2=0$, 即 $a=b=0$ 时, $f(-x)=(-x)|x+0|+0=-x|x|=-f(x)$

$\therefore a^2+b^2=0$ 是 $f(x)$ 为奇函数的充分条件.

又若 $f(x)$ 为奇函数即 $f(-x)=-x|(-x)+a|+b=-(x|x+a|+b)$, 则必有

$a=b=0$, 即 $a^2+b^2=0$

$\therefore a^2+b^2=0$ 是 $f(x)$ 为奇函数的必要条件.

3. D 点评: 本题综合考查了一元二次不等式求解、集合间的关系及充要条件的概念. 要求考生运用分类讨论的思想, 把全部的情况考虑周全, 才能做出正确解答. 如果 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} > 0$, 则

“ $M=N$ ”, 如果 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} < 0$, 则 “ $M \neq N$ ”. $\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \not\Rightarrow “M=N”$; 反之若 $M=N=\emptyset$,

即说明二次不等式的解集为空集, 与它们的系数比无任何关系, 只要求判别式小于零. 因此,

“ $M=N$ ” $\not\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. 因此, 既非充分又非必要条件.

4. D 点评: 本题主要考查复合命题的真值表, 以及绝对值不等式的性质, 绝对值不等式求解等知识点, 同时对考生的逻辑推理能力也有较高程度的要求. 由 $a \cdot b \in \mathbf{R}$ 则

$|a|+|b| \geq |a+b|$ 知若 $|a+b| > 1$ 则 $|a|+|b| > 1$ 即 $|a|+|b| > 1$ 是 $|a+b| > 1$ 的必要条件; 而 $|a|+|b| > 1 \not\Rightarrow |a+b| > 1$ 即 $|a|+|b| > 1$ 是 $|a+b| > 1$ 的非充分条件, 故命题 p 为假, 再根据真值表即可选 D.

5.A 点评:本题主要考查充分条件、必要条件的基本概念,以及最基本的逻辑推理能力.由题中条件可知四个命题之间有如下关系:

$p \xrightarrow{\text{真}} r \Rightarrow s \Rightarrow q$ 故 p 为 q 的充分不必要条件.

6.C 点评:本题以函数最值为研究对象,考查考生的分析对比,探究概念的内涵等基本的逻辑知识,要求考生能对常见的数学概念给出科学的定义.命题(1)中的 $f(x)$ 与 M 的关系是“小于或等于”,根据“或”命题的真值表,无论“ $<$ ”还是“ $=$ ”成立 $f(x) \leq M$ 都成立,所以 M 不一定是 $f(x)$ 的函数值,因而也不能说 M 是 $f(x)$ 的最大值.对于命题(2)来说, $\because x \in \mathbf{R}$ $\therefore f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的函数值,根据文中所述 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的唯一的最大值.而命题(3)中 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的最大值,但不一定是唯一的.

7.B 点评:本题主要考查充分条件、必要条件的概念及真假命题的定义.要求考生做出准确的逻辑推理.① $a = b \Rightarrow ac = bc$ 而 $ac = bc \not\Rightarrow a = b$ 故①是错误的.②一个无理数与一个有理数的和一定是无理数.所以由 $a + 5$ 是无理数可得 $(a + 5) - 5$ 一定是无理数.反之亦然故②是真命题.③ $a > b$ 显然不能得出 $a^2 > b^2$ 例如 $2 > -3$ 而 $2^2 < (-3)^2$.④ $a < 3 \Rightarrow a < 5$ 故“ $a < 5$ ”是“ $a < 3$ ”的必要条件.

8.B 点评:本题主要考查两条直线互相垂直与直线方程的关系以及充要条件的概念.两条直线垂直的充要条件是 $(m+2)(m-2) + 3m(m+2) = 0$ 解得 $m = -2$ 或 $m = \frac{1}{2}$ 故 $m = \frac{1}{2}$ 时两直线互相垂直.反之不一定成立.故 $m = \frac{1}{2}$ 是两直线垂直的充分非必要条件.

9.② 点评:本题考查空间中的点、线、面的位置关系等基础知识,同时也考查了四种命题形式中的等价关系.法一:①的逆命题是:若四点中任何三点都不共线,则这四点不共面.

我们用正方体 AC_1 做模型来观察:上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 中任何三点都不共线,但 $A_1B_1C_1D_1$ 四点共面,所以①中逆命题不真.

②的逆命题是:若两条直线是异面直线,则两条直线没有公共点.

由异面直线的定义可知,成异面直线的两条直线不会有公共点.

所以②的逆命题是真命题.

法二:与命题的逆命题等价的是它的否命题.

$\therefore$ 由①的否命题“若四点共面,则这四点中任何三点都共线”显然为假.②的否命题“若两条直线有公共点,则这两条直线不是异面直线”显然为真.



专题三 函数与反函数

【命题趋势】

年份	知 识 点	省 市	题 型	分 值
2005 年	反函数、对数	辽宁	选择题	5 分
	反函数图像特点、对称点	湖南	填空题	4 分
2004 年	利用分段函数求自变量取值	全国理	选择题	5 分
	反函数的定义	北京理	选择题	5 分
	函数与反函数性质	江苏	选择题	5 分
	函数与反函数图像关系	上海理	选择题	5 分
2003 年	求函数的不等式	新课程全国	选择题	5 分
	求反函数	新课程	选择题	5 分
2002 年	求函数值	全国理	填空题	4 分
2001 年	求反函数	全国文	选择题	5 分
	分段函数求值	上海	填空题	4 分

函数是高中数学的核心内容,也是学习高等数学的基础,是数学中最重要的概念之一,它贯穿中学代数的始终,对函数有关概念,要做到准确、深刻地理解,能正确、灵活地加以运用.高考命题主要集中在了解映射的概念,理解函数的概念,了解反函数的概念及互为反函数的图像间的关系,会求一些简单函数的反函数.

对于函数要求明确函数的三要素,正确运用函数记号.对于反函数高考中主要考查两类问题:①给出函数解析式,求出它的反函数;②利用函数原函数与反函数的图像关系解题.

【应试对策】

从近几年的高考命题特色来看,复习、考试时主要注意以下几方面的内容:

1. 从映射的角度深化对函数概念的理解,而且要真正从三要素的整体上把握函数概念.

2. 重视函数定义域在函数概念中的地位,一般求定义域有三种基本类型:

①给出函数解析式求定义域,即求使解析式有意义的自变量集合;

②不给函数解析式,而由 $f(x)$ 定义域求复合函数的定义域,此时注意通用方法—换元法;

③于应用性问题中求函数定义域,除考虑函数解析式有意义外,还应考虑题设或问题的实际意义对自变量的制约.

3. 掌握求函数值域的常用方法,根据函数的概念,任何一个函数的值域都是由这个函数的定义域和对应法则共同决定的.常用的方法有:配方法、数形结合法、换元法、不等式法、方程法等.

4. 理解抽象函数“ f ”(不给解析式)和分段函数.

5. 选择有代表性的建模问题(应用性问题),建立目标函数,但应注意不能脱离教材和

考纲.

6. 与反函数有关的试题,大多是求函数的解析式,定义域、值域或函数图像等,一般不需求出反函数,只需将问题转化为与原函数有关的问题即可解决.

【试题类编】

一、选择题

1. 【01 全国】函数 $y = 2^{-x} + 1 (x > 0)$ 的反函数是 ()

A. $y = \log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2)$

B. $y = -\log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2)$

C. $y = \log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2]$

D. $y = -\log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2]$

2. 【03 全国】设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x^2}, & x > 0. \end{cases}$ 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()

A. $(-1, 1)$

B. $(-1, +\infty)$

C. $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

3. 【03 全国】函数 $y = \ln \frac{x+1}{x-1}, x \in (1, +\infty)$ 的反函数为 ()

A. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in (0, +\infty)$

B. $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x \in (0, +\infty)$

C. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in (-\infty, 0)$

D. $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x \in (-\infty, 0)$

4. 【04 全国】设函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 1, \\ 4 - \sqrt{x-1}, & x \geq 1, \end{cases}$ 则使得 $f(x) \geq 1$ 的自变量 x 的取值

范围为

A. $(-\infty, -2] \cup [0, 10]$

B. $(-\infty, -2] \cup [0, 1]$

C. $(-\infty, -2] \cup [1, 10]$

D. $[-2, 0] \cup [1, 10]$

5. 【04 北京】函数 $f(x) = x^2 - 2ax - 3$ 在区间 $[1, 2]$ 上存在反函数的充分必要条件是

A. $a \in (-\infty, 1]$

B. $a \in [2, +\infty)$

C. $a \in [1, 2]$

D. $a \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

6. 【04 江苏】设 $k > 1, f(x) = k(x-1) (x \in \mathbf{R})$, 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴交于 A 点, 它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像与 y 轴交于 B 点, 并且这两个函数的图像交于 P 点. 已知四边形 $OAPB$ 的面积是 3, 则 k 等于 ()

A. 3

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{6}{5}$

7. 【04 上海】若函数 $f(x)$ 的图像可由函数 $y = \lg(x+1)$ 的图像绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到, 则 $f(x) =$ ()

A. $10^{-x} - 1$

B. $10^x - 1$

C. $1 - 10^{-x}$

D. $1 - 10^x$

8. 【05 辽宁】函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的反函数是 ()

A. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

B. $y = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$

C. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

D. $y = -\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

二、填空题

9. (01上海) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & x \in (-\infty, 1] \\ \log_6 x & x \in (1, +\infty) \end{cases}$, 则满足 $f(x) = \frac{1}{4}$ 的 x 的值为

10. (02全国) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(1) + f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(3) + f(\frac{1}{3}) + f(4) + f(\frac{1}{4}) =$ _____.

11. (05湖南) 设函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(1, 2)$ 对称, 且存在反函数 $f^{-1}(x)$, $f(4) = 0$, 则 $f^{-1}(4) =$ _____.

【解题点评】

1. A 点评: 考查反函数的概念及其求解, 考查指数式和对数式的互化, 找到原函数的定义域和值域, $x \in [0, +\infty)$, $y \in (1, 2)$,

又 $\because$ 原函数的值域是反函数的定义域, $\therefore$ 反函数的定义域 $x \in (1, 2)$, $\therefore$ C、D 不对.

而 $1 < x < 2 \therefore 0 < x-1 < 1$, $\frac{1}{x-1} > 1$, 又 $\log_2 \frac{1}{x-1} > 0$, 即 $y > 0$, $\therefore$ A 正确.

2. D 点评: 考查分段函数和函数值的概念, 考查函数思想和数形结合的思想.

[方法一] 因为 $f(x_0) > 1$, 当 $x_0 \leq 0$ 时, $2^{-x_0} - 1 > 1$, $2^{-x_0} > 2$, $-x_0 > 1$,

$\therefore x_0 < -1$. 综上, 所以 x_0 的取值范围为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

[方法二] 首先画出函数 $y = f(x)$ 与 $y = 1$ 的图像, 由右图 3-1 中易得

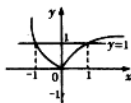


图 3-1

$f(x) > 1$ 时, 所对应的 x 的取值范围.

3. B 点评: 考查反函数的概念及其求解, 考查指数式和对数式的互化

[方法一] $y = \frac{x+1}{x-1}$, $\frac{x+1}{x-1} = e^x$, $\therefore x = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, 又 $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, 而 $x > 1$,

$\therefore \frac{x+1}{x-1} > 1$, $\therefore \ln \frac{x+1}{x-1} > 0$. 因此 $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$ 的反函数为 $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} (x > 0)$.

[方法二] 因原函数的定义为 $(1, +\infty)$, 而 $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{e^x + 1 - 2}{e^x - 1} = 1 - \frac{2}{e^x - 1} < 1$. 因此排除

A、C, 又原函数的值域为 $(0, +\infty)$, 排除 D.

4. A 点评: 考查分段函数和函数值的概念, 考查函数思想及化归思想

当 $x < 1$ 时, $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -2$ 或 $x \geq 0 \therefore x \leq 0$ 或 $0 \leq x \leq 1$.

当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 10$, $\therefore 1 \leq x \leq 10$.

综上所述, $x \leq -2$ 或 $0 \leq x \leq 10$.

5. D 点评: 考查函数存在反函数的条件和二次函数的对称轴及数形结合的数学思想.

