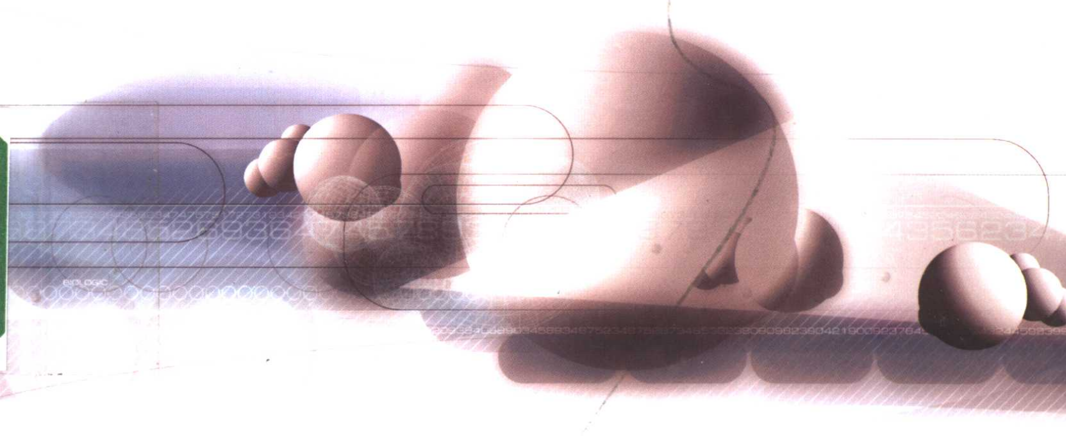
上海市教育委员会高校重点教材建设项目

近代高等数学引论

JINDAI GAODENG SHUXUE YINLUN

（上册）

朱正佑 编



上海大学出版社

近代高等数学引论

（上册）

上海市教育委员会组编

近代高等数学引论

（上册）

朱正佑　编

上海大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

近代高等数学引论 / 朱正佑著. —上海：上海大学出版社，2004.8

ISBN 7-81058-738-2

Ⅰ.近... Ⅱ.朱... Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 074043 号

近代高等数学引论

（上册）

朱正佑　编

上海大学出版社出版发行

（上海市上大路 99 号　邮政编码 200436）

（E-mail：sdcbs@citiz.net　发行热线 66135110）

出版人：姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

江苏句容排印厂印刷　各地新华书店经销

开本：890×1240　1/32　印张：11　字数：328 千

2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷

印数：1～1 060

定价：48.00 元(共两册)

内容提要

本教材是“上海市教委高校重点教材建设项目”的研究成果，是高等院校的高等数学课程的一种要求较高的教材。全书分上、下两册，上册包括一元函数的极限、导数和微分、微分中值公式及其应用，以及一元函数的不定积分和定积分等内容。

本书通过历史发展的演变过程逐步引进了高等数学中最基本的极限概念；采用空间完备化的近代观点简述了与中学教学紧密衔接的实数概念；采用近代测度论的观点，根据人们对新事物认识的基本方法叙述了定积分理论。全书观点先进，结构严谨，引进概念注重背景和历史发展过程，讲述定理注重要解决的问题和结论的发现过程，一些注记指出了学习时应注意的问题。本书中有大量的例题，通过这些例题介绍了解题的基本方法和技巧，各章节之后配有适当的习题供读者练习使用。

本书深入浅出，便于自学，可作为理工科大学和师范院校对数学要求较高的专业的高等数学教材，也可作为一般专业学习高等数学和数学专业学习数学分析时的教学参考书。

序　言

当前已经出版了许多种的高等数学教材，这些教材在大学的各类数学教学中起着重要的作用。人类自进入21世纪以来，科学技术获得了前所未有的飞速发展，这使得在许多学科领域如物理学、计算机科学、生命科学、材料科学和通信技术学科等领域中对高等数学的教学提出了更高的要求。高等数学的教学不仅仅是要求学生能掌握必要的基本知识和基本技巧，更重要的是要求学生能掌握高等数学中处理问题的思想方法，培养学生解决问题的能力，其中包括培养学生具有一定的抽象能力和严格的逻辑推理能力，也就是说高等数学的教学不仅仅是要传授知识，更重要的是要提高学生的整体数学素质。根据大学一些专业对高等数学的这一更高的要求，目前出版了一些如“工科数学分析”类型的教材。本教材是在编写者多年从事数学教学的基础上，根据对一些专业关于高等数学要求的调研和教学实践而编写出的一本教材。本教材是对高等数学有较高要求，但又不是数学分析的一种高等数学教科书。

本教材有以下一些基本特色：

1. 十分重视对基本概念的阐述，不仅使用一些例子来说明和验证定义，而且引导学生如何用严格的数学方法去正确地刻画事物的特定性质，从而给出合理的定义。

2. 在定理和结论的阐述中，尽量从问题出发，不仅重视定理的严格逻辑推导和定理的应用，还重视定理结论的直观猜测和发现过程。

3. 本书的内容虽然没有超出一般高等数学教学大纲范围，但是尽可能地采用近代数学中的观点和方法来阐述高等数学中的基本内容。

4. 实数理论虽然不是高等数学研究的主题，但是没有实数理论支

撑的高等数学就像是沙滩上的建筑，缺少坚固理论基础。本书以很少量的篇幅对实数理论作了通俗的介绍。这种做法，既能使初学者不致困惑于实数理论这一难点之中，又能使学者得到必要的抽象思维的训练和逻辑推理能力的训练。

5. 本教材重视基本概念之间和重要结论之间的比较，尽可能地对比它们之间的差异，通过这种对比，启发读者独立思考。

本教材尽可能做到深入浅出，便于自学，这是本书的又一特点。

本书中，打“ * ”的内容是高等数学的进一步要求，初学者可跳过这部分内容。

自 17 世纪牛顿创建微积分以来，通过 18 世纪在应用方面的重大发展和 19 世纪奠基性工作的完成，微积分学已成为研究变数变化规律的最重要、最完整的一门科学。20 世纪以来在坚实理论基础上的微积分学得到了继续的发展。本书主要阐述微积分学的最基本的理论和方法，以及它在几何学和微分方程理论中的若干应用。实际上微积分学的发展今天已远远超出了本书叙述的范围，所以就广义来讲本书只是全部高等数学的一个引论。

科学在发展，教学需不断改进。本教材只是高等数学教学改革的一种尝试。由于编者水平有限，改革的经验还有待在实践中不断总结和完善，不当之处在所难免，我们恳切地希望能得到广大读者的宝贵意见和建议。

在本书的编写过程中，得到蒋尔雄教授、顾传青教授和上海大学数学系老师们的许多帮助。本书的编写还得到上海市教委高校重点教材建设项目基金的资助和上海大学教务处的大力支持，编者在此谨表示衷心的感谢。

朱正佑

上海大学理学院数学系

2004 年 5 月

目　　录

第一章　函数 …… 1

§1　变量和函数 …… 1

§2　若干常见的函数特性和运算法则 …… 11

§3　初等函数 …… 24

第二章　数列的极限 …… 30

§1　数列及其极限 …… 30

§2　数列极限的若干性质 …… 43

§3　无穷小量和无穷大量 …… 53

§4　数列的收敛准则和一个重要的数列极限 …… 59

第三章　函数的极限与连续性 …… 69

§1　函数极限的定义 …… 69

§2　函数极限的性质 …… 78

§3　无穷小量和无穷大量的阶 …… 93

§4　连续函数及其性质 …… 100

§5　闭区间上连续函数的性质 …… 113

第四章　导数与微分 …… 123

§1　导数的定义 …… 123

§2　导数的运算法则 …… 131

§3　由方程或方程组确定的函数的求导法 …… 145

§4　高阶导数 …… 151

§5　微分和高阶微分 …… 157

第五章　微分学基本定理 …… 168

§1　函数的极值和中值定理 …… 168

§2　泰勒公式 …… 177

§3　不定型极限的计算 …… 185

§4　函数的单调性、极值和凸性 …… 196
§5　函数性态表和作图 …… 211
第六章　不定积分 …… 220
§1　不定积分及其性质 …… 220
§2　不定积分的进一步性质 …… 227
§3　若干不定积分的计算方法 …… 246
第七章　定积分 …… 261
§1　定积分的定义 …… 261
§2　定积分的简单性质 …… 275
§3　定积分的计算 …… 281
§4　定积分的推广 …… 298
§5　定积分的若干应用 …… 322

第一章 函 数

§1 变量和函数

1.1 常量和变量

现在,读者正在进入高等数学的学习和研究。什么是高等数学?它和初等数学有什么本质的区别呢?在中学学习阶段,我们已经学到了许多数学,如几何学、代数和三角等等,那时研究的问题都是一些固定不变的形和数,如三角形的全等,三角形的面积,立方体、圆锥体的体积,三角形中边长和夹角的关系,一些方程和方程组的求解等等。这种研究不变的形和数的科学构成了初等数学。17 世纪初著名的法国科学家笛卡儿在研究由二元代数方程确定的曲线时建立了坐标系,引进了变量和函数的概念,从此数学进入了以研究变量的变化规律为主的高等数学阶段。正如恩格斯在“自然辩证法”中所说的:“数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了。”

在日常生活中,我们会遇到各种不同的量,如时间、温度、湿度、压力、体积、速度、质量以及银行的利率、股票的价格等等。如果在一个过程中,一个量保持不变,永远取一个值,我们称这样的量为常量;和它相反,如果一个量随着过程的发展可以取不同的值,这样的量我们称它为变量。例如随着时间的发展,某市区的地面平均温度和湿度都是变量。在一个自由落体过程中,落体下降的距离和速度都是变量,而落体的质量和重力加速度则可认为是常量。又如我国金融市场中在某交易日的

时间发展过程中，各种股票价格随时有所升降，因而它们是变量，而银行的利率在一天中并不调整，所以在一个交易日中利率是一个常量。当然，超出了讨论的范围，常量可以不再是常量。例如随着银行利率的调整，在十年中我国银行的利率就不再是常量了。

无论从实用观点还是从理论观点来看，正是那些变动的量有着最重要的意义。高等数学就是研究变量变化规律的一门科学，它的核心是微分学和积分学。微积分学创始于 17 世纪的牛顿和莱布尼兹，他们利用无穷小的分析方法建立了微积分学的基本原理。虽然这些原理在当时非常粗糙，很不完善，但是 18 世纪中以欧拉、拉格朗日等为代表的一批科学家们还是利用这种无穷小分析的方法解决了大量天文学、物理学、力学和几何学中的问题，获得了许多奠基性的成果。微积分学的完整、严格的理论则是在 19 世纪才由柯西、魏尔斯特拉斯、戴德金、康托等著名数学家在建立了实数理论和极限论的基础上最终得到完成。从此微积分学有了坚实的基础，真正成为一种研究变量变化规律的严格的科学理论。

1.2 函数

在一个过程中，通常会碰到许多量，这些量的变化往往彼此影响，它们之间或多或少存在某种依赖关系。例如当考察一个封闭容器的加热过程，我们会碰到容器内气体的绝对温度 T、容器中气体的压力 p 以及封闭容器的体积 V 这些变量。这些变量的变化并不是彼此独立无关的，按物理学中的定律，它们之间必须服从规律：

$$p = \frac{cT}{V} \tag{1.1}$$

其中 c 是阿伏伽德罗常数。又如考察距地面高度 h 处的自由落体时，落体到达地面所需的时间 t 和 h 之间应满足关系

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

其中 g 是重力加速度。在这两个例子中，T 对 p、V 的依赖程度以及 t

对 h 的依赖程度是完全确定的，即只要知道了 p 和 V 的一组值就可以完全确定 T 的值以及只要知道了 h 的值就可完全确定 t 的值。但在一个发展过程中碰到的各种量之间也可能没有这种完全确定性的依赖关系。例如，在金融市场的一个交易日中，尽管各种股票的价格之间彼此有影响，但是一种股票的价格并不完全取决于其他股票的价格，它和其他股票的价格之间表现出一种不完全确定的依赖关系。微积分学只研究具有完全确定的相依关系的变量的变化规律。作为最简单的，也是最基本的情形是过程中的某个变量 y 完全确定地依赖于另一个变量 x 的情形。这时，只要知道了变量 x 的值就可以完全确定变量 y 的值。变量 y 对于变量 x 的这种相依性称为函数关系，变量 y 本身称为是关于变量 x 的一个函数，变量 x 称为是自变量。

在上面的叙述中，并没有要求自变量 x 可以取任意实数值。实际上在许多情形中，自变量 x 应该取哪些值是要根据变量 x 的实际意义才能加以确定的。例如，在封闭容器的加热过程中，如果容器的体积保持不变，则由(1.1)知容器中气体的压力 p 是气体绝对温度 T 的函数，按物理意义，绝对温度 T 必须是正的。又如在自由落体问题中，到达地面所需的时间 t 是落体距地面高度 h 的函数，按实际意义也只有 $h \geqslant 0$ 时才有意义。再如记单位圆内内接正 n 边形的面积为 $S(n)$，则这个面积是自变量 n 的函数，按实际意义 n 的取值范围应是大于 2 的正整数，等等。因此在考察函数的精确定义时必须指明自变量的取值范围 $\mathscr{D}$，这个自变量的取值范围称为函数的定义域。现在我们可以给出函数的精确定义如下：

定义 1.1 设 $\mathscr{D}$ 是一个实数集合，如果对于量 x 属于 $\mathscr{D}$ 的每一个值，按某种对应法则 f 完全确定量 y 的一个值，则称量 y 是量 x 确定在集合 $\mathscr{D}$ 上的一个函数。其中 $\mathscr{D}$ 称为这个函数的定义域；量 x 称为自变量；量 y 称为因变量。

习惯上把自变量 x 取值 $x \in \mathscr{D}$ 时，因变量 y 在对应法则 f 下对应的数记为 $f(x)$，并称数 $f(x)$ 是函数 y 在自变量 x 取值为 x 时的函数值。因为 $f(x)$ 是函数 y 在自变量 x 取值为 x 时的函数值，所以在数学符

号上用

$$\mathscr{D} \ni x \longmapsto y = f(x) \tag{1.2}$$

来表示一个函数，或更简单地用

$$y = f(x),\ x \in \mathscr{D} \tag{1.3}$$

来表示一个函数。如果在上、下文中函数的定义域 $\mathscr{D}$ 已经指明，为简单起见在(1.3)中将略去“$x \in \mathscr{D}$”，这时 $y = f(x)$ 就表示一个函数。这时 $f(x)$ 有两种不同的含义：当 x 表示自变量的一个值时，$f(x)$ 是一个数，它表示函数值；当 x 表示自变量时，$f(x)$ 表示一个函数。尽管 $y = f(x)$ 具有不同的含义，但根据上下文的含义是不难确定 $y = f(x)$ 的具体含义的。

根据定义 1.1，我们可以清楚地看到构成一个函数有两大要素，其一是定义域 $\mathscr{D}$，其二是对应法则 f。所以我们把定义域相同并且对应法则相同的两个函数认为是相等的；而把定义域或对应法则不完全一样的两个函数称为不同的函数。因此，两个函数是否相同与自变量和因变量使用的符号是没有关系的。例如下面三个函数：

$$y = f(x) = \sin x,\ x \in \mathscr{D} = \left\{x: -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$y = g(x) = \sin x,\ x \in \mathbf{R} = \{x: x\text{是实数}\}$$

$$y = h(x) = 2 + x,\ x \in \mathscr{D} = \left\{x: -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

都是不相同的函数，而函数

$$y = f(x) = x,\ x \in \mathscr{D} = \{x: x \geqslant 0\}$$

$$z = g(t) = \sqrt{t^2},\ t \in \mathscr{D} = \{t: t \geqslant 0\}$$

因为它们的定义域和对应法则完全一样，所以它们是相同的函数。

这里我们已经引入了记号 $\{x: p\}$，它表示一切满足性质 p 的实数 x 的全体组成的集合。

1.3 实数集

中学时我们已经知道有理数是可以表成 $\frac{m}{n}$ 形式的数，其中 m、n 均为整数且 $n>0$，或者说有理数是可表成一个整数和一个有限位小数或无限位循环小数之和的数。而一个整数和一个无限位不循环小数之和的数称为无理数。有理数和无理数统称实数。这种对实数的认识在中学数学中已经很完整了，但在高等数学的学习中，对什么是实数尚需进一步阐明，我们将在适当时候来完成这一工作。但在一开始，我们将认为实数是一个可表成整数和无限位循环和不循环小数之和的数，同时承认中学给出有关实数的结论都是正确的。为了应用方便，这里复述有关实数的两条性质：

(1) 任意两个不同的实数之间都存在其他有理数和无理数（这一性质称为有理数和无理数在实数中是稠密的）。

(2) 全部实数和数轴上的点相互一一对应。

根据性质(2)，今后我们将不再区别一个实数和它在数轴上对应的点。

全体实数组成的集合称为实数集，记为 $\mathbf{R}$，它和整个数轴相对应。

集合 $\{x: a<x<b\}$ 和集合 $\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$ 分别称为是以 a 和 b 为端点的开区间和闭区间，记为 (a, b) 和 $[a, b]$，即

$$(a, b)=\{x: a<x<b\},\ [a, b]=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$$

此外，还分别把集合 $\{x: a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x: a<x\leqslant b\}$ 记为 $[a, b)$ 和 $(a, b]$，并称它们是半开半闭区间。

集合 $\{x: a\leqslant x\}$ 和 $\{x: x\geqslant a\}$ 分别记为 $[a, +\infty)$ 和 $(-\infty, a]$，它们称为是无界的闭区间。这里 $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读成“正无穷”和“负无穷”，$+\infty$ 和 $-\infty$ 仅仅是一种符号，它们并不是一个数，可以分别想像它们是在数轴的正向和负向的无穷远处。类似地，我们把集合 $\{x: a<x\}$ 和 $\{x: x<a\}$ 分别记为 $(a, +\infty)$ 和 $(-\infty, a)$ 并称它们是无界的开区间。最后全部实数组成的集合 $\mathbf{R}$ 也记为 $\mathbf{R}=(-\infty, \infty)$，它

既是一个无界的开区间，也是一个无界的闭区间。

设 $x_0 \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ 是任一正数，开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 表示和点 x_0 的距离不超过 δ 的所有点的集合

$$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) = \{x:\ |x - x_0| < \delta\}$$

这个集合称为 x_0 的 δ 邻域，记为 $O(x_0, \delta)$。x_0 的 δ 邻域的几何意义如图 1.1 所示。

请读者考虑，如果 x_0 和 x_1 不相等，是否必存在 $\delta_1 > 0$ 和 $\delta_2 > 0$ 使得 $O(x_0, \delta_1)$ 和 $O(x_1, \delta_2)$ 不相交？

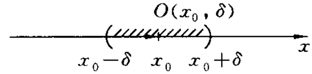


图 1.1　$O(x_0, \delta)$的示意图

设 $\mathscr{D}$ 是一个由若干个数组成的集合（这样的集合称为数集）。如果存在数 M 使得 $\mathscr{D}$ 中任一数都不大于 M，即

$$x \leqslant M,\ \forall x \in \mathscr{D} \tag{1.4}$$

则称数集 $\mathscr{D}$ 是有上界的，并称 M 是 $\mathscr{D}$ 的一个上界。这里符号"$\forall$"表示"任意"或"一切"的意思。显然若 M 是 $\mathscr{D}$ 的上界，则任一大于 M 的数也是 $\mathscr{D}$ 的上界，所以有上界的集合 $\mathscr{D}$ 的上界不是惟一的。

类似地，如果存在数 m，使得

$$m \leqslant x,\ \forall x \in \mathscr{D} \tag{1.5}$$

则称 $\mathscr{D}$ 是有下界的集合，m 是 $\mathscr{D}$ 的一个下界。显然，当 m 是 $\mathscr{D}$ 的下界时，任一小于 m 的数仍是 $\mathscr{D}$ 的下界，所以有下界的集合 $\mathscr{D}$ 的下界也不是惟一的。

如果数集 $\mathscr{D}$ 既有上界又有下界则称 $\mathscr{D}$ 是一个有界集合。

因为一个实数可以看成是数轴上的一个点，所以一个数集 $\mathscr{D}$ 就是数轴上的由若干个点组成的点集（这个点集仍记为 $\mathscr{D}$）。如果 M 是 $\mathscr{D}$ 的上界，则由(1.4)知 $\mathscr{D}$ 中的点 x 都在点 M 的左方；如果 m 是 $\mathscr{D}$ 的下界，则由(1.5)知 $\mathscr{D}$ 中的点 x 都在 m 的右方。若 $\mathscr{D}$ 有界，M 和 m 分别是 $\mathscr{D}$ 的上界和下界，则 $\mathscr{D}$ 中所有点必位于闭区间$[m, M]$中；反之，若 $\mathscr{D}$ 中一切点都位于某闭区间$[m, M]$中，其中 m 和 M 是两个常数，则数集 $\mathscr{D}$ 就是有界集。

1.4 确定函数关系的一些常用的对应法则

为了表示函数的定义域，我们在上段中简述了数集的一些表示法和若干性质。本段来阐述函数关系中确定对应法则的一些常用方法。

1. 列表法

如果函数 $y = f(x)$ 的定义域 $\mathscr{D}$ 只由有限个数组成，令 $\mathscr{D} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，为了给出这个函数的对应法则，只要指明 $\mathscr{D}$ 中每一个数 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 对应的函数值 $y_i = f(x_i)$ 就可以了。通常把这种对应关系列成如下表格：

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

这种用表格给出的对应法则表述很清楚，称为是函数的列表表示法。这种对应法则只适用于定义域 $\mathscr{D}$ 是由有限个数组成的数集。

2. 公式表示法

当函数的定义域 $\mathscr{D}$ 由无穷多个数组成的数集，例如 $\mathscr{D} = (a, b)$ 或 $[a, b]$ 等等时，为了指明函数的对应法则往往采用一个数学公式或几个数学公式来进行表示。例如

$$y = f(x) = \frac{x}{2} + \sin x,\ x \in (-1, 2) \tag{1.6}$$

表示一个函数，它的定义域 $\mathscr{D} = (-1, 2)$。当 $x \in (-1, 2)$ 时和 x 对应的 y 的值由公式 $\frac{x}{2} + \sin x$ 给出。又如假设某商品的零售价格规定为：购买该商品不超过 10 千克时，每千克售价 2 元；超过 10 千克不到 100 千克时，超过部分的价格是每千克 1.80 元；超过 100 千克部分的每千克1.50 元。由这一定价法则，当顾客购买 $x(\geqslant 0)$ 千克该商品时，应付的金额 y(元) 是随 x 的变化而变化，并且由 x 的值完全确定。因此量 y 是在 $[0, +\infty)$ 上定义的 x 的函数，按定价法则，随 x 的不同，$y = f(x)$ 应由下面不同的计算公式给出：

$$y=f(x)=\begin{cases}2x & 当 x\in[0,10] 时\\ 20+1.8(x-10) & 当 x\in(10,100] 时\\ 182+1.5(x-100) & 当 x\in(100,+\infty) 时\end{cases}$$

在这个对应法则中，定义域 $\mathscr{D}$ 被分成几个小区间的并集，在不同的小区间上用不同的公式给出函数的对应关系，这也是一种描述函数对应法则的常用方法，用这个对应方法给出的函数称为分段由不同公式确定的函数或简称为分段给出的函数。

3. 函数对应关系的确定不一定非用数学公式来描述，实际上只要对定义域 $\mathscr{D}$ 中的任意 x 用某种方法规定函数对应的值就足够了

例 1 对任意 $x\in(-\infty,\infty)$，令它和不超过 x 的最大整数对应，就得到一个定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的函数。这一函数称为取整函数，记为 $y=[x]$。对取整函数，我们有如下运算法则：

$$[x]=n,\ 当 x\in[n,n+1) 时 \tag{1.7}$$

其中 n 为整数。由(1.7)立刻知，对任意 $x\in(-\infty,\infty)$ 有

$$[x]\leqslant x<[x]+1 \tag{1.8}$$

例 2 对任意 $x\in(-\infty,\infty)$，如果 x 是有理数就令它和 1 对应，如果 x 是无理数就令它和 0 相对应。按这一对应法则，确定了一个在 $(-\infty,\infty)$ 上定义的函数，记为 $D(x)$。于是

$$D(x)=\begin{cases}1 & 当 x 是有理数时\\ 0 & 当 x 是无理数时\end{cases}$$

这个函数首先是由数学家狄里克雷给出的，它称为狄里克雷函数。

从上述讨论，我们可以清楚地看到函数的对应法则不一定非用公式来表示。函数和数学公式是两个不同的概念，并不是一回事，尽管历史上曾在一个时期中对此发生过很多争论，曾有许多人认为函数和数学公式是一回事。然而在习惯上还是把一个数学公式看成是一个定义在使这个公式有意义的数集 $\mathscr{D}$ 上的一个函数。这个使该数学公式有意义的数集 $\mathscr{D}$ 称为是它的自然定义域。当不作其他说明时，一个数学公式将默认是在它的自然定义域上定义的函数。