（同济五版）

高等数学学习辅导与考题解析

GAODENG SHUXUE XUEXI FUDAO YU KAOTI JIEXI

（下册）

黄光谷 李 杨
黄 东 蔡晓英 编

- 学习引导释疑解难
- 精选例题归类解答
- 考题赛题解析及范例分析
- 习题试题选解及答案提示

华中科技大学出版社

大学生学习高数的益友　研究生入学考试的指南

〔同济五版〕高等数学学习辅导与考题解析

（下册）

黄光谷　李　杨
黄　东　蔡晓英　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

(同济五版)高等数学学习辅导与考题解析(下册)/黄光谷等编
武汉:华中科技大学出版社,2004年2月
ISBN 7-5609-3103-0

Ⅰ.高…
Ⅱ.①黄… ②李… ③黄… ④蔡…
Ⅲ.高等数学-高校学校-教学参考资料
Ⅳ.O13

(同济五版)
高等数学学习辅导与考题解析(下册) 黄光谷 李 杨 黄 东 蔡晓英 编

责任编辑:钟小珉 李立鹏 封面设计:潘 群
责任校对:陈元玉 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87542624

录 排:华中科技大学出版社照排室
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:16.625 字数:401 000
版次:2004年2月第1版 印次:2004年2月第1次印刷 定价:20.80元
ISBN 7-5609-3103-0/O·306

内 容 提 要

本书是与全国使用最多的最新版高等数学教材《高等数学(下册)》(第五版，同济大学应用数学系主编，高等教育出版社 2002 年 7 月出版)配套的教学参考书. 本书既可作为高校师生教、学《高等数学(下册)》的参考书，也可作为习作课的教材，还可作为期中、期末备考及“考研”、“竞赛”的复习辅导书.

为了便于读者自学，本书编排体系基本上与主教材的章、节顺序一致(详见目录)，原则上以节为单位编写，对内容少或容易学习的节适当合并为“讲”. 全书含各章习作课、期末复习课共 36 讲，每讲 2(或 4)学时，共需 80 至 90 学时教完，余下的机动学时，可讲打“ * ”号的节或作为测试时间和加强习作课. 各节(讲)包括主要公式、答疑辅导、考题(考研题和竞赛题)解析、教与学建议、补充与说明及习题提示等栏目；各章末都安排了一次习作课，含内容小结、释疑解难、题型归类、课堂练习与课外作业(均含答案与提示)和总习题选解几部分；书末安排了三次复习课，含知识要点、范例分析、自测题及同济大学的期中、期末“高数”试题. 读者可与教材同步阅读各节、章、全册的三个梯级的内容，由“薄—厚—薄”地理解和掌握全书及各章节的内容、方法和技巧，提高分析和解题的能力，扩大知识面，启迪数学思想和思维，提高数学素养(或素质).

本书的编写以教育部颁布的《高等数学教学基本要求》(相当于教学大纲)和 2003 年教育部新订的“考研”《数学考试大纲》为依据，因此对于使用其它版本《高等数学》或《微积分》、《数学分析》等教材的读者，本书也具有较高的参考价值.

前　言

同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第五版)在前四版的基础上，按照新世纪、新形势下教材改革的精神，进行了全面的修订，既保持、继承和发扬了前四版的诸多优点和特色，又更臻完善，更适合当前教改和教学的需要，是新世纪伊始促进教改和改进教学的一部好教材. 本书是与该教材配套的教与学的辅导书.

本书编写采用了作者编写的《高等数学学习指导与习题解析》(华中科技大学出版社已出两版，连续印刷五次)一书的编写格式，并作了一些改进，分为节、章、册三级，梯级循环，以有利于读者由"薄—厚—薄"地掌握全书内容，熟悉数学方法，启迪数学思维，提高数学素质. 本书内容顺序基本上按主教材目录次序编排，仅有少数例子，为了突出主题，才偶尔用到稍后的知识.

各节的"主要公式"(含主要定理)栏目，尽可能地用数学语言(数学符号和数理逻辑记号等)表述各主要定理、性质、结论和公式等. 例如，$f\in B[a,b]$，$C(a,b)$，$D(U(a,\delta))$，$R(I)$分别表示函数$f(x)$在相应区间(或邻域)上有界、连续、可导、可积，其余记号见"记号说明"和脚注. 这样，既精练又可使初学者潜移默化地受到数学思维和数学语言的训练、熏陶. 对这些主要公式不甚了解或理解不够全面的读者，可对照章、节阅读教材，一读便知. 而各章、册的"内容要点"、"知识要点"栏目，则对各章内容和全册知识点进行了提炼和概括，有利于读者由"厚"到"薄"地驾驭全章和全书的主要内容.

"答疑辅导"或"释疑解难"栏目，分节与章两个层次引导读者去思考一系列基本概念、数学思想和方法及澄清易模糊混淆的问题，以利于对这些概念、思想、方法和问题的正确理解、认识和掌握.

在各节的"考题解析"栏目中，精选了部分全国硕士研究生入

学统一考试与国内外及全国重点大学的数学竞赛试题，并进行了分析和解答．另外，在题末注有“（研．2002．一）”者，是指 2002 年数学一的全国统一考研试题；注有“（赛．1998．京）”者，是指 1998 年北京市的统一数学竞赛试题，其余类似．这是一些很有代表性、启发性和有很高水平的试题，很多题可以举一反三，触类旁通．其中有的竞赛题已出现在考研题中，有些竞赛题（或者类似题）今后还会出现在考研题中．俗话说，不登高山，不知平地，登高才能望远、望全．马克思也说过：“科学是没有平坦大道的，只有那些不畏在崎岖小路上攀登的人，才能达到光辉的顶点．”阅读和思考了这些试题，可以提高和培养读者分析、解决数学问题与实际问题的能力，以及提高读者的数学素质．掌握了解这些试题的方法和技巧，再去阅读本书的学习方法指导和针对教材中较难习题的“习题提示”栏目（最好是先思考、自做，遇到困难，再读提示），能化难为易，就不怕这些数学习题难做了．本书还对较难的各章部分总习题作了解答．

“教、学建议”栏目含考纲要求（以高等数学的 2003 年考研数学一考试大纲作代表，它与本科高等数学“教学基本要求”（即教学大纲）是一致的，不重复选列），重点、难点与关键的分析，教学建议和学习方法指导等标题，可帮助读者在数学海洋学游泳时保持清醒的头脑和识别方向．

“补充与说明”栏目不是每节（但大部分节）都有，而是有感而发，内容有多有少，以帮助读者扩大视野，弄清来龙去脉．

各节“习题提示”仅对其中较难者作了提示，可帮助读者解决做题困难；较易者留给读者自己去思考练习．有些应用题题目较长，为节省篇幅，未转抄，读者去查对主教材[1]（即参考文献[1]），即知．

“习作课”和“期末复习课”后所附练习题、作业题、自测题和模拟试题等，读者也应该当成必读内容，亲自动手做一做．好在题量不大，不会加重负担，自做以后再核对答案与提示，并自评分．这些

题有利于读者提纲挈领、系统地掌握全章或全书的主要内容和方法，有利于提高单元测验和期中、期末考试的成绩.

所有这些栏目的精心设计，汇集了作者40余年教学实践的经验和体会.

由于我们水平有限，加上时间仓促，书中难免有缺点和疏漏，恳请各位专家、同行和读者批评指正，以便再版时修正.

本书编写得到了华中科技大学出版社的领导和有关编辑、同济大学郭镜明教授及武汉科技学院数理系领导的支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

编　者

2003年8月

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用

第一节　多元函数的基本概念

一　主要公式

（一）平面点集　n 维空间

坐标平面上具有某种性质的点的集合，称为平面点集.

邻域　$U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta\}$

$$=\{(x,y)\,|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

去心邻域　$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\,|\,0<|PP_0|<\delta\}$.

内点、外点、边界点、边界、聚点、开集、闭集、连通集、区域、闭区域、有界集、无界集等名词见教材[1]，其中 $\forall\,\delta>0$. 若 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有集合 E 中的点，则称 P 是 E 的**聚点**. 聚点集又称为**导集**.

定义了线性运算的集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 **n 维空间**.

距离　$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

范数　$$\|\boldsymbol{x}\|=P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

极限　$$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\triangleq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\to 0,\boldsymbol{x}、\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n.$$

$$\Longleftrightarrow x_i\to a_i\,(i=1,2,\cdots,n).$$

（二）多元函数概念

定义 1　设 $D\subset\mathbf{R}^2$，称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数，记作

$$z=f(x,y),\quad 或\quad z=f(P),\quad P(x,y)\in D.$$

称 D 为定义域，x、y 为自变量，z 为因变量，$f(D)$ 为值域. $z=f(x,y)$ 在几何上表示空间曲面的方程.

类似地，可定义三元函数和 n 元函数. 我们以研究二元函数为主，相应的结论可推广到三元及以上的多元函数.

（三）多元函数的极限

定义 2 设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)=f(P)$ 的聚点，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为 $f(x,y)$ 当 $P\to P_0$ 的（二重）极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A,\quad 即\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,\quad 或\quad f(P)\to A(P\to P_0).$$

（四）多元函数的连续性

定义 3 设 $P_0(x_0,y_0)$ 是二元函数 $f(P)$ 的定义域 D 的聚点，且 $P_0\in D$，若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，记为 $f(P)\in C(P_0)$. 不连续点称为间断点. 若 $f(P)$ 在 D 上每点都连续，称 $f(P)\in C(D)$.

利用点函数，很容易把上述极限与连续等概念推广到三元函数和 n 元函数，且在有界闭区域上的多元连续函数，具有有界性、最大（小）值定理、介值定理、一致连续性等重要性质.

二　答疑辅导

1. (1) 能否把函数 $f(x,y)$ 写成 $f(xy)$？为什么？(2) 函数 $\sqrt{x^2+y^2}/x\ (x>0)$ 能否写成 $f(y/x)$ 的形式？

答 (1) 一般而言，不能把 $f(x,y)$ 写成 $f(xy)$. 任何一个二元函数都可用记号 $f(x,y)$ 表示，而 $f(xy)$ 表示特殊的二元函数 $z=f(u)$，$u=xy$；并不是任何二元函数都能表成 $f(xy)$ 的形式. 例如：

$$z=\ln(xy)+\tan(xy)+6$$

可写成 $f(xy)$ 的形式，但 $z=ye^x+5\arctan x$ 就不能写成 $f(xy)$ 的形式，然而它们都可记成 $f(x,y)$ 或 $\varphi(x,y)$ 的形式.

(2) 能. 事实上，$\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\triangleq f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

2. 我们把先后两次求出的极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)\quad 或\quad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)\qquad (1)$$

称为二次极限(连同三次极限等统称累次极限)，它们与二重极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y) \tag{2}$$

是否为一回事？

答 不是一回事. 二重极限(2)是点(x,y)以任意方式趋于(x_0,y_0)时二元函数$f(x,y)$的极限；而累次极限(1)是点(x,y)沿特殊方式——折线$y=y$和$x=x_0$(或$x=x$和$y=y_0$)趋于(x_0,y_0)时两个一元函数的极限(读者自绘草图帮助理解)，而且这是不一样的两回事，并不是一般与特殊的关系(折线上的点可能位于邻域之外). 例如：

(1) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}\ (x^2+y^2\neq 0)$，两个累次极限

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0;$$

但令$y=kx$，即点(x,y)沿任意直线$y=kx$而趋于原点$(0,0)$时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k^2}{1+k^2},$$

它随k取不同的值. 可见，上述二重极限不存在.

(2) 再设$f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\ (xy\neq 0)$，因为

$$0\leqslant\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|+|y|\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}\to 0$$

$$(\rho\triangleq\sqrt{x^2+y^2}\to 0\text{ 时}),$$

故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$，但$\lim\limits_{x\to 0} y\sin\dfrac{1}{x}$不存在，而$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{y}=0$，从而累次极限$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$不存在. 同理，另一个累次极限也不存在.

由上述可见，二重极限与二次极限没有必然的联系，即使两个累次极限都存在且相等，也不能保证二重极限存在，反之亦然. 一般而言，求累次极限容易一些，可借用一元函数求极限的各种方法来求，但这代替不了求二重极限.

(3) 它们之间的联系仅表现在：当$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的二重极限与某二次极限都存在时，则它们必相等(证明见本讲五). 由此还可推出：若两个二次极限都存在但不相等，则二重极限必定不存在.

3. (1) 如果两个一元函数$f(x_0,y)$在y_0处连续、$f(x,y_0)$在x_0处连续，能否保证二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续？(2) 反

之如何?为什么?

答 (1) 不能保证. 因为上述两个一元函数连续,是指

$$\lim_{y\to y_0} f(x_0,y) = f(x_0,y_0),\quad \lim_{x\to x_0} f(x,y_0) = f(x_0,y_0);$$

这两个一元函数连续的等式不能保证二元函数连续的下述等式成立:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

例如:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

显见, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0 = f(0,0)$,但由上题知,$f(x,y)$ 在$(0,0)$处的二重极限不存在,从而此二元函数在点$(0,0)$不连续.

(2) 反之成立. 这是一般与特殊的关系. 事实上,在$(x,y)\to(x_0,y_0)$中,取特殊方式 $y=y_0$ 或 $x=y_0$ 时,易知

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x,y_0) = f(x_0,y_0)$$

和

$$\lim_{y\to y_0} f(x_0,y) = f(x_0,y_0).$$

三 典型例题①

例 1 求函数 $z = 1/\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$ 的定义域.

解 此函数的定义域上的点应满足不等式组:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1>0, \\ 4-x^2-y^2>0; \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x^2+y^2-1<0, \\ 4-x^2-y^2<0. \end{cases}$$

由第一个不等式组解出 $1<x^2+y^2<4$;而第二个不等式组无解. 故此函数的定义域为圆环:

$$D = \{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2<4\}.$$

例 2 设 $f(u,v) = u\ln(\sqrt{u}+v)$,求函数 $f(x-y,x+y)$、$f(x,y)$ 和 $f(y^2,x^3)$ 的表达式.

解 只需作变量代换:$u=x-y, v=x+y$;或 $u=x, v=y$,则各

$$f(x-y,x+y) = (x-y)\ln(\sqrt{x-y}+x+y);$$

---

① 仅本节暂无专门的单独考题,故以典型例题代替之.

$$f(x,y)=x\ln(\sqrt{x}+y);$$

而
$$f(y^2,x^3)=y^2\ln(|y|+x^3).$$

例 3 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\ln(e^y+x)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$；　　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$.

解 (1) $f(x,y)=\ln(e^y+x)/\sqrt{x^2+y^2}\in C[P(0,1)]$，由多元初等函数的连续性，原式 $=\ln(e^1+0)/\sqrt{0+1^2}=1$.

(2) 用换元法，令 $t=xy$，原式 $=\lim\limits_{y\to a}y\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}=a\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=a$.

(3) 可先估计原极限为零，再用极限定义来检验. 因为

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}-0\right|\leqslant x^2+y^2\triangleq\rho^2\to 0\quad(\rho\to 0\text{ 时}),$$

故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}=0.$$

(4) 运用极限四则运算法则. 因为

$$(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=x^2e^{-x}\cdot e^{-y}+y^2e^{-y}\cdot e^{-x},$$

而
$$\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0,\quad \lim_{y\to+\infty}e^{-y}=0,$$

故
$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}x^2e^{-x}\cdot e^{-y}=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x}\cdot\lim_{y\to+\infty}e^{-y}=0;$$

同理 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}y^2e^{-y}\cdot e^{-x}=0$. 故原式 $=0$.

(5) 因 $0<\dfrac{xy}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\quad(x、y>0\text{ 时})$,

故
$$0<\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}\to 0\quad\begin{pmatrix}x\to+\infty\text{ 时}\\ y\to+\infty\text{ 时}\end{pmatrix},$$

由两边夹法则知，原式 $=0$.

(6) 粗略观察此极限，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，似乎 xy 比 $x+y$ 趋于零的速度要快，从而原极限等于零，其实不然. 事实上，如果令 $x=t,y=-t+t^2$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2(t-1)}{t^2}=-1;$$

而令 $x=t, y=-t+t^3$，得

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{t^2(t^2-1)}{t^3}=\lim_{t\to 0}\left(t-\frac{1}{t}\right)=\infty,$$

可见，原极限不存在.

例 4 研究函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)/\sin\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 的连续性.

解 观察易知，f 在非原点皆连续. 又

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}\quad (令\ t=\sqrt{x^2+y^2})$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\sin t}=0\cdot 1=0=f(0,0),$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 也连续，因而 $f(x,y)$ 在全平面都连续.

四　教、学建议

1. 考纲要求

理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义. 了解二元函数的极限与连续性的概念，以及有界闭区域上连续函数的性质.

2. 重点、难点与关键

重点 二元函数极限的概念.

难点 二重极限的定义与计算.

关键 掌握求二重极限的主要方法.

3. 教学建议

本讲应先介绍有关平面点集的几个基础概念，然后在点函数基础上，引入二元及多元函数及其极限的概念及 ε-δ 说法，可介绍累次极限并与重极限进行比较，以便加深对重极限的理解. 在理解了重极限概念的基础上，最后引入多元函数连续性的概念是不困难的.

多元函数及其极限与连续的概念是一元函数相应概念的推广，可进行类比和推广. 但应向学生指出：由一元到多元函数，由于自变量增多，虽然有些是类似的，但也有些是不同的；而从二元到更多元的函数，它们都是多元函数，则没有本质的不同，为简单起见，就以二元函数为代表来进行研究.

4. 学习方法指导

(1) 在一元函数极限中，$x \to x_0$ 只有三种方式：$x \to x_0^{\pm}$ 与或左或右地 $x \to x_0$；而在二元函数的重极限中，$(x,y) \to (x_0,y_0)$ 的方式有无穷多种，这是两者的本质区别；不要轻易用求累次极限去代替求重极限.

(2) 要通过读例题和做习题，注意总结和掌握求重极限的各种主要方法：运用连续性，用定义论证，换元化为一元函数求极限，用两边夹法则，等等.

五　补充与说明

定理　若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的二重极限与累次极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y),\quad \lim_{x\to x_0}[\lim_{y\to y_0} f(x,y)] \tag{1}$$

都存在，则它们必相等.

证　设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$，则 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$，当 $(x,y) \in \overset{\circ}{U}(P_0(x_0,y_0),\delta)$ 时，有

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon. \tag{2}$$

对任一满足不等式

$$0 < |x - x_0| < \delta \tag{3}$$

的 x，由假设存在累次极限，有

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) \triangleq \varphi(x). \tag{4}$$

回到不等式(2)，让其中 $y \to y_0$，则由(2)式和(4)式，可得

$$|\varphi(x) - A| \leqslant \varepsilon, \tag{5}$$

故由(3)式和(5)式，得 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = A$，即(1)式中两种极限相等：

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = A = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

推论　若 $f(x,y)$ 在点的二重极限与两个二次极限都存在，则三者都相等.

此推论还给出了累次极限可“换序”的充分条件. 但须注意，仅由上述定理本身，对另一个累次极限的存在性却得不出什么结论.

六　习题(8-1)提示

2. 已知函数 $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy\tan\dfrac{y}{x}$，试求 $f(tx,ty)$.

提示 只需将 tx 代换 x，ty 代换 y，代入上式运算，得

$$f(tx,ty)=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\frac{y}{x}\right)=t^2f(x,y).$$

注 由上式可见，$f(x,y)$ 是二次齐次函数. 一般地，若

$$f(tx,ty)=t^kf(x,y),\quad k\in\mathbf{N},$$

则称 $f(x,y)$ 为 **k 次齐次函数**. 特别地，$k=0$ 时，$f(tx,ty)=f(x,y)$，这时称 $f(x,y)$ 为**零次齐次函数**，简称为**齐次函数**.

5. 求下列各函数的定义域：

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\quad(R>r>0)$；

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

提示 与一元函数求定义域类似，可由解不等式或不等式组确定多元函数的定义域.

(5) 由 $\begin{cases}R^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0\\ x^2+y^2+z^2-r^2>0\end{cases}\Longrightarrow r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，这是以原点为球心、包括外边界但不包括内边界的空心球.

(6) 由 $\begin{cases}x^2+y^2\neq 0\\ \left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}z^2\leqslant x^2+y^2,\\ (x,y)\neq(0,0).\end{cases}$ 定义域是位于锥面 $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 及其外部、但不含原点的区域.

6. 求下列各极限：

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

提示 读者可由前述例 3 总结出：求多元函数极限有多种方法.

(4) 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(xy+1)-1}=2.$

(6) 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{(x^2+y^2)^2/2}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=0$（等价无穷小替换）.

7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

提示 重极限中 $P\to P_0$ 的方式，要求是对一切方式（有无穷多种），均有