福军 主编

巧学高中数学

QIAOXUEGAOZHONGSHUXUE

现代巧学丛书

现代出版社

现代巧学丛书

巧学高中数学

崔福军　主编

现代出版社

主　　编　崔福军
副 主 编　卢青林　苗正科　曹光亚　崔福童
编　　委　王立芳　袁庆宝　刘东晓　蒋继芳　赵　琳
　　　　　王　琳　弘　韬　胡永晶　曹光勇　齐华莎
责任编辑：田　晶

图书在版编目（CIP）数据
巧学高中数学/崔福军等编.-北京：现代出版社，1998.1
（现代巧学丛书）
ISBN 7-80028-396-8
Ⅰ.巧… Ⅱ.崔… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603
中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 26206 号

Qiaoxue Gaozhong Shuxue
巧 学 高 中 数 学

现代出版社出版发行
北京安定门外安华里 504 号
邮政编码：100011
全 国 新 华 书 店 经 销
北京龙华印刷厂印刷
850×1168 毫米　32 开　17.5 印张
1998 年 3 月第 1 版　1997 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 7-80028-396-8/G·107
定价：18.00 元

目　　录

一、代数

二、平面三角

三、立体几何

四、平面解析几何

五、综合

一、代 数

怎样理解集合的概念

集合是近代数学中最基本的概念之一，它和点、直线、平面等概念一样都是不定义的概念。集合的观点渗透到数学的一切领域。

1. 集合的含义

集合虽然是数学中不定义的概念，但它有一定的含义，下面看几个例子：

(1)1，2，3，4，5；

(2) 与一个角的两边距离相等的所有的点；

(3) 所有的直角三角形；

(4)x^2，$3x+2$，$5y^3-x$，x^2+y^2；

(5) 某农场所有的拖拉机。

由上面这些例子可知：它们分别由一些数、一些点、一些图形、一些整式、一些物体组成的一个整体。它们的特点是：都是确定的对象，具有一定的属性。

对于集合概念通常用以下语言描述：每一组对象的全体形成一个集合。集合里的各个对象叫做这个集合的元素。

2. 集合的特征

(1) 元素的确定性　对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的。由此我们可以判断任何一个对象是否是某个集合的元素，以及给出的整体是否是集合。

例1、①1，5，32都是自然数集的元素，而-7就不是它的元素；②某学校所有的老年教师就不能组成一个集合。

(2) 元素的互异性　对于一个给定的集合，集合中的任何两个元素都是不同的对象。即：集合中的元素没有重复的，把相同的对象归入一个集合时只能算做这个集合的一个元素。

例2　方程$(x-1)^2=0$的实数解的集合里只有一个元素1。

(3) 元素的无序性　集合只与它的元素有关，而与它的元素顺序无关。故在表示集合时，通常不考虑它的元素之间的顺序。也就是说：集合里的元素哪一个写在前哪一个写在后，是无关紧要的。

3. 集合的表示方法

集合通常用大写的拉丁字母A、B、C……表示，集合中的元素一般用小写的拉丁字母a、b、c……表示。

对于一个确定的元素a和一个确定的集合A，元素a和集合A的关系有且只有以下两种情况之一成立：

(1) 若a是集合A的元素就记为“$a \in A$”，读作“a属于A”。

(2) 若a不是集合A的元素，就记为“$a \notin A$”或“$a \overline{\in} A$”，读作“a不属于A”。

例3　设$B=\{1,2,3,4,5\}$，则$5 \in B$，$\frac{3}{2} \notin B$。

为了方便起见，常用一些固定符号来表示一些特殊数集。

自然数集记作N，整数集记作Z，有理数集记作Q，实数集记作R，正有理数集记作Q^+，负实数集记作R^-等。

表示集合的方法有列举法和描述法。

(1) 列举法(又叫枚举法)：把集合中的元素一一列举出来，写

在大括号内表示集合的方法。

例 4　由数 1,2,3,4,5 组成的集合 A,可记为 $A=\{1,2,3,4,5\}$。

由元素的无序性知,用列举法表示集合时,不必考虑元素之间的顺序,如例 4 中的集合 A,也可以表示为 $A=\{3,2,1,4,5\}$ 等。

列举法的优点是直观性强。用列举法写出一个集合后,易看出集合中的元素是哪些,给人以清晰的印象。

(2) 描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法。

例 5　全体有理数组成的集合 Q,可记为 $Q=\{x\mid x=\frac{m}{n},m、n\in Z,n\neq 0,m、n$ 互质$\}$。

用描述法表示集合时,往往在大括号内先写上这个集合的元素的一般形式,再画一条竖线,在竖线右边写上这个集合的元素的公共属性。

描述法表示集合的优点是简明。

有些集合既可用列举法,又可用描述法表示。

例 6　不大于 10 的正偶数所组成的集合 M。

解:$M=\{2x\mid x\in N$ 且 $1\leqslant x\leqslant 5\}$.(描述法)

$M=\{$不大于 10 的正偶数$\}$.(描述法)

$M=\{2,4,6,8,10\}$.(列举法)

给定一个集合,用哪一种方法表示,一般说来:可从三个方面考虑而定:① 可能;② 确定;③ 简明。然后选择其中一种集合的表示方法。

4. 集合的类型

集合分为有限集和无限集。如果一个集合中的元素是有限个,这个集合叫做有限集。如果一个集合中的元素是无限个。这个集合叫做无限集。如:

(1) 所有自然数组成的集合是无限集；

(2) 小于 10 的自然数组成的集合是有限集。

怎样证明集合间的包含关系

两个集合之间的包含关系有两种：包含和真包含。要证明两集合间的包含关系，应依据定义证明。

定义 1：对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 的任何一个元素都属于集合 B，那么集合 A 叫做集合 B 的子集。记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$. 读作"A 包含于 B"或"B 包含 A"。

定义 2：如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$。读作"A 真包含于 B"或"B 真包含 A"。

例 1　集合 $M = \{x \mid x = a^2 + 1, a \in N\}$，$P = \{y \mid y = b^2 - 4b + 5, b \in N\}$，证明 $M \subset P$。

分析：要证明 $M \subset P$，即证明对于任意 $a \in M$，则有 $a \in P$，且至少存在一个元素 $c \in P$ 使 $c \notin M$。

证明：设任意的 $x_0 \in M$，

$$则\ x_0 = a_0^2 + 1 = (a_0 + 2)^2 - 4(a_0 + 2) + 5,$$

$\because a_0 \in N, (a_0 + 2) \in N,$

$\therefore x_0 \in P,$

$\therefore M \subseteq P$。

又当 $b = 2$ 时，$y = 1$，

$\therefore 1 \in P$。

但 $x = a^2 + 1 > 1$。

$\therefore 1 \notin M$。

$\therefore M \subset P$。

例 2　已知函数 $f(x)=x^2+ax+b,a、b\in R$，两集合 $A、B$ 是由 $A=\{x|x=f(x),x\in R\},B=\{y|y=f[f(x)],x\in R\}$ 定义的。证明 $A\subseteq B$。

分析：要证明 $A\subseteq B$，即证对于任意 $x\in A$，则有 $x\in B$ 即可。

证明：任取 $x\in A$，则 $x=f(x)$。

$\therefore f(x)=f[f(x)]$，即有 $x=f(x)=f[f(x)]$，

$\therefore x\in B,\therefore A\subseteq B$。

例 3　若集合 $M=\{x|x=m+\frac{1}{6},m\in Z\}$，

$N=\{x|x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in Z\},P=\{x|x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in Z\}$，

则 $M、N、P$ 的关系怎样？

解：$M、N、P$ 都是无限集。

$\because M=\{x|x=\frac{6m+1}{6},m\in Z\}$，

$N=\{x|x=\frac{3n-2}{6},n\in Z\}$

$=\{x|x=\frac{3(n-1)+1}{6},n\in Z\}$，

$P=\{x|x=\frac{3p+1}{6},p\in Z\}$，

由此可知：$M\subset N=P$。

例 4　已知集合 $A=\{0,1\},B=\{x|x\subseteq A\},C=\{x|x\in A,x\in N\}$，试确定 $A、B、C$ 之间的关系。

解：$\because A=\{0,1\},B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},C=\{1\}$，

$\therefore A\in B,C\in B,C\subset A$。

怎样证明两个集合相等

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，我们称这两