

福军 主编

# 巧学高中数学

QIAOXUEGAOZHONGSHUXUE

丛  
现代巧学  
书



现代出版社



现代巧学丛书

# 巧学高中数学

崔福军 主编

现代出版社

主 编 崔福军  
副主编 卢青林 苗正科 曹光亚 崔福童  
编 委 王立芳 袁庆宝 刘东晓 蒋继芳 赵琳  
王琳 弘 韬 胡永晶 曹光勇 齐华莎  
责任编辑: 田 晶

图书在版编目(CIP)数据

巧学高中数学/崔福军等编. -北京:现代出版社, 1998. 1

(现代巧学丛书)

ISBN 7-80028-396-8

I. 巧… II. 崔… III. 数学课-高中-教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第26206号

Qiaoxue Gaozhong Shuxue

巧学高中数学

现代出版社出版发行

北京安定门外安华里504号

邮政编码: 100011

全国新华书店经销

北京龙华印刷厂印刷

850×1168毫米 32开 17.5印张

1998年3月第1版 1997年3月第1次印刷

ISBN 7-80028-396-8/G·107

定价: 18.00元

## 目 录

## 一、代数

怎样理解集合的概念 ..... (1)

▲怎样证明集合间的包含关系 ..... (4)

▲怎样证明两个集合相等 ..... (5)

怎样利用集合的特性解题 ..... (7)

怎样进行集合的交、并、补运算 ..... (9)

怎样利用空集解题 ..... (11)

怎样利用容斥原理解题 ..... (14)

怎样理解对应概念 ..... (16)

怎样理解映射概念 ..... (18)

怎样理解函数的概念 ..... (20)

怎样判定两函数是同一函数 ..... (22)

怎样作函数的图像 ..... (23)

✓怎样求函数的定义域 ..... (25)

✓怎样求函数的值域 ..... (30)

△怎样求函数的解析式 ..... (33)

✓怎样求函数的最值 (一) ..... (37)

△怎样求函数的最值 (二) ..... (39)

✓怎样区别最值与极值 ..... (42)

怎样利用函数的性质解题 ..... (44)

✓怎样解指数方程 ..... (45)

✓怎样解对数方程 ..... (48)

怎样解含有参数的方程 ..... (50)

|                                     |       |
|-------------------------------------|-------|
| 怎样求函数的反函数                           | (52)  |
| 怎样判定函数的单调性                          | (54)  |
| 怎样确定函数的单调区间                         | (57)  |
| 怎样判断函数的奇偶性                          | (59)  |
| 怎样利用函数的奇偶性解题                        | (61)  |
| 怎样利用不等式的性质解题                        | (63)  |
| 怎样利用比较法证明不等式                        | (66)  |
| 怎样利用综合法证明不等式                        | (68)  |
| 怎样利用分析法证明不等式                        | (70)  |
| ③ 怎样利用基本不等式的变形、推论证明不等式              | (73)  |
| 怎样证明含绝对值的不等式                        | (75)  |
| 怎样用其他方法证明不等式                        | (78)  |
| 怎样解一元一次不等式(组)、一元二次不等式(组)            | (81)  |
| 怎样解高次不等式                            | (84)  |
| 怎样解分式不等式                            | (86)  |
| 怎样解无理不等式                            | (89)  |
| 怎样解指数、对数不等式                         | (92)  |
| ✓ 怎样解含有绝对值的不等式                      | (94)  |
| ✓ 怎样解含有参数的不等式                       | (97)  |
| ✓ 怎样由数列的前几项写通项公式<br>及判断一个实数是否是数列的一项 | (99)  |
| ✓ 怎样利用数列前几项的和求通项公式                  | (101) |
| ✓ 怎样判断数列是等差数列                       | (103) |
| 怎样利用等差中项解题                          | (106) |
| 怎样利用等差数列的性质解题                       | (108) |
| 怎样利用等差数列的概念解决项与项之间的关系               | (111) |
| △ 怎样求等差数列前 $n$ 项和的最值                | (112) |
| 怎样判断数列是等比数列                         | (115) |

|                                                                       |       |
|-----------------------------------------------------------------------|-------|
| 怎样利用等比中项解题.....                                                       | (117) |
| 怎样利用等比数列的性质解题.....                                                    | (120) |
| △ 怎样求数列的和 (一) .....                                                   | (123) |
| △ 怎样求数列的和 (二) .....                                                   | (125) |
| △ 怎样解等差、等比数列的综合题.....                                                 | (128) |
| △ 怎样求数列的极限.....                                                       | (131) |
| 怎样求极限中的参数.....                                                        | (136) |
| 怎样利用无穷递缩等比数列的求和公式解题.....                                              | (138) |
| 怎样利用数学归纳法证明代数等式及整除性问题.....                                            | (141) |
| 怎样利用数学归纳法证明不等式.....                                                   | (144) |
| 怎样归纳、猜想、证明.....                                                       | (146) |
| 怎样理解复数的结构.....                                                        | (150) |
| 怎样把复数化成三角形式.....                                                      | (152) |
| 怎样利用复数相等的充要条件解题.....                                                  | (154) |
| 怎样利用复数模的性质解题.....                                                     | (156) |
| 怎样利用共轭复数的性质解题.....                                                    | (158) |
| 怎样利用 $W = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 及 $1 \pm i$ 的性质解题 ..... | (162) |
| 怎样求复数模的最值.....                                                        | (165) |
| 怎样求复数的辐角主值及最值.....                                                    | (169) |
| 怎样利用复数加减法的几何意义解题.....                                                 | (172) |
| 怎样利用复数的乘法解题.....                                                      | (175) |
| 怎样利用复数的除法解题.....                                                      | (178) |
| 怎样利用复数的几何意义求动点的轨迹.....                                                | (180) |
| 怎样利用代数法求复数对应点的轨迹.....                                                 | (184) |
| 怎样解决复数数列问题.....                                                       | (187) |
| 怎样在复数集中解一元二次方程.....                                                   | (190) |
| 怎样利用复数的性质解方程.....                                                     | (192) |

|                                                                      |       |
|----------------------------------------------------------------------|-------|
| 怎样在复数集中解简单的高次方程·····                                                 | (195) |
| 怎样利用公式 $  Z_1  -  Z_2   \leq  Z_1 + Z_2  \leq  Z_1  +  Z_2 $ 解题····· | (198) |
| 怎样利用复数解决一些三角问题·····                                                  | (200) |
| 怎样利用复数求解动点的轨迹·····                                                   | (203) |
| 怎样利用整体思维解复数问题·····                                                   | (206) |
| 怎样理解加法原理与乘法原理·····                                                   | (209) |
| 怎样利用排列、组合数公式及性质解题·····                                               | (211) |
| ⑥ 怎样解排列组合应用题(一)·····                                                 | (213) |
| 怎样解排列组合应用题(二)·····                                                   | (216) |
| 怎样巧用排列组合知识解决其他问题·····                                                | (218) |
| 怎样利用二项展开式的通项公式解题·····                                                | (220) |
| 怎样利用二项式系数的性质解题·····                                                  | (223) |
| 怎样利用二项式定理解题·····                                                     | (225) |

## 二、平面三角

|                                                                                               |       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 怎样认识区间角、象限角和轴线角间的关系·····                                                                      | (228) |
| 怎样由 $\alpha$ 所在象限判定 $2\alpha$ 、 $3\alpha$ 及 $\frac{\alpha}{2}$ 、 $\frac{\alpha}{3}$ 所在象限····· | (231) |
| 怎样利用同角三角函数关系求值·····                                                                           | (233) |
| 怎样借助方程组求三角函数值·····                                                                            | (234) |
| 怎样利用中项求三角函数值·····                                                                             | (235) |
| ⑦ 怎样利用变角法解三角函数·····                                                                           | (237) |
| 怎样利用三角函数解平面几何题·····                                                                           | (239) |
| 怎样利用单位圆求三角函数的定义域·····                                                                         | (241) |
| 怎样用代数法求三角函数的定义域和值域·····                                                                       | (243) |
| 怎样求三角函数的周期·····                                                                               | (245) |
| 怎样确定已知函数 $y = A \sin(\omega x + \theta)$ 中的初相角 $\theta$ ·····                                 | (247) |
| 怎样判断三角函数的单调性和单调区间·····                                                                        | (249) |

|                                |       |
|--------------------------------|-------|
| 怎样由三角函数的图像确定其解析式·····          | (253) |
| 怎样求三角函数的最值·····                | (258) |
| 怎样进行三角函数式的化简·····              | (260) |
| 怎样利用 $\sin 2\alpha$ 解三角函数····· | (263) |
| 怎样证明三角恒等式·····                 | (265) |
| 怎样证明三角函数条件等式 (一)·····          | (268) |
| 怎样证明三角函数条件等式 (二)·····          | (272) |
| 怎样利用三角函数解立体几何题·····            | (275) |
| 怎样利用三角函数判定三角形的形状·····          | (278) |
| 怎样解三角不等式·····                  | (280) |
| 怎样证明三角不等式·····                 | (285) |
| 怎样巧用三角形中的两个正切等式·····           | (288) |
| 怎样用反三角函数表示角·····               | (290) |
| ✓ 怎样利用反三角函数间的相互关系解题·····       | (292) |
| ✓ 怎样求反三角函数的定义域和值域·····         | (295) |
| ✓ 怎样进行反三角函数的化简和求值·····         | (299) |
| ✓ 怎样证明反三角函数的等式·····            | (302) |
| ✓ 怎样解反三角函数方程·····              | (305) |
| ✓ 怎样解简单的三角方程·····              | (308) |
| ✓ 怎样解决解三角方程时的增失根问题·····        | (310) |
| 怎样解含参数的三角方程·····               | (313) |

### 三、立体几何

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| 怎样证明共面、共线、共点问题·····   | (315) |
| 怎样证明空间两直线是异面直线·····   | (317) |
| 怎样求异面直线所成的角·····      | (318) |
| 怎样求异面直线间的距离·····      | (322) |
| 怎样理解与记忆三垂线定理及逆定理····· | (326) |

|                                     |       |
|-------------------------------------|-------|
| 怎样判定直线与直线垂直·····                    | (328) |
| 怎样判定直线与平面垂直·····                    | (330) |
| 怎样证明面面垂直·····                       | (332) |
| 怎样证明线面平行和面面平行·····                  | (333) |
| 怎样求线面角·····                         | (335) |
| 怎样利用直接法求二面角·····                    | (337) |
| 怎样利用间接法求二面角·····                    | (341) |
| 怎样确定点的射影位置·····                     | (343) |
| 怎样解与经纬度有关的问题·····                   | (348) |
| 怎样求侧面积·····                         | (349) |
| 怎样利用割补法解立体几何中的问题·····               | (352) |
| 怎样利用体积法求距离·····                     | (358) |
| 怎样解与球有关的内接、外切几何体问题·····             | (361) |
| 怎样利用平行于底面的截面的性质解题·····              | (363) |
| 怎样解立体几何中的旋转问题·····                  | (365) |
| 怎样解立体几何中的翻折问题·····                  | (368) |
| 怎样利用几何法解立体几何中的最值问题·····             | (370) |
| 怎样利用代数法解立体几何中的最值问题·····             | (372) |
| 怎样利用特殊图形或特殊值解立体几何中的填空题或选<br>择题····· | (375) |

#### 四、平面解析几何

|                                                       |       |
|-------------------------------------------------------|-------|
| 怎样学好解析几何·····                                         | (379) |
| 怎样理解 $\overrightarrow{AB}$ 、 $AB$ 、 $ AB $ 之间的关系····· | (381) |
| 怎样灵活应用两点间的距离公式·····                                   | (384) |
| 怎样理解线段的定比分点·····                                      | (386) |
| 怎样灵活应用直线的斜率公式·····                                    | (388) |
| 怎样理解直线方程四种特殊形式之间的关系·····                              | (390) |

|                           |       |
|---------------------------|-------|
| 怎样防止求直线方程时的漏解问题·····      | (392) |
| 怎样抓住特征量速写直线方程·····        | (394) |
| 怎样利用两直线的平行关系解题·····       | (397) |
| 怎样利用两直线的垂直关系解题·····       | (399) |
| 怎样理解一直线到另一直线的角及它们的夹角····· | (401) |
| 怎样理解两直线的交点·····           | (404) |
| 怎样去掉点线距离公式中的绝对值符号·····    | (406) |
| 怎样利用直线系解题·····            | (409) |
| 怎样解决直线过定点问题·····          | (411) |
| 怎样利用解析法证明平面几何题·····       | (412) |
| 怎样正确理解曲线与方程的概念·····       | (415) |
| 怎样利用直接法求曲线的方程·····        | (417) |
| 怎样利用代入法和定义法求曲线方程·····     | (419) |
| 怎样在求曲线方程时“除杂防漏”·····      | (423) |
| 怎样利用充要条件解题·····           | (425) |
| 怎样求曲线的交点·····             | (426) |
| ✓怎样求圆的方程·····             | (428) |
| ✓怎样判定直线与圆的位置关系·····       | (431) |
| ✓怎样利用直线与圆的位置关系解题·····     | (433) |
| ✓怎样利用圆系解题·····            | (436) |
| 怎样理解椭圆的基本性质·····          | (438) |
| 怎样理解双曲线的基本性质·····         | (442) |
| 怎样利用等轴双曲线的特性解题·····       | (446) |
| 怎样确定抛物线的方程,并利用它解题·····    | (448) |
| 怎样利用抛物线的性质进行一题多解·····     | (452) |
| 怎样求圆锥曲线的方程·····           | (455) |
| 怎样利用直线与圆锥曲线的关系解题·····     | (457) |
| 怎样利用坐标轴的平移化简曲线的方程·····    | (459) |

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| 怎样利用几何图形的性质解题·····            | (462) |
| 怎样互化曲线的参数方程与普通方程·····         | (465) |
| 怎样理解直线的参数方程的几种形式, 如何进行互化····· | (468) |
| 怎样利用直线的参数方程解题·····            | (471) |
| 怎样利用曲线系方程中的参数求曲线方程·····       | (474) |
| 怎样利用曲线系方程解题·····              | (476) |
| 怎样灵活运用参数方程求最值·····            | (479) |
| 怎样利用曲线的参数方程求轨迹·····           | (482) |
| 怎样理解直线、圆、圆锥曲线的极坐标方程·····      | (485) |
| 怎样求曲线的极坐标方程·····              | (488) |
| 怎样互化极坐标与直角坐标·····             | (490) |
| 怎样求极坐标系中两曲线的交点·····           | (493) |
| 怎样在极坐标系中证明点在曲线上·····          | (495) |
| 怎样利用极坐标解复数题·····              | (497) |
| 怎样利用圆锥曲线的极坐标方程解题·····         | (501) |
| 怎样利用圆锥曲线的直角坐标统一方程解题·····      | (504) |

## 五、综合

|                     |       |
|---------------------|-------|
| 怎样审题·····           | (506) |
| 怎样理解、应用反证法·····     | (508) |
| 怎样利用待定系数法解题·····    | (510) |
| 怎样利用换元法解题·····      | (513) |
| 怎样利用“以退求进”策略解题····· | (515) |
| 怎样实施“避实就虚”解题策略····· | (517) |
| 怎样用特殊值法解题·····      | (519) |
| 怎样利用构造法解题·····      | (521) |
| 怎样利用三角解题·····       | (523) |
| 怎样进行代数证明·····       | (525) |

---

|                   |       |
|-------------------|-------|
| 怎样求参变量的范围·····    | (527) |
| 怎样解决归纳、猜想型问题····· | (529) |
| 怎样求解探索性问题·····    | (531) |
| 怎样解决实际问题·····     | (533) |
| 怎样解初高等衔接题·····    | (535) |
| 怎样理解函数与方程的思想····· | (537) |
| 怎样利用数形结合法解题·····  | (539) |
| 怎样进行分类讨论·····     | (541) |
| 怎样进行等价转化·····     | (543) |
| 怎样解综合题·····       | (545) |

## 一、代 数

### 怎样理解集合的概念

集合是近代数学中最基本的概念之一,它和点、直线、平面等概念一样都是不定义的概念。集合的观点渗透到数学的一切领域。

#### 1. 集合的含义

集合虽然是数学中不定义的概念,但它有一定的含义,下面看几个例子:

- (1) 1, 2, 3, 4, 5;
- (2) 与一个角的两边距离相等的所有的点;
- (3) 所有的直角三角形;
- (4)  $x^2$ ,  $3x + 2$ ,  $5y^3 - x$ ,  $x^2 + y^2$ ;
- (5) 某农场所有的拖拉机。

由上面这些例子可知:它们分别由一些数、一些点、一些图形、一些整式、一些物体组成的一个整体。它们的特点是:都是确定的对象,具有一定的属性。

对于集合概念通常用以下语言描述:每一组对象的全体形成一个集合。集合里的各个对象叫做这个集合的元素。

#### 2. 集合的特征

(1) 元素的确定性 对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的.由此我们可以判断任何一个对象是否是某个集合的元素,以及给出的整体是否是集合。

例1 ①1,5,32都是自然数集的元素,而-7就不是它的元素;②某学校所有的老年教师就不能组成一个集合。

(2) 元素的互异性 对于一个给定的集合,集合中的任何两个元素都是不同的对象.即:集合中的元素没有重复的,把相同的对象归入一个集合时只能算做这个集合的一个元素。

例2 方程 $(x-1)^2=0$ 的实数解的集合里只有一个元素1。

(3) 元素的无序性 集合只与它的元素有关,而与它的元素顺序无关.故在表示集合时,通常不考虑它的元素之间的顺序.也就是说:集合里的元素哪一个写在前哪一个写在后,是无关紧要的。

### 3. 集合的表示方法

集合通常用大写的拉丁字母A、B、C……表示,集合中的元素一般用小写的拉丁字母a、b、c……表示。

对于一个确定的元素a和一个确定的集合A,元素a和集合A的关系有且只有以下两种情况之一成立:

(1) 若a是集合A的元素就记为“ $a \in A$ ”,读作“a属于A”。

(2) 若a不是集合A的元素,就记为“ $a \notin A$ ”或“ $a \bar{\in} A$ ”,读作“a不属于A”。

例3 设 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,则 $5 \in B$ ,  $\frac{3}{2} \notin B$ 。

为了方便起见,常用一些固定符号来表示一些特殊数集。

自然数集记作N,整数集记作Z,有理数集记作Q,实数集记作R,正有理数集记作 $Q^+$ ,负实数集记作 $R^-$ 等。

表示集合的方法有列举法和描述法。

(1) 列举法(又叫枚举法):把集合中的元素一一列举出来,写

在大括号内表示集合的方法。

例 4 由数 1, 2, 3, 4, 5 组成的集合  $A$ , 可记为  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。

由元素的无序性知, 用列举法表示集合时, 不必考虑元素之间的顺序, 如例 4 中的集合  $A$ , 也可以表示为  $A = \{3, 2, 1, 4, 5\}$  等。

列举法的优点是直观性强。用列举法写出一个集合后, 易看出集合中的元素是哪些, 给人以清晰的印象。

(2) 描述法: 把集合中的元素的公共属性描述出来, 写在大括号内表示集合的方法。

例 5 全体有理数组成的集合  $Q$ , 可记为  $Q = \{x | x = \frac{m}{n}, m, n \in Z, n \neq 0, m, n \text{ 互质}\}$ 。

用描述法表示集合时, 往往在大括号内先写上这个集合的元素的一般形式, 再画一条竖线, 在竖线右边写上这个集合的元素的公共属性。

描述法表示集合的优点是简明。

有些集合既可用列举法, 又可用描述法表示。

例 6 不大于 10 的正偶数所组成的集合  $M$ 。

解:  $M = \{2x | x \in N \text{ 且 } 1 \leq x \leq 5\}$ . (描述法)

$M = \{\text{不大于 } 10 \text{ 的正偶数}\}$ . (描述法)

$M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ . (列举法)

给定一个集合, 用哪一种方法表示, 一般说来, 可从三个方面考虑而定: ① 可能; ② 确定; ③ 简明。然后选择其中一种集合的表示方法。

#### 4. 集合的类型

集合分为有限集和无限集。如果一个集合中的元素是有限个, 这个集合叫做有限集。如果一个集合中的元素是无限个。这个集合叫做无限集。如:

- (1) 所有自然数组成的集合是无限集;  
 (2) 小于 10 的自然数组成的集合是有限集。

## 怎样证明集合间的包含关系

两个集合之间的包含关系有两种:包含和真包含。要证明两集合间的包含关系,应依据定义证明。

定义 1:对于两个集合  $A$  和  $B$ ,如果集合  $A$  的任何一个元素都属于集合  $B$ ,那么集合  $A$  叫做集合  $B$  的子集。记作  $A \subseteq B$  或  $B \supseteq A$ 。读作“ $A$  包含于  $B$ ”或“ $B$  包含  $A$ ”。

定义 2:如果  $A$  是  $B$  的子集,并且  $B$  中至少有一个元素不属于  $A$ ,那么集合  $A$  叫做集合  $B$  的真子集,记作  $A \subset B$  或  $B \supset A$ 。读作“ $A$  真包含于  $B$ ”或“ $B$  真包含  $A$ ”。

~~例 1~~ 集合  $M = \{x | x = a^2 + 1, a \in N\}$ ,  $P = \{y | y = b^2 - 4b + 5, b \in N\}$ , 证明  $M \subset P$ 。

分析:要证明  $M \subset P$ ,即证明对于任意  $a \in M$ ,则有  $a \in P$ ,且至少存在一个元素  $c \in P$  使  $c \notin M$ 。

证明:设任意的  $x_0 \in M$ ,

$$\text{则 } x_0 = a_0^2 + 1 = (a_0 + 2)^2 - 4(a_0 + 2) + 5,$$

$$\because a_0 \in N, (a_0 + 2) \in N, \therefore x_0 \in P$$

$$\therefore x_0 \in P,$$

$$\therefore M \subseteq P.$$

又当  $b = 2$  时,  $y = 1$ ,

$$\therefore 1 \in P.$$

$$\text{但 } x = a^2 + 1 > 1.$$

$$\therefore 1 \notin M.$$

$$\therefore M \subset P.$$

例2 已知函数  $f(x) = x^2 + ax + b, a, b \in R$ , 两集合  $A, B$  是由  $A = \{x | x = f(x), x \in R\}, B = \{y | y = f[f(x)], x \in R\}$  定义的. 证明  $A \subseteq B$ .

分析: 要证明  $A \subseteq B$ , 即证对于任意  $x \in A$ , 则有  $x \in B$  即可.

证明: 任取  $x \in A$ , 则  $x = f(x)$ .

$\therefore f(x) = f[f(x)]$ , 即有  $x = f(x) = f[f(x)]$ ,

$\therefore x \in B, \therefore A \subseteq B$ .

例3 若集合  $M = \{x | x = m + \frac{1}{6}, m \in Z\}$ ,

$N = \{x | x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in Z\}, P = \{x | x = \frac{p}{2} + \frac{1}{6}, p \in Z\}$ ,

则  $M, N, P$  的关系怎样?

解:  $M, N, P$  都是无限集.

$\therefore M = \{x | x = \frac{6m+1}{6}, m \in Z\}$ ,

$N = \{x | x = \frac{3n-2}{6}, n \in Z\}$

$= \{x | x = \frac{3(n-1)+1}{6}, n \in Z\}$ ,

$P = \{x | x = \frac{3p+1}{6}, p \in Z\}$ ,

由此可知:  $M \subset N = P$ .

例4 已知集合  $A = \{0, 1\}, B = \{x | x \subseteq A\}, C = \{x | x \in A, x \in N\}$ , 试确定  $A, B, C$  之间的关系.

解:  $\therefore A = \{0, 1\}, B = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}, C = \{1\}$ ,

$\therefore A \in B, C \in B, C \subset A$ .

## 怎样证明两个集合相等

对于两个集合  $A$  与  $B$ , 如果  $A \subseteq B$ , 同时  $B \subseteq A$ , 我们称这两