内容提要
释疑解惑
范例解析
习题选解

数学分析学习指导书

上册

吴良森　毛羽辉　韩士安　吴　畏　编著

高等教育出版社

数学分析

学习指导书

上　　册

吴良森　毛羽辉
韩士安　吴　畏　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是与华东师范大学数学系编《数学分析》(第三版,上册)配套的学习指导书,主要是作为学习本课程的课后复习和提高之用。本书按节编写,每节包含:内容提要、释疑解惑、范例解析、习题选解,每章后附有总练习题提示和解答(解答部分约占50%)及测试题。本书切合实际,注意提高学生对数学分析基本概念、基本定理、基本计算技巧的理解和应用,可作为师范院校或其他类型数学专业学生使用,对教师也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析学习指导书.上册/吴良森等编著.—北京:高等教育出版社,2004.8

ISBN 7-04-014363-1

Ⅰ.数... Ⅱ.吴... Ⅲ.数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第063573号

策划编辑 李 蕊 **责任编辑** 舒敬江 **封面设计** 于文燕
责任绘图 吴文信 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 尤 静
责任印制 孔 源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京四季青印刷厂		
开 本	787×960 1/16	**版 次**	2004年8月第1版
印 张	24.5	**印 次**	2004年11月第2次印刷
字 数	460 000	**定 价**	28.10元

物料号:14363-00

前　言

数学分析是高等院校数学专业和应用数学专业的一门重要基础课程。本书是与华东师范大学数学系编的《数学分析》第三版(上、下册)相配套的学习指导书,主要是作为学习数学分析课程的学生课后复习与提高之用,并希望对任课教师也有参考价值。

本书按节编写,每节内容包括如下四部分:

一、内容提要　陈述每节中的基本概念,重要定理、公式及要点与难点分析。

二、释疑解惑　通过一系列问题与解答,用以解释数学分析学习过程中的某些疑难问题。主要包括对课程中某些较难概念的理解;重要定理的条件分析和使用要领;典型方法和技巧的总结;对某些似是而非的论断的辨析。

三、范例解析　在每节中选择5~8个中等和中等以上难度的例题(一般按难易程度排序),通过分析、求解和注释,介绍与该例题有关的典型解题方法和计算技巧,也适度地引入一些物理和其他应用实例。认真钻研这部分内容,对读者掌握基本要求、提高分析和解决问题的能力会有实质性的帮助。

四、习题选解(也有的节略去了这一部分)　对每节中较难的习题给出适当提示或解答。希望读者能正确对待这部分内容,坚持"先做后看"的原则,才能取得事半功倍的效果。

对每章末的总练习题,同样为难度较高的部分习题给出了提示或解答。

本书在各章后设有测试题(分A,B两卷),作为学完各章内容后检测自己掌握知识的程度之用。在书末附有测试题的提示或解答。

在附录中,我们为读者选编了几套我校考研试题,并附解答。

本书分上、下两册,其中第一至第七章和第十三章由吴良森编写;第八至第十一章和第十六章由毛羽辉编写;第十二、十四、十五、十七、十八章由韩士安编写;第十九至第二十三章由吴畏编写;书末考研题由毛羽辉编撰。

编写过程中,由吴良森担任策划、组织工作,毛羽辉和吴良森分别阅读和修改了初稿,最后由毛羽辉整理全书。

高等教育出版社徐刚、王瑜、李蕊、舒敬江等同志对本书编写给予很大帮助,在此一并致谢。

本书承高等教育出版社文小西编审认真审改,提出宝贵的修改意见和建议,在此表示衷心感谢。

由于我们对编写学习指导书缺乏经验,因此难免有不足和错误之处,恳请同行和读者批评指正。

编　者

2004 年 2 月

目　录

第一章　实数集与函数

§1 实　　数

一、内容提要

1° 在中学数学中已经知道实数包括有理数和无理数.有理数可用分数$\frac{p}{q}$(p,q 为互质整数,$q\neq 0$)表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示.$\sqrt{2}$是首先遇到的无理数,它与古希腊时期所发现的不可公度线段理论有直接联系,且可以表示为无限十进不循环小数.

实数的无限十进小数表示在人类实践活动中被普遍采用,我们是由无限十进小数表示出发来叙述实数理论的.

2° 若 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$为非负实数,称有理数

$$x_n=a_0.a_1a_2\cdots a_n$$

为实数 x 的n 位不足近似,而有理数

$$\bar{x}_n=x_n+\frac{1}{10^n}$$

称为 x 的n 位过剩近似.

实数的无限十进小数理论的核心在于定义实数的四则运算,两个有限小数的四则运算可以从末位开始进行,但是两个无限十进小数的运算无法从末位开始.在定义过程中,实数的不足近似和过剩近似起了重要的作用,在教材上册第300 页对无限十进小数的四则运算作了严格的定义.

在§2 中证明确界原理时,下述命题将起重要的作用.

命题　设 $x=a_0.a_1a_2\cdots$与 $y=b_0.b_1b_2\cdots$为两实数,则 $x>y$ 的等价条件是:存在正整数 n,使得

$$x_n>\bar{y}_n.$$

我们对上述命题作一个直观的解释:因为 x_n当n 增加时是递增的,即对任何 n,$x_{n+1}\geqslant x_n$,而 $\bar{y}_n$是递减的,即对任何 n,$\bar{y}_{n+1}\leqslant\bar{y}_n$,于是 $x_n-\bar{y}_n$是递增的,而且随着 n 增大与$x-y$ 越来越接近.若 $x-y>0$,则必定存在某个正整数 n,使得 $x_n>\bar{y}_n$,而且从这个 n 起不等式一直成立.

3° 在数学分析课程中不等式占有重要的地位，在后继课程中，某些不等式可以成为某个研究方向的基础．中学数学中的数学归纳法是证明某些不等式的重要工具，我们在本节范例中将举出这方面的应用，希望读者重视这类技巧．

二、释疑解惑

问题 1 为什么 2.001 与 2.000 999 9… 表示同一实数？

答 因为

$$0.001=\frac{1}{1\ 000}=3\times\frac{1}{3\ 000}=3\times 0.000\ 333\ 3\cdots$$
$$=0.000\ 999\ 9\cdots,$$

于是 2.001 与 2.000 999 9… 表示同一实数．为了实数的无限十进小数表示的唯一性，约定把 2.001 表示为 2.000 999 9…．

问题 2 为什么有理数$\frac{p}{q}$(p,q 为互质的整数，$q\neq 0$)可以表示为无限十进循环小数？

答 不妨设有理数$\frac{p}{q}\in(0,1)$，$p<q$．由实数的阿基米德性可知：存在 a_1 和 r_1，使得

$$10p=a_1q+r_1,\quad 0\leqslant a_1\leqslant 9,\quad 0\leqslant r_1\leqslant q-1,$$

(注：对 $10p,q$，(i) 若 $10p<q$，则 $a_1=0$，$r_1=10p$；(ii) 若 $10p=q$，则 $a_1=1$，$r_1=0$；(iii) 若 $10p>q$，由实数的阿基米德性，存在正整数 a_1，$0<a_1\leqslant 9$，使得$(a_1+1)q>10p$，$a_1q\leqslant 10p$，于是 $r_1=10p-a_1q$．)于是

$$\frac{p}{q}=\frac{a_1}{10}+\frac{r_1}{10q},\quad 0\leqslant\frac{r_1}{10q}<\frac{1}{10}.$$

同样成立

$$10r_1=a_2q+r_2,\quad 0\leqslant a_2\leqslant 9,\quad 0\leqslant r_2\leqslant q-1,$$

于是

$$\frac{r_1}{10q}=\frac{a_2}{10^2}+\frac{r_2}{10^2q},\quad 0\leqslant\frac{r_2}{10^2q}<\frac{1}{10^2},$$
$$\frac{p}{q}=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{r_2}{10^2q}.$$

重复以上步骤可得

$$\begin{cases}10p=a_1q+r_1,\\ 10r_1=a_2q+r_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 10r_{n-1}=a_nq+r_n,\quad 0\leqslant a_n\leqslant 9,\quad 0\leqslant r_n\leqslant q-1,\end{cases}\tag{1.1}$$

于是有

$$\frac{p}{q}=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\frac{r_n}{10^n q},0\leqslant\frac{r_n}{10^n q}<\frac{1}{10^n},$$

这样

$$\frac{p}{q}=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots.$$

因为上述各式中的余数 r_n 为 $\{0,1,2,\cdots,q-1\}$ 中某数，于是等式组(1.1)从某个 n 开始重复，即 $\frac{p}{q}$ 是无限十进循环小数.

三、范例解析

例 1 设 a,b 为任意实数，证明：

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}. \tag{1.2}$$

证 我们将从函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 的性质着手证明不等式.

设 $f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$，$x>0$，若 $0<x_1<x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$.

因为 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，于是有

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\\&=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

□

例 2 利用数学归纳法证明二项式展开定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}, \tag{1.3}$$

其中 a,b 为任意实数，n 为正整数.

证 $n=1$ 时，等式(1.3)显然是成立的. 设等式当 $n=m$ 时成立，即

$$(a+b)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^k b^{m-k},$$

当 $n=m+1$ 时，

$$\begin{aligned}(a+b)^{m+1}&=(a+b)(a+b)^m\\&=(a+b)\left(\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^k b^{m-k}\right)\\&=\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^k b^{m-k+1}+\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^{k+1}b^{m-k}\end{aligned}$$

$$= b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} + \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k a^{k+1} b^{m-k} + a^{m+1}$$

$$= b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1} a^k b^{m-k+1} + a^{m+1}$$

$$= b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} (C_m^k + C_m^{k-1}) a^k b^{m+1-k} + a^{m+1}$$

$$= b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k} + a^{m+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k},$$

其中应用了组合公式 $C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$. 于是由数学归纳法,二项式展开定理对任意正整数 n 成立. □

注 证明中应用了数学归纳法. 本节在后面的例 3、例 5 中将应用它证明其他一些不等式,这是分析证明中常用的方法之一.

例 3 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个实数, $a_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 符号相同,且 $a_i > -1$,证明不等式

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{1.4}$$

当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = x, x > -1$ 时,成立**伯努利**(Bernoulli)**不等式**

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \qquad (x > -1) \qquad n \in \mathbf{N}_+. \tag{1.5}$$

证 $n = 1$ 时不等式(1.5)显然成立. 现设 $n = m$ 时不等式成立,即

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_m) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$

其中 a_i 符号相同且 $a_i > -1(i = 1, 2, \cdots, m)$.

当 $n = m + 1$ 时,因为 $1 + a_{m+1} > 0$,利用 $n = m$ 时的不等式,有

$$\begin{aligned}
&(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_m)(1 + a_{m+1}) \\
\geqslant &(1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m)(1 + a_{m+1}) \\
= &1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)a_{m+1} \\
\geqslant &1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{m+1},
\end{aligned}$$

其中最后不等式成立是由于 a_{m+1} 与 $a_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 同号. 再在不等式(1.5)中令 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = x, x > -1$,则有伯努利不等式

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \quad (x > -1).$$ □

例 4 证明**柯西**(Cauchy)**不等式**:设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为两组实数,则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right). \tag{1.6}$$

证 本例中将应用中学数学中二次三项式恒正的判别式来完成证明.

设 t 为任何实数，t 的二次三项式

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+tb_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2t\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+t^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2\geqslant 0,$$

于是有

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-4\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2\leqslant 0,$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right).\qquad\square$$

例 5 设 $p,n,m\in\mathbf{N}_+$. 证明：

(1) $b^m-a^m=(b-a)(b^{m-1}+b^{m-2}a+b^{m-3}a^2+\cdots+a^{m-1}).$ (1.7)

(2) $n^p<\dfrac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1}<(n+1)^p.$ (1.8)

(3) 试用归纳法证明：

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^p<\frac{n^{p+1}}{p+1}<\sum_{k=1}^{n}k^p.\tag{1.9}$$

证 (1) $\quad(b-a)(b^{m-1}+b^{m-2}a+b^{m-3}a^2+\cdots+a^{m-1})$

$$\begin{aligned}&=b^m+b^{m-1}a+b^{m-2}a^2+\cdots+ba^{m-1}-\\&\quad b^{m-1}a-b^{m-2}a^2-\cdots-ba^{m-1}-a^m\\&=b^m-a^m.\end{aligned}$$

(2) 在(1.7)中设 $b=n+1,a=n,m=p+1$，有

$$(n+1)^{p+1}-n^{p+1}=(n+1)^p+(n+1)^{p-1}n+\cdots+n^p,$$

于是

$$(p+1)n^p<(n+1)^{p+1}-n^{p+1}<(p+1)(n+1)^p,$$

这样就证得

$$n^p<\frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1}<(n+1)^p.$$

(3) 易证 $n=2$ 时，当 p 为正整数时，

$$1^p<\frac{2^{p+1}}{p+1}<1^p+2^p.$$

现设不等式(1.9)当 $n=m$ 时成立，有

$$\sum_{k=1}^{m-1}k^p<\frac{m^{p+1}}{p+1}<\sum_{k=1}^{m}k^p,\tag{1.10}$$

当 $n=m+1$ 时，由(1.8)，(1.10)可得

$$\frac{(m+1)^{p+1}}{p+1}=\frac{(m+1)^{p+1}-m^{p+1}}{p+1}+\frac{m^{p+1}}{p+1}$$

$$< (m+1)^p + \sum_{k=1}^{m} k^p$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} k^p .$$

同样可证

$$\frac{(m+1)^{p+1}}{p+1} = \frac{(m+1)^{p+1} - m^{p+1}}{p+1} + \frac{m^{p+1}}{p+1}$$

$$\geqslant m^p + \sum_{k=1}^{m-1} k^p$$

$$= \sum_{k=1}^{m} k^p .$$

于是不等式(1.9)当 $n = m+1$ 时也成立. □

四、习题选解(教材上册第 4 页)

6. 设 a、b、$c \in \mathbf{R}_+$ ($\mathbf{R}_+$ 表示全体正实数集合). 证明:

$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c| .$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

证 利用根式有理化的方法,有

$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right|$$

$$= \frac{|b+c|\,|b-c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\leqslant \frac{|b|+|c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}|b-c|$$

$$\leqslant |b-c| .$$ □

关于不等式的几何意义请读者通过画图自行解答.

8. 设 p 为正整数. 证明:若 p 不是完全平方数,则$\sqrt{p}$是无理数.

证 用反证法. 假若$\sqrt{p}$为有理数,设

$$\sqrt{p} = \frac{u}{v}, u, v \text{ 为正整数,互质,且 } v \neq 0,$$

于是有 $p = \frac{u^2}{v^2}$.

一方面,p 为非平方数,故 $v^2 \neq 1$. 另一方面,因 u 与 v 互质,故 u^2 与 v^2 也互质;但由 $u^2 = pv^2$, v^2 为 u^2 的一个整数因子,故必有 $v^2 = 1$,矛盾. 由此可见$\sqrt{p}$为无理数.

§2 数集·确界原理

一、内容提要

1° 邻域是数学分析中重要的基本概念.某点的邻域是与该点靠近的数的集合,它是今后描述极限概念的基本工具.

在无限区间记号$(-\infty,a]$,$(-\infty,a)$,$[a,+\infty)$,$(a,+\infty)$,$(-\infty,+\infty)$中出现的$-\infty$与$+\infty$仅是常用的记号,它们并不表示具体的数.在数学分析课程范围内,不要把$+\infty$,$-\infty$,∞当作数来运算.

2° 有界集和无界集是本节中关键的概念.要熟练掌握验证某个数集S是有界集或无界集的方法,其中重要的是证明数M不是数集S的上界(或下界)的方法:

M不是数集S的上(下)界$\Leftrightarrow \exists x_0\in S$,使得$x_0>M(x_0<M)$.要证$S$无上(下)界,只需证明任何数$M$都不是$S$的上(下)界就可以了(注意本节释疑解惑问题2).读者掌握了这种技巧就容易了解如何验证确界的方法.

3° 确界是数学分析的基础严格化中的重要的概念.在初等数学中我们知道有限个数存在最大数和最小数,但是无限数集不一定有最大(小)数.例如:$S=(a,b)$是有界数集,但没有最大(小)数,但是S有最小上界b和最大下界a.定义有界数集S的最小上界为S的上确界,最大下界为S的下确界,由此可见,上(下)确界是最大(小)数在无限数集情况下的推广.

确界概念有两种等价的叙述方法,以上确界为例:

设S是$\mathbf{R}$中一个数集,若数η满足

$$(1)\begin{cases}\text{(i) 对一切 } x\in S\text{,有 } x\leqslant\eta\text{,即 }\eta\text{ 是 }S\text{ 的上界;}\\ \text{(ii) 对任何 }\alpha<\eta\text{,存在 }x_0\in S\text{,使得 }x_0>\alpha\text{,即 }\eta\text{ 又是 }S\text{ 的最小上界.}\end{cases}$$

或

$$(2)\begin{cases}\text{(i) 对一切 } x\in S\text{,有 } x\leqslant\eta\text{,即 }\eta\text{ 是 }S\text{ 的上界;}\\ \text{(ii) 对任何 }\varepsilon>0\text{,存在 }x_0\in S\text{,使得 }x_0>\eta-\varepsilon\text{,即 }\eta\text{ 又是 }S\text{ 的最小上界.}\end{cases}$$

这两种定义是等价的.(2)中的$\eta-\varepsilon$相当于(1)中的α.**在上述定义中可以限定$\varepsilon<\varepsilon_0$,其中$\varepsilon_0$为充分小的正数**.定义(2)在某些证明题中使用起来更方便些.

4° 确界原理:设S是非空数集,若S有上界,则S必有上确界;若S有下界,则S必有下确界.

确界原理是实数系完备性的几个等价定理中的一个.在不少数学分析教程中把它作为叙述实数理论的出发点.确界定理的证明中主要是构造区间列

$$\left\{\left[n.n_1n_2\cdots n_k,\quad n.n_1n_2\cdots n_k+\frac{1}{10^k}\right],k=1,2,\cdots\right\},$$

使得每个区间的左端点 $n.n_1n_2\cdots n_k$ 不是数集 S 的上界,但是右端点 $n.n_1n_2\cdots n_k+\frac{1}{10^k}$ 是数集 S 的上界,而 $\eta=n.n_1n_2\cdots n_k\cdots$ 正好是数集 S 的上确界,这种证明是一种搜索上确界的过程,而且容易在计算机上得到实现.

二、释疑解惑

问题 1 非空有界数集 S 的上确界是否是 S 中的最大数? 下确界是否是 S 中的最小数? 在什么情况下,非空有界数集的上确界是最大数,下确界是最小数?

答 如果一个数集 S 的最大(小)数存在,则它就是 S 的上(下)确界.有限数集必有最大(小)数,故有限数集必有上(下)确界.而无限集 S 的上(下)确界就不一定是 S 的最大(小)数.例如数集

$$S=\left\{(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\middle|n=1,2,\cdots\right\},$$

可证

$$\sup S=1,\quad \inf S=-1.$$

先证 $\sup S=1$,注意到 $n=2k$,且 n 充分大时,$(-1)^{2k}\left(1-\frac{1}{2k}\right)$ 可以充分靠近 1.于是

(i) $\forall n,(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\leqslant 1$;

(ii) $\forall \varepsilon>0$,当 k 充分大时 $\left(k>\frac{1}{2\varepsilon}\right)$,有 $1-\varepsilon<1-\frac{1}{2k}$,于是 $\sup S=1$.

同理可证 $\inf S=-1$.但是 $\sup S,\inf S$ 并不是 S 的最大、最小数.

若非空有界数集 S 的上确界 $\sup S\in S$,则 $\sup S$ 是最大数;若 S 的下确界 $\inf S\in S$,则 $\inf S$ 是最小数.故对于有界无限数蒋来说,其上(下)确界可以看作最大(小)数的推广.

问题 2 怎样给出无下界数集和无界数集的正面陈述?

答 无下界集:设数集 $S\subset\mathbf{R}$,若 $\forall L,\exists x\in S$,使得 $x<L$,则称 S 是无下界集.

无界集:设数集 $S\subset\mathbf{R}$,若 $\forall M>0,\exists x\in S$,使得 $|x|>M$,则称 S 是无界集.

例如,$S=\{-n^{(-1)^n}\mid n=1,2,\cdots\}$ 是无下界集.这是因为 $\forall L,\exists n=2k_0>|L|$,使得 $-n^{(-1)^n}=-2k_0<L$.

比较有界集与无界集的定义.把有界集定义中"$\exists M>0$"换成"$\forall M>0$";"$\forall x\in S$"换成"$\exists x\in S$";不等式"$|x|\leqslant M$"换成"$|x|>M$",即可得无界集的正面陈述.无上界集的含义是任何 M 都不是数集的上界.把数学形式的陈述与其直观意义结合在一起理解,有利于掌握否定形式的陈述.

问题 3 怎样给出数 ζ 不是数集 S 的上确界的正面陈述?

答 若 ζ 不是数集 S 的上确界,则或者 ζ 不是 S 的上界,或者 ζ 是 S 的上界,但不是最小上界.于是数 ζ 不是数集 S 的上确界的正面陈述为:

(i) $\exists x_0\in S$,使得 $x_0>\zeta$;或者

(ii) $\exists \alpha_0<\zeta,\forall x\in S,x\leqslant\alpha_0$.

三、范例解析

例 1 求数集 $S=\left\{\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}\,\middle|\,n\in\mathbf{N}_+\right\}$的上、下确界.

分析 当 $n=2k$ 时,$\sqrt[2k]{1+2^{2k}}=2\sqrt[2k]{1+\dfrac{1}{2^{2k}}}$,容易看出 $k=1$ 时 $2\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}}$是偶数项中的最大数.当 $n=2k+1$ 时,$\sqrt[2k+1]{1+2^{-(2k+1)}}=\sqrt[2k+1]{1+\dfrac{1}{2^{2k+1}}}>1$,当 k 充分大时,奇数项与数 1 充分靠近.因为 $2\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}}=\sqrt{5}$是 S 中最大数,于是 $\sup S=\sqrt{5}$,由上面分析可以看出 $\inf S=1$.

解 因为$\sqrt{5}$是 S 中最大数,于是 $\sup S=\sqrt{5}$.再证 $\inf S=1$,这是因为

(i) $\forall n,\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}\geqslant 1$;

(ii) 设 $a=\sqrt[2k+1]{1+\dfrac{1}{2^{2k+1}}}$,由等式 $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1)$可知,

$$\sqrt[2k+1]{1+\frac{1}{2^{2k+1}}}-1=\frac{\dfrac{1}{2^{2k+1}}}{a^{2k}+a^{2k-1}+\cdots+1}\leqslant\frac{1}{2^{2k+1}},$$

于是 $\forall\varepsilon>0,\exists k_0\in\mathbf{N}_+\left(\text{只要 } k_0>\dfrac{1}{2}\left(\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right)\right)$,使得

$$\sqrt[2k_0+1]{1+\frac{1}{2^{2k_0+1}}}-1\leqslant\frac{1}{2^{2k_0+1}}<\varepsilon,$$

即

$$\sqrt[2k_0+1]{1+\frac{1}{2^{2k_0+1}}}<1+\varepsilon,$$