高中

数学奥林匹克高级读本

四川省数学会 编
魏有德 主编

四川大学出版社

数学奥林匹克高级读本

（上 册）

四川省数学学会
《中学生数理化》编辑部 编

主编 魏有德

副主编 张培根 税德仲
张忠良 唐德全

四川大学出版社
1992·成都

(川)新登字014号

责任编辑：谭同余
封面设计：冯先洁

数学奥林匹克高级读本(上册)

主编 魏有德
副主编 张培根 税德仲 张忠良 唐德全

四川大学出版社出版发行 (成都四川大学内)
四川省新华书店经销 郫县犀浦印刷厂印刷
787×1092mm 1/32 印张：9.3125 字数：204千
1992年7月第一版 1992年7月第一次印刷
印数：1—30,000册
ISBN 7-5614-0562-6/O·72 定价：3.10元

序　言

为小学和初中小朋友编写的数学奥林匹克初、中级读本先后问世之后，顺理成章，人们期待着它的姐妹篇——高级读本的编印。另一方面，国际数学奥林匹克(IMO)已举办了32届，参加国遍及六大洲。近几年我国选手接连折桂，影响所及，爱好数学的广大青少年莫不摩拳擦掌，希望在各级数学奥林匹克中一展风姿，检验自己的才智，促进自我的提高。可谓时势逼人，从事数学普及工作者顺应潮流把这个重担挑起来。现在摆在大家面前的《数学奥林匹克高级读本》是按照中国数学会普委会拟定的高中数学竞赛大纲编写的，上册基本上是平行于课内数学，但对课内教材内容进行提炼、概括、深化和拓宽，其难度达到高考理科试题及全国联赛一试水准，下册则是按全国联赛的二试水准，精选内容进行专题讲解，深入浅出，富有启发性。希望本书能成为高中学生与数学爱好者的良师益友。自然它对广大的中学数学教师和数学普及工作者，也是一本很好的参考书。

“数学是科学的皇后”(高斯语)，在科技成为第一生产力的今天，以定量分析见长、数形结合完美的数学其重要性更是不言而喻的。数学还是无声的音乐，无色的图画，它十分和谐、奇妙。不少人步入数学的瑰丽厅堂而不能自已，不正是被数学的力量、数学的美妙所吸引?！本书所展示的万象纷繁的数学世界的几个镜头，不知能否使你留下这方面的一点印象。

近几年IMO夺魁战中，四川选手在1988年就夺金牌，在1989年荣获团体冠军中又功居首位，过关斩将，这是巴蜀子弟的业绩，但其中也渗透着全川广大数学普及工作者的斑斑汗水。他们编出这一个高级读本也是对他们过去的辛勤劳动的一个总结。希望本书的问世将在巴山蜀水以至神州大地引起更大反响，在孕育我国优秀的数学奥林匹克选手以至培养廿一世纪数学英才中产生应有的作用。

最后，对全川数学普及工作大力支持、对本书出版十分关怀的四川大学出版社和“中学生数理化”编辑部表示深深的谢意！

国家教委科技委数学组成员
四川省数学会理事长
刘应明
一九九二年五月

前言

《数学奥林匹克高级读本》上、下册是为适应高中开展第二课堂活动的需要而编写的。我们编写本书的指导思想是，贯彻中国数学会普委会提出的数学普及工作“以普及为主，在普及的基础上提高”的方针和全国高中数学竞赛大纲精神，努力促进高中数学教学质量大面积提高，尽量满足学有余力的同学的求知欲。在拟定提纲和审稿时，注意了和“初级读本”，“中级读本”保持连贯性、系统性，并尽力作到既有所提高，又有所本。

在体例上，上册各讲基本上按照教学大纲的知识顺序，按年级编写，做到“源于教材，高于教材”，使同学们能通过本书的学习加深和拓宽数学知识，更深刻地理解教材知识和方法的数学背景。学好上册内容将有助于提高同学们的高考和竞赛初试成绩。

下册各讲是按照高中数学竞赛大纲的要求以专题讲座的形式补充了相当丰富的内容，各讲涉及的知识与方法不超过竞赛大纲的范围，主要取材于国内外高中数学竞赛试题。

在内容安排上，从较低起点出发，循序渐进地、全面而有层次地系统讲解高中数学竞赛大纲所列的知识要点，最后达到全国高中数学联赛水平的高度。因而，适合于同学们自学和课外活动教学安排。

作为开展数学奥林匹克活动的基础教材，各讲配备了必要的练习题，虽然书末配有较详细的解答，但我们希望使用本

书的读者尽量独立去研究解答，这会有助于提高解题能力，并加深对所学内容的理解。

由于各级有关部门对教育的重视与关怀，我省数学奥林匹克活动已具备了十分雄厚的群众基础。我们相信，本书的出版发行将有助于这一活动的规范化，促进它的健康发展。在此，谨对广大教练员的无私奉献精神表示诚挚的谢意。没有他们在第一线的勤奋工作，是不可能形成这一良好局面的。

为本书上册提供书稿的有（以姓名笔画为序）：

丁廷楹	马笃斌	马加玲	王守一	叶长春
刘绍宽	刘崇孟	刘和玉	李晓元	李景骏
邱兴元	许美玉	陈 出	何其斌	张培根
张忠良	林 云	林益生	唐德全	曾毓吉
杨开理	杨胜华	蒲殿娥	韩可立	魏常俊

由于水平所限，难免有错误出现，恳请读者不吝赐教。

魏有德

一九九二年五月于四川大学

目　　录

第 1 讲　函数

函数研究的主要内容，是用集合与映射的观点，讨论变量间的对应关系。函数是高中数学的一条主线。函数与其它数学知识有着紧密的联系并得到广泛应用。

本讲着重讨论：初等函数的基本性质及其应用；复合函数及其单调性；函数的最(极)值问题三个部分。

一、初等函数的性质及其应用

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数，称为基本初等函数，由基本初等函数经有限次运算或复合构成的函数，称为初等函数。正、反比例函数，一次、二次函数等，都是常见的初等函数。

函数的基本性质，包括定义域和值域，函数的单调性、奇偶性、周期性、正负性以及函数的特殊值(包括最、极值)等。

1. 函数的定义域和值域

对任何函数的讨论，只有在确定了定义域以后，才是有意义的。多项式函数，如无特殊限制，其定义域为 R；分式函数要求分母非零；偶次根式函数要求被开方式非负；正、余切函数要求角不等于 $k\pi+\pi/2$ 或 $k\pi(k\in Z)$；对数函数要求真数为正；反正弦、反余弦函数要求被取函数的式子的绝对值不大于 1。若一个函数涉及上述几类函数，则先确定各类函数的定义域以后再求其交集。

互为反函数的两个函数的定义域与值域互相交换。

函数值域的求法有：反函数法；一元二次方程的判别式法；基本不等式法等。

例 1　求函数 $y=\sqrt{9-x^2}/\lg(|x|-1)$ 的定义域。

解　根据二次根式、分式及对数式的要求，有

$$\begin{cases}9-x^2\geqslant 0\\ \lg(|x|-1)\neq 0\\ |x|-1>0\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3\\ x\neq\pm 2\\ x<-1 或 x>1。\end{cases}$$

故所求函数的定义域为

$$[-3,-2)\cup(-2,-1)\cup(1,2)\cup(2,3]。$$

例 2　求下列函数的值域：

均值定理 (1) $y=\log_a x+\log_x a\quad(a>0,\ a\neq 1)$，

(2) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$。

分子有理化

解　(1) 易知 $x>0$ 且 $x\neq 1$；

当 $a>1$ 且 $x>1$ 或 $0<a<1$ 且 $0<x<1$ 时，

$$\log_a x>0,\ \log_x a>0,$$

则 $y=\log_a x+\log_x a\geqslant 2\sqrt{\log_a x\cdot\log_x a}=2$。

当 $0<a<1$ 且 $x>1$，或 $a>1$ 且 $0<x<1$ 时，

$$\log_a x<0,\ 或 \log_x a<0,$$

$\therefore y=\log_a x+\log_x a\leqslant -2$。

故所求函数的值域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$。

(2) 易知该函数的定义域为 $x\geqslant 1$，且函数在定义域内可以化为

$$y=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}>0。$$

而函数 $y_1=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$ 在定义域内递增，故当 $x=1$ 时 y_1 有最小值 $\sqrt{2}$，此时 $y_{max}=\sqrt{2}$。

故所求函数的值域为$(0,\sqrt{2}]$。

2. 函数单调性的应用

函数的单调性多用于函数值的大小比较，也常用于解不等式或不等式的证明。

例 3 已知 $a>b>1$，比较 $\log_a b$ 与 $\log_b a$ 的大小。

解 $\because a>b>1$，$\therefore \log_a x$ 与 $\log_b x$ 都是增函数。

$\therefore \log_a b<\log_a a=1$，$\log_b a>\log_b b=1$。

$\therefore \log_a b<\log_b a$。

例 4 解关于 x 的不等式 $a^2x^2\leqslant x^{\log_a x+1}$ $(a>0,a\neq 1)$。

解 显然 $x>0$，当 $a>1$ 时，不等式两边取对数有

$$2+2\log_a x\leqslant(\log_a x+1)\cdot\log_a x。$$

即 $\log_a^2 x-\log_a x-2\geqslant 0$。解之得 $\log_a x\leqslant -1$ 或 $\log_a x\geqslant 2$。

$\therefore 0<x\leqslant\dfrac{1}{a}$ 或 $x\geqslant a^2$。

类似，当 $0<a<1$ 时，有 $\log_a^2 x-\log_a x-2\leqslant 0$，

$\therefore -1\leqslant\log_a x\leqslant 2$，因而 $a^2\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{a}$。

例 5 求证下列不等式：

(1) 若 $0<a<b$ 且 $m\geqslant 0$，则 $\dfrac{a+m}{b+m}\geqslant\dfrac{a}{b}$；

√ (2) $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|b|}{1+|a|}+\dfrac{|a|}{1+|b|}$。可看成一种函数

证 (1) 设 $f(x)=\dfrac{a+x}{b+x}$ $(x\geqslant 0)$。

任取 $0<x_1<x_2<+\infty$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{a+x_1}{b+x_1}-\frac{a+x_2}{b+x_2}=\frac{(a-b)(x_2-x_1)}{(b+x_1)(b+x_2)}。$$

$\because a-b<0$，$x_2-x_1>0$，$(b+x_1)(b+x_2)>0$。

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$ 即 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数。

$\because m \geqslant 0$，$\therefore f(m) \geqslant f(0)$。即 $\dfrac{a+m}{b+m} \geqslant \dfrac{a}{b}$。

(2) 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}(x \geqslant 0)$。任取 $0 < x_1 < x_2 < +\infty$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)},$$

由所设条件知 $(1+x_1)(1+x_2)>0$，$x_1-x_2<0$。

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$，即 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数。

因 $|a+b| \leqslant |a|+|b|$，故

$$f(|a+b|) \leqslant f(|a|+|b|),$$

从而有：

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|b|}{1+|a|+|b|}+\frac{|a|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|b|}{1+|a|}+\frac{|a|}{1+|b|}。$$

说明 例 5 中两个不等式的证明，都应用了函数的增减性。其证法称为"母函数"法。它的要点是：根据所证不等式的结构特征，建立一个与之相应的母函数 $f(x)$，并确定 $f(x)$ 的增减性，再令 $f(x)$ 中的 x 取不等式中相应的值，即可得到所证不等式。

3. 函数奇偶性的应用

奇偶性的应用往往与单调性及反函数的知识结合应用。

在关于原点对称的两个范围上，奇函数具有相同的单调性，偶函数具有相反的单调性。

奇函数如果存在反函数的话，其反函数也是奇函数（请读者自己证明），偶函数一定不存在反函数（为什么？）。

例 6 试讨论函数 $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ 的单调性。

分析 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,$

$+\infty)$。由于 $f(x)$ 为奇函数，故在原点对称的两个范围上有相同的单调性，因此，我们只需要在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 讨论其单调性即可。

解 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}$。

若 $0<x_1<x_2<1$，则 $x_1-x_2<0$，

$$(1-x_1^2)(1-x_2^2)>0,$$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$；

若 $1<x_1<x_2<+\infty$，同样有 $f(x_1)<f(x_2)$。

故 $f(x)$ 在每个区间 $(-\infty,-1)$，$(-1,1)$，$(1,+\infty)$ 上均为增函数。

例 7 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的偶函数，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数，若 $f(a-2)-f(4-a^2)<0$，试确定 a 的取值范围。

解 $\because f(x)$ 为偶函数，且在 $(0,1)$ 上为增函数，故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上为减函数，且有 $f(4-a^2)=f(a^2-4)$，于是，由已知不等式，有 $f(a-2)<f(a^2-4)$。

(1) 当 $a-2$ 与 a^2-4 均在区间 $(0,1)$ 上时，有

$$\begin{cases}0<a-2<1\\0<a^2-4<1\\a-2<a^2-4,\end{cases}$$

解之，得 $\begin{cases}2<a<3\\-\sqrt{5}<a<-2\text{ 或 }2<a<\sqrt{5}\\a<-1\text{ 或 }a>2。\end{cases}$

此时，a 的取值范围为 $(2,\sqrt{5})$。

(2) 当 $a-2$ 与 a^2-4 均在区间 $(-1,0)$ 上时，有

$$\begin{cases}-1<a-2<0\\-1<a^2-4<0\\a-2>a^2-4,\end{cases}$$

解之,得 $\begin{cases}1<a<2\\-2<a<-\sqrt{3}\text{ 或}\sqrt{3}<a<2\\-1<a<2。\end{cases}$

此时,a 的取值范围为$(\sqrt{3},2)$。

(3) 当 $a-2$ 与 a^2-4 分处于$(-1,0)$、$(0,1)$ 或$(0,1)$、$(-1,0)$ 时,相应的不等式组无解。

综上所述, 满足条件的 a 的取值范围是: $(\sqrt{3},2)\cup(2,\sqrt{5})$。

二、复合函数及其单调性

若 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$,那么 $y=f[\varphi(x)]$ 称为复合函数,u 称为中间变量,f 称为外函数,φ 称为内函数,复合函数的定义域、值域求法与前面一致。这里主要讨论函数的复合变形与复合函数的单调性。

讨论复合函数的单调性,应首先确定函数的定义域,然后分别讨论 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的单调性,最后按下述规律确定:

(1) 若外函数 $y=f(u)$ 与内函数 $u=\varphi(x)$ 在相应的区间上有相同的单调性,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 的相应区间上为增函数;

(2) 若外函数 $y=f(u)$ 与内函数 $u=\varphi(x)$ 在相应区间上具有相反的单调性,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 的相应区间上为减函数。

请读者从单调性的定义出发证明这两个结论。

例8　已知 $f(x)=x-x^{-1}$，

(1) 求证 $[f(x)]^3=f(x^3)-3f(x)$；

(2) 求使 $f[f(x)]=x$ 成立的 x 的值。

解　(1) $\because f(x^3)=x^3-x^{-3}$，$3f(x)=3x-3x^{-1}$，

故
$$[f(x)]^3=(x-x^{-1})^3=x^3-x^{-3}-3(x-x^{-1})$$
$$=f(x^3)-3f(x)。$$

(2)
$$f[f(x)]=(x-x^{-1})-\frac{1}{x-x^{-1}}=\frac{x^2-1}{x}-\frac{x}{x^2-1}$$
$$=\frac{x^4-3x^2+1}{x(x^2-1)},$$

由 $\dfrac{x^4-3x^2+1}{x(x^2-1)}=x$，可化简得 $2x^2=1$，

故所求的 $x=\pm\sqrt{2}/2$。

例9　试确定 $f(x)=\log_{0.5}(2x^2-5x+3)$ 的单调性。

解　由 $2x^2-5x+3>0$ 知，$f(x)$ 的定义域为
$$(-\infty,1)\cup(3/2,+\infty)。$$

令 $u=\varphi(x)=2x^2-5x+3=2(x-5/4)^2-1/8$。

$\because$ 外函数 $y=\log_{0.5}u(u>0)$ 为减函数。当 $x<1(<5/4)$ 时，内函数 $\varphi(x)$ 为减函数，此时，复合函数 $f(x)=\log_{0.5}(2x^2-5x+3)$ 为增函数；当 $x>3/2(>5/4)$ 时，内函数 $\varphi(x)$ 为增函数，此时复合函数 $f(x)=\log_{0.5}(2x^2-5x+3)$ 为减函数。

综上所述：当 $x<1$ 时，$f(x)$ 为增函数，当 $x>3/2$ 时，$f(x)$ 为减函数。

例10　已知平方项系数为正的二次函数 $f(u)$ 满足 $f(1-u)=f(1+u)$，试比较 $f(2^x)$ 与 $f(3^x)$ 的大小。

解　显然，$y=f(u)$ 的图象为开口向上的抛物线。由

$f(1-u)=f(1+u)$ 知，其对称轴为 $u=1$，即当 $u<1$ 时，$y=f(u)$ 为减函数，当 $u>1$ 时，$y=f(u)$ 为增函数。

故 $x<0$ 时，$3^x<2^x<1$，$\therefore f(2^x)<f(3^x)$；

$x>0$ 时，$3^x>2^x>1$，$\therefore f(2^x)<f(3^x)$；

$x=0$ 时，$3^x=2^x$，$\therefore f(2^x)=f(3^x)$。

例 11 讨论函数 $y=\log_{2a-1}(1-a^{x-1})$ $(a>1/2, a\neq 1)$ 的单调性。

解 由对数的意义知 $1-a^{x-1}>0$，即 $a^{x-1}<1$。

当 $a>1$ 时，$x<1$；当 $1/2<a<1$ 时，$x>1$。故函数的定义域为 $a>1$ 时 $x<1$；$1/2<a<1$ 时，$x>1$。

(1) 当 $1/2<a<1$ 时，内函数 $u=1-a^{x-1}$ 在 $x>1$ 上为增函数，而外函数 $y=\log_{2a-1}u$ 为减函数，故当 $1/2<a<1$ 时，复合函数 $y=\log_{2a-1}(1-a^{x-1})$ 在其定义域区间 $(1,+\infty)$ 上为减函数；

(2) 当 $a>1$ 时，$1-a^{x-1}$ 在 $x<1$ 上为减函数，而 $y=\log_{2a-1}u$ 为增函数，故 $y=\log_{2a-1}(1-a^{x-1})$ 在其定义域 $(-\infty,1)$ 上为减函数。

三、函数的最（极）值问题

1. 基本概念

若函数 $y=f(x)$ 在其定义域 M 内有一点 x_0，使 $f(x)\leqslant f(x_0)$（$f(x)\geqslant f(x_0)$）对一切 $x\in M$ 都成立，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有最大（最小）值。定义在闭区间上的单调函数，总在其端点处取得最大、最小值。

若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 及其邻近有意义，且对于 $x=x_0$ 邻近的一切 x，都有 $f(x)<f(x_0)$（$f(x)>f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 是

$f(x)$ 的一个极大(极小)值。

显然，最值是在整个定义域内讨论的，而极值则是在局部区间内讨论的。函数的极值可能不存在，也可能不止一个，还可能某个极小值(却)大于它的某个极大值。(注：中学阶段只讨论最值问题。教科书上的“极值”实指“最值”，所以，我们这里的“最值”就是教科书的“极值”)。

2. 二次函数的最值

函数 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 当 $a > 0$ 时，在 $x = -\frac{b}{2a}$ 处取得最小值 $y_{min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$；$a < 0$ 时，在 $x = -\frac{b}{2a}$ 处取得最大值 $y_{max} = \frac{4ac - b^2}{4a}$。至于 $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上的最值，可以通过图象来说明。

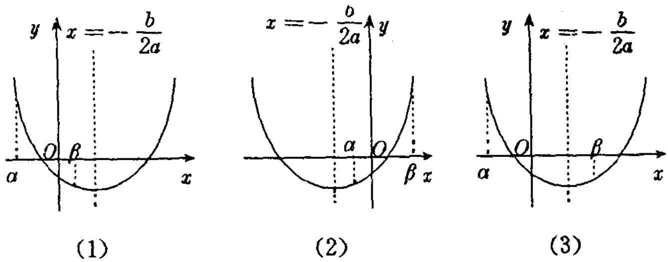

图 1 − 1

以 $a > 0$ 的情况为例：

(1) 若 $\beta \leqslant -\frac{b}{2a}$，则 $[\alpha, \beta] \subset (-\infty, -\frac{b}{2a}]$，因此，

$y_{max} = f(\alpha)$，$y_{min} = f(\beta)$，如图 1 − 1(1)。

(2) 若 $\alpha \geqslant -\frac{b}{2a}$，则 $[\alpha, \beta] \subset [-\frac{b}{2a}, +\infty)$，因此，