普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学教程

复变函数与积分变换

刘建亚　主编

张光明　郑修才　编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学 教程

复变函数与积分变换

刘建亚 主编

张光明 郑修才 编

高等教育出版社

内容提要

大学数学教程是普通高等教育“十五”国家级规划教材，本书是其中的第五册，内容包括复变函数与积分变换两部分。复变函数部分内容有：复数与复变函数，解析函数，复变函数的积分，复级数，留数及其应用，保角映射（共形映照），解析函数在平面向量场中的应用。积分变换部分内容有：傅里叶变换和拉普拉斯变换。

本书例题丰富，论证严谨，易教易学。个别重要内容用加标“*”号的办法引入，可扩大读者的知识面，模块化的思想也使本教材前后几部分内容既互相联系，又相互独立，增加了使用该教材时的灵活性。本书每章都配有适量的习题，还配有用数学实验软件 MATLAB 解决实际问题的程序。书末附有习题答案及附表，并附有部分数学家小传。

本书可作为理工科大学有关专业的本科教材，也可供科技、工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换 / 刘建亚主编. —北京：高等教育出版社，2005.3

ISBN 7-04-016218-0

Ⅰ.复...　Ⅱ.刘...　Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材　Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 012481 号

策划编辑 王　强　**责任编辑** 蒋　青　**封面设计** 于　涛　**责任绘图** 尹　莉
版式设计 范晓红　**责任校对** 王　超　**责任印制** 杨　明

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2005 年 3 月第 1 版
印　　张	17	**印　　次**	2005 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	310 000	**定　　价**	19.80 元

物料号　16218-00

大学数学教程

丛 书

前　言

按传统的观点，在大学里除数学类各专业外，数学只是理、工等类学生的基础课，是学习后续课程和解决某些实际问题的工具。随着社会的进步、科学技术的发展和高等教育水平的不断提高，数学已渗透到包括经济、金融、信息、社会等各个领域，人们越来越深刻认识到过去看法的不足，越来越深刻认识到数学教育在高等教育中的重要性。数学不仅是基础、是工具，更重要的是探索物质世界运动规律的重要手段，是一种思维模式——数学思维模式，数学教育是培养大学生理性思维品格和思辨能力的重要载体，是开发大学生潜在能动性和创造力的重要基础；同时，数学又是一种文化——数学文化，它显示着千百年来人类文化的缩微景象，也是当代大学生必须具备的文化修养之一。因此大学数学不仅是理、工类学生应该学习，而且也是大学各类专业学生都应该学习的课程，数学教育是大学生素质教育的重要组成部分。当然，不同类型专业对数学的要求和内容会有所不同。

为了适应新世纪我国高等教育迅速发展的形势和实行学分制的需要，满足新时期高等教育人才培养拓宽口径、增强适应性对数学教育的要求，山东大学数学与系统科学学院从2000年开始按照教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的精神和要求，在学院领导的亲自参与下，组织部分教师对非数学类专业大学数学的课程体系进行了认真深入的研究和论证。针对大学数学是高校非数学类专业所有大学生应当具有的素质，又考虑到不同专业的要求深浅不同、内容多少各异的实际情况，制订了适应这种情况的新课程体系。新课程体系的主要特点是采取平台加模块的结构，整个大学数学的课程共分三个平台，不同平台反映了不同专业对数学知识的不同层次、级别要求，体现数学知识结构和大学生认知结构的统一。鉴于人类认识是从感性到理性，由易到难，由浅入深的，因此第一平台(包括微积分(一)、线性代数和概率统计)是体现高等数学的普及和基础，体现所有各专业应当具有的数学素质教育，主要侧重基本概念和基本方法，加强基本运算，努力渗透基本数学思想；第二平台是对第一平台基本概念的加深和知识方法的拓宽，在本平台中还适当体现出数学理论的系统性和严谨性；第三平台(包括数学建模、数值分析、数理方程、复变函数和积分变换、运筹学等)则是为满足某些对数学知识和方法有特殊要求的专业而设置。各平台的教学内容由浅入深，反映不同专业对数学知识和内容的不同要求；各平台的内容又采取模块组合的方式，模块间相对独立，各专业亦可根据本专业的需要，选用不同的模块组合，这样就使得新的课程体系具有更大的灵活性，能够满足不同层次、不同要求的专业对数学教学的需求。另外，新课程体系还将利用计

算机解决数学问题的数学实验融入其中，做到理论和实践的有机结合。

山东大学教务处对新课程体系给予充分的肯定，并大力支持按新课程体系编写相应的教材。在我们初稿完成之后，教务处安排几个专业的学生先行试用，并在此基础上加以修改完善。目前，已完成了三个平台中共计五册的教材编写和修改。其中，微积分为两册，分属两个平台；线性代数和概率统计各一册，属于第一平台；复变函数与积分变换为一册，属于第三平台。这套教材的特点除上述平台加模块的结构外，还有以下特色：

1. 内容少而精，体现素质教育，突出数学思想。我们重点介绍高等数学中的基本概念和基本方法；以培养读者的能力和提高素质为着眼点，有选择地保留了部分定理、性质的证明，对那些用类似的技巧方法，或者读者举一反三可以理解或自学的证明部分省略或简化处理。

2. 扩大了读者的知识面。我们将各专业不同需求的数学内容融进在一套教材中。主要的做法是：用“ * ”号标明了不同层次对数学的要求；从不同的学科例题分析中引进基本概念；阐述基本内容在各主要学科中的应用；习题中涉及多学科。这使不同专业的读者可以了解到高等数学中的相关知识在其他专业中的应用。这在知识经济时代是非常必要的。另一方面，可以满足目前多数读者希望跨学科获取更多知识的愿望。如在数学要求较低专业学习的读者希望学习更多数学知识（如跨学科考研或工作需要）时，可以从同一本书中按“ * ”号的标示中获取。当然，教师在授课时可按本专业的要求有选择的使用。

3. 与中学知识相衔接，易教易学。对一些较困难，不易被刚进大学的学生所接受的内容，如极限的“ε-N”，“ε-δ”定义，以及部分不影响整体结构的较困难内容，如泰勒中值定理等均放入第二平台。希望这使读者对数学增添兴趣，提高学习的自信心。

4. 总学时减少，可在原定学时中学习更多、更新的知识。

5. 各章后的习题配置除基本练习外，还有部分综合练习题，以提高读者分析问题、解决问题的能力。综合练习题多置于每章习题后部且配以“ * ”号标示。

6. 增添了利用计算机解决数学问题的内容，在每章后均有解决本章主题问题的 MATLAB 程序和例题演示。

7. 本书附有在数学发展史中一些著名数学家的简介。从这些数学家辉煌成就背后的艰苦奋斗故事中，希望可以激发读者学习的热情和兴趣。

本套书由山东大学数学与系统科学学院组织部分有较高水平和丰富教学经验的教师集体编写，最后聘请有关专家审定。在编写过程中，数学院领导给予了极大的关注、支持和具体指导，为此曾多次召开各种类型的会议反复论证，几易手稿。

大学数学教程的主编是刘建亚。复变函数与积分变换部分由张光明（第6,7,8,9章及附录Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ）、郑修才（第1,2,3,4,5章）编写，由张光明完成统稿工作；由仪洪勋、江守礼审阅；数学实验内容由傅国华编写；数学家简介由包芳勋编写。

本套教材作为普通高等教育“十五”国家级规划教材正式出版，是教育改革的产物。在此，我们感谢山东大学教务处、山东大学出版基金委、山东大学数学院领导对改革和教材出版的鼎力支持，感谢仪洪勋、江守礼教授对我们的鼓励和帮助。我们特别感谢高等教育出版社，由于他们的指导和帮助才使本书顺利与读者见面。

新时期大学数学的教学改革是一项非常紧迫、非常重要，也是非常艰巨的工作。限于编者水平，本书肯定会有许多不足和缺点，乃至问题，恳请读者批评指正。

编　者

2004年1月

本书的使用说明

1. 复变函数部分中不加“ * ”号的内容是基本的，建议开设本课程的各专业均采用，带“ * ”的内容可供学有余力的同学课外阅读之用。

2. 积分变换部分中的傅里叶变换和拉普拉斯变换两章是相对独立的，可全部选用，也可选用其中的一章。两章所需学时大致相同，共约需 18 学时。复变函数部分中的基本内容，约需 32 学时。全书总共约需 50 学时。

目　　录

第一部分　复 变 函 数

第二部分　积 分 变 换

第一部分　复变函数

微积分课程中所研究的一元函数是两个实变量之间的相互依赖关系. 随着数学理论的不断发展和解决实际问题的技术进步,又需要研究两个复变量之间的依赖关系——一元复变函数,它是本书第一部分研究的主要对象,简称为复变函数.

与一元实函数类似,复变函数中也主要介绍函数的概念、极限、连续、微分、积分和幂级数等内容. 其中许多概念和公式是实函数在复数域内的推广与发展. 不过,随着函数定义域和值域的范围扩大,必然会引出许多新的概念与公式,实函数的个别性质也不能推广到复数域中去. 因此在学习中要善于对照和比较,重点掌握它们的区别与联系.

复变函数的理论与方法在自然科学及工程技术中都有广泛的应用. 它是解决诸如流体力学、空气动力学、电磁学、热学及弹性理论中平面问题的有力工具,同时也是研究微分方程、数学物理方程、积分变换等数学分支的必要工具,更是学习自动控制、电子工程、信息工程与机电工程等专业课的理论基础.

第1章　复数与复变函数

本章将在复习复数的基础上,着重介绍复数域上的函数——复变函数及其极限和连续性.

§1.1　复数及其运算

1. 复数的概念

在中学代数中已经知道,一元二次方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解. 为求解此类方程,引入了新的数 i,规定 $i^2=-1$,且称 i 为虚数单位. 从而方程 $x^2+1=0$ 的根记为 $x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$.

事实上,任何一个复数 z 均可利用虚数单位 i 来表示. 即

设 x,y 为任意实数,则称 $z=x+iy$ 为复数,其中 x,y 分别称为复数 z 的实部(Real part)和虚部(Imaginary part),分别记作

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z)\ .\tag{1.1.1}$$

当 $x=0$, $y\neq 0$ 时,则 $z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数;当 $y=0$ 时,则 $z=x$ 为实数,因此复数是实数概念的推广.

若记 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$,则称它为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数.例如,复数 $z=3+2\mathrm{i}$ 的共轭复数为 $\bar{z}=3-2\mathrm{i}$,且有 $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(\bar{z})=3$, $\mathrm{Im}(\bar{z})=-\mathrm{Im}(z)=-2$.

两个复数相等,必须且只需它们的实部和虚部分别相等.如设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 当 $z_1=z_2$ 时,则有 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$,反之也成立.当一个复数为 0 时,当且仅当它的实部和虚部同时为 0.

注意　两个不全为实数的复数不能比较大小.

2. 复数的表示法

由于复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对有序实数 (x,y) 所唯一确定,它与 xOy 平面上坐标为 (x,y) 的点是一一对应的,也与从原点指向点 (x,y) 的平面向量是一一对应的,因此在该平面上可用上述点和向量来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$ (图 1.1.1),所以常把"点 z"或"向量 z"作为"复数 z"的同义词.此时,称表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的 xOy 平面为复平面或 z 平面,其中 x 轴上的点表示的是实数,称 x 轴为**实轴**;y 轴上的点表示的是纯虚数,称 y 轴为**虚轴**.当 $y\neq 0$ 时,点 z 和 $\bar{z}$ 关于实轴对称.

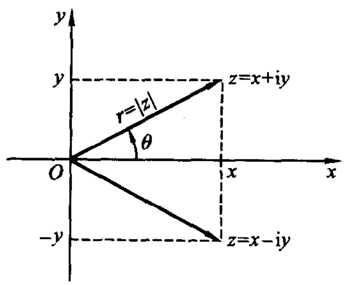

图 1.1.1

在复平面中,称向量 z 的长度为复数 z 的模或绝对值,记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1.1.2}$$

当 $z\neq 0$ 时,我们把向量 z 与 x 轴正向的交角 θ 称为复数 z 的辐角(Argument),记作 $\mathrm{Arg}(z)=\theta$,于是有

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta. \tag{1.1.3}$$

注意　$z=0$ 的辐角不确定,$\mathrm{Arg}(0)$ 无意义.当 $z\neq 0$ 时,其辐角 $\mathrm{Arg}(z)$ 有无穷多个,它们彼此相差 2π 的整数倍,可是满足条件 $-\pi<\mathrm{Arg}(z)\leqslant\pi$ 的辐角值却只有一个,我们称该值为其辐角的主值,记作 $\arg(z)$.于是有

$$-\pi<\arg(z)\leqslant\pi. \tag{1.1.4}$$

$$\mathrm{Arg}(z)=\arg(z)+2k\pi\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots), \tag{1.1.5}$$

且当 $z=x+\mathrm{i}y\neq 0$ 时，有

$$\arg(z)=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, \text{当 } x>0 \text{ 时};\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, \text{当 } x<0,\ y\geqslant 0 \text{ 时};\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, \text{当 } x<0,\ y<0 \text{ 时};\\ \dfrac{\pi}{2}, \text{当 } x=0,\ y>0 \text{ 时};\\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{当 } x=0,\ y<0 \text{ 时},\end{cases} \tag{1.1.6}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 在复平面的位置是关于实轴对称的（图 1.1.1），因而 $|z|=|\bar{z}|$. 如果 z 不在原点和负实轴上，还有 $\arg(z)=-\arg(\bar{z})$.

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 通常称作是复数的代数表达式. 由式(1.1.3)和欧拉(Euler)公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，可分别写出其三角式和指数式，即

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\quad z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.1.7}$$

复数的多种表示法可以相互转换，以适应讨论不同问题的需要.

例 1.1.1 将 $z=-\sqrt{3}-\mathrm{i}$ 化为三角式和指数式.

解 显然 $r=|z|=2$ 且 $\arg(z)=\arctan\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}-\pi=-\dfrac{5\pi}{6}$.

由式(1.1.7)得 z 的三角式为

$$\begin{aligned} z&=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]\\ &=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

而 z 的指数式为

$$z=2\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}.$$

3. 复数的四则运算

设两个复数为 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，它们的加、减、乘、除运算定义如下：

$$z_1\pm z_2=x_1\pm x_2+\mathrm{i}(y_1\pm y_2);$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1);$$

$$z_1/z_2=(z_1\bar{z}_2)/|z_2|^2\quad(z_2\neq 0).$$

不难证明,复数的加、减、乘运算和实数的情形一样,也满足交换律、结合律和分配律:

$$z_1+z_2=z_2+z_1, z_1z_2=z_2z_1,$$
$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3, z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3,$$
$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

共轭复数有以下主要性质:

(i) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

(ii) $\bar{\bar{z}}=z$;

(iii) $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$;

(iv) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$, $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\ \mathrm{Im}(z)$.

由于复数可以看作平面向量,所以当 $z_1\neq 0$ 且 $z_2\neq 0$ 时,其和、差运算可以在复平面上按照平行四边形法则或三角形法则来表示(图 1.1.2).

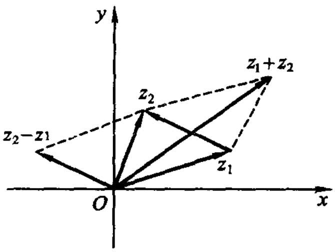

图 1.1.2

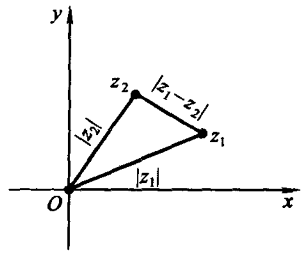

图 1.1.3

$|z_1-z_2|$ 就是点 z_1 与 z_2 之间的距离(图 1.1.3),因此有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\quad |z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|. \tag{1.1.8}$$

对于非零复数 $z_k=r_k(\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k)\quad(k=1,2)$,利用三角函数的和、差公式,读者自己可以验证 z_1z_2 和 z_1/z_2 的三角式分别为

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)],$$
$$z_1/z_2=(r_1/r_2)[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

由此可以看出,

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad |z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|. \tag{1.1.9}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}(z_1z_2)&=\mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2),\\ \mathrm{Arg}(z_1/z_2)&=\mathrm{Arg}(z_1)-\mathrm{Arg}(z_2).\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

注意　公式(1.1.10)中等式两边是多值的,它们成立是指等式两边辐角值的集合相等,其中右端辐角的和(差)运算是指 $\mathrm{Arg}(z_1)$ 的每个值可以加上(减去) $\mathrm{Arg}(z_2)$ 的任一个值. 另外,由于两个主值辐角的和或差可能超出主值的范

围，因此对辐角的主值而言，等式不一定成立.

另外，对 $z_1=z_2=z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 和任意自然数 n 有

$$z^n=r^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)],\tag{1.1.11}$$

其中 z^n 表示 n 个相同复数 z 的乘积，称为 z 的 n 次幂.

如果定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，那么当 n 为负整数时上式也是成立的.

特别地，当 z 的模 $r=1$，即 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 时，计算 z^n 可得棣莫弗(De Moivre)公式：

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.\tag{1.1.12}$$

4. 复数的 n 次方根

设有非零的已知复数 z，若存在复数 w 使 $z=w^n$，则称 w 为复数 z 的 n 次方根，记作 $w=\sqrt[n]{z}=z^{1/n}$.

为了求出根 w，令

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\quad w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi).$$

根据棣莫弗公式(1.1.12)有

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

于是

$$\rho^n=r,\quad \cos n\varphi=\cos\theta,\quad \sin n\varphi=\sin\theta.$$

由于 $\cos\theta=\cos(\theta+2k\pi)$，$\sin\theta=\sin(\theta+2k\pi)$，故由上面后两式得

$$n\varphi=\theta+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

即

$$\rho=r^{\frac{1}{n}},\varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n},$$

其中 $r^{\frac{1}{n}}$ 是算术根，故所求方根为

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).\tag{1.1.13}$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，可得到 n 个不同的根，而当 k 取其他整数值代入时，以上的根会重复出现. 例如 $k=n$ 时，$w_n=w_0$.

从几何上不难看出，$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点. 任意两个相邻根的辐角都相差 $\dfrac{2\pi}{n}$.

例 1.1.2 求 $\sqrt[4]{2+2\mathrm{i}}$.

解 因为 $2+2\mathrm{i}=\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$,所以

$$\sqrt[4]{2+2\mathrm{i}}=\sqrt[8]{8}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right],$$

即

$$k=0\text{ 时},w_0=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right);$$

$$k=1\text{ 时},w_1=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right);$$

$$k=2\text{ 时},w_2=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{17}{16}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{17}{16}\pi\right);$$

$$k=3\text{ 时},w_3=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{25}{16}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{25}{16}\pi\right).$$

这四个根是内接于圆心在原点,半径为 $\sqrt[8]{8}$ 的圆的正方形的四个顶点(图 1.1.4).

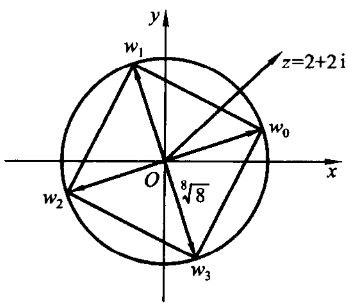

图 1.1.4

*5. 复球面

除了用平面内的点或向量来表示复数外,还可以用球面上的点来表示复数.具体方法介绍如下:

作一个与复平面相切于坐标原点的球面,记切点为 S(与原点 O 重合,图 1.1.5).通过 S 点作垂直于复平面的直线与球面相交于 N 点,我们称点 N 和 S 分别为该球面的北极和南极.

对于复平面内的任何一点 z,过点 N 和 z 作直线,则它与该球面的另一个交点是唯一的,记作 P.这样就建立了复平面上的有限点与球面上点 P($P\neq N$)的