21世纪高等院校教材

离散数学应用教程

席德勋 编著

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

离散数学应用教程

席德勋　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是一本应用性较强的教材，离散数学基础方面仅占五分之一，而五分之四的内容侧重于离散变换和离散最优化.

本书共分 5 章. 第一章是离散数学基础，讲述一些在有关应用物理、信息处理、自动控制和计算机中涉及的离散数学的基本概念和方法：集合、关系和函数、无向图和有向图、离散数函数、递归、群、格和 Boole 代数以及函数空间. 第二章是离散变换，讲述各种离散 Fourier 变换和离散小波变换、采样过程和采样定理、Z 变换和 Z 域 Hilbert 变换. 第三章是离散分数变换，包括分数 Fourier 变换、分数 Z 变换. 第四章是离散状态空间，除状态方程的构成、解法外，也包括稳定性问题和状态观测及状态估计. 第五章是离散最优化，在变分法的基础上，讲述最大(最小)原理，分析线性调节器、最优状态估计(包括最优预测、滤波和平滑)，讲述 Hilbert 空间中的最优化、Hardy 空间中的最优和 Krein 空间中的状态最优估计.

全书例题丰富、插图多，并配有适量的思考题. 本书既可作为理工类高等学校高年级(或研究生)有关专业的教材，也可供有兴趣者自学，或作为有关教师、工程技术人员的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学应用教程/席德勋编著. —北京：科学出版社，2004

(21 世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-012838-9

Ⅰ. 离… Ⅱ. 席… Ⅲ. 离散数学-高等学校-教材 Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 006245 号

策划编辑：巴建芬/文案编辑：彭 斌 姚 晖/责任校对：钟 洋

责任印制：钱玉芬/封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 8 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2004 年 8 月第一次印刷 印张：24 1/2

印数：1—3 000 字数：480 000

定价：30.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

离散数学是以离散量作为研究对象的，因而一切以离散现象作为研究对象的数学都可属于离散数学．当今正值数字化高速发展的时代，无论在科学研究中还是在经济建设中，信息的发送、传输、接收还是计算机分析、处理、控制，都在向数字化迈进，因而离散数学显然是数字化应用的理论基础．为了适应面向 21 世纪的需要，很有必要在物理系本科(或其他有关专业)开设离散数学应用(针对应用物理、技术物理和工程物理专业)课程．作为应用目的的教材，应当和作为基础范畴的教材(指离散数学)有相当大的区别，为此，在编写过程中，除了必要的离散数学基础外(约占全书的五分之一)，大部分是在离散变换、离散最优化等方面的应用．这样，本教材不仅适用于应用物理类专业，同样也适用于信息处理、电子工程和自动控制等相关专业．为了有效阅读本教材，要求读者具有微积分、微分方程、线性代数和复变函数等高等数学知识．

本教材在讲述离散数学的基本概念的基础上，着重讲述离散数学在信息处理和工程控制中的应用，以使读者从“理论”的范畴走向应用的范畴．为了能够用简便的方法解决一些实际问题，引入了应用程序 MATLAB．为帮助读者了解并熟悉内容，书中尽可能多用一些图示，并引入较多的例题和适量的思考题(包括 MATLAB 习题)．在应用方法上，着重一个“新”字，教材中引用了 20 世纪 90 年代以来的众多参考资料，一方面扩展读者的知识面，另一方面也便于读者查阅．

本教材共分 5 章．第一章，离散数学基础．讲述一些在有关应用物理、信息处理、自动控制和计算机中涉及的离散数学的基本概念和方法：集合、关系和函数、无向图和有向图、离散数函数、递归、群、格和 Boole 代数以及函数空间．第二章，离散变换．讲述各种离散 Fourier 变换和离散小波变换、采样过程和采样定理、Z 变换和 Z 域 Hilbert 变换．第三章，离散分数变换．讲述分数 Fourier 变换、分数 Z 变换．第四章，离散状态空间．状态空间分析是一种非常重要的方法，作为一个系统，用这种方法可以得到系统的全部特性，这里，也包括稳定性问题和状态观测及状态估计．第五章，离散最优化．在变分法的基础上，讲述最大(最小)原理，分析线性调节器和最优状态估计，包括最优预测、滤波和平滑，以及 Hilbert 空间中的最优化、Hardy 空间中的最优化、Krein 空间中的状态最优估计．

当前科学技术发展极快，知识的扩展呈爆炸状，如何使读者用较短的时间获得较多、较新的知识是一个非常重要的问题，本教材的内容安排正是以此为主导思想的．作为一本理论性和应用性都比较强的教材，在内容的安排上，基础与应用应

尽量衔接好，既要有一定的广度和深度，还要在应用方法方面着重一个“新”字(引入众多新的参考资料)．为此，在不脱离基础的前提下，本教材的大部分篇幅是离散数学的应用．为了使适用的范围更宽一些，在应用部分，各章都有一部分内容较深、较新的材料，以适合本科生和研究生的不同需要(教师可选用)．有“*”的部分可作为对离散数学应用有兴趣的读者自学的内容或者作为研究生的教学内容．为了便于学习，书中例子较多，且每章都有相当数量的思考题．

由于本教材的编写目的、内容安排都是一种尝试，兼于编者水平有限，不当与错误之处，敬请读者批评指正．

作　者

2003 年 9 月

目　　录

第一章　离散数学基础

离散数学是研究离散对象的数学，特别是在数字化时代，计算机在各个领域中的大量应用，离散数学都显得格外有用．本章仅讲述一些与离散数学有关的基本概念，以作为离散数学应用的基础．

第一节　集　　合

集合论属于纯粹数学，作为离散数学的基础，本节就关于集合的一些基本概念做简单的论述．

一、集合定义

一个集合，就是一些不同对象的总和，通常用大写英文字母表示，其中的对象称为集合中的元素，一般用小写英文字母表示．若 a 是集合 A 中的元素，用 $a \in A$ 表示；若 a 不是集合 A 中的元素，则用 $a \notin A$ 表示．

例 1　由自然数构成一个集合，叫做自然数集，用 $\mathbf{N}$ 表示；所有整数构成一个集合，叫做整数集，用 $\mathbf{Z}$ 表示；所有实数构成一个集合，叫做实数集，用 $\mathbf{R}$ 表示；所有复数构成一个集合，叫做复数集，用 $\mathbf{C}$ 表示；所有有理数构成一个集合，叫做有理数集，用 $\mathbf{Q}$ 表示．

集合可以用符号来表示，集合中的元素没有顺序．集合定义应当包含空集（即不包含元素的集合），该集合记为 $\varnothing$．某一些集合可能是另一个集合的元素．

例 2　符号 $\{a,b,c\}$ 表示由对象 a、b 和 c 组成的集合，由于集合中的元素没有顺序，因而 $\{a,b,c\}$ 和 $\{b,c,a\}$ 表示同一个集合．

例 3　集合 $\{\{a,b,c\},d\}$ 包含了 $\{a,b,c\}$ 和 d 两个元素，集合 $\{\{a,b,c\},a,b,c\}$ 包含了 $\{a,b,c\}$、a、b 和 c 四个元素，集合 $\{\{\{\{a\}\}\},\{\{a\}\},\{a\},a\}$ 乃由四个不同的集合 $\{\{\{a\}\}\}$、$\{\{a\}\}$、$\{a\}$ 和 a 构成．

例 4　集合 $\{\varnothing\}$ 仅包含一个元素，而集合 $\{\{\varnothing\},\varnothing\}$ 则包含两个元素，其中一个是空集，另一个是以空集为其唯一元素的集合．

通常一个集合可表示为

$$S = \{x \mid x \text{ 具有某些性质}\} \tag{1-1-1}$$

给定两个集合 A 和 B，若集合 A 的每个元素也是集合 B 的元素，则 A 为 B 的子

集，用 $A\subseteq B$ 表示．对任意集合 A，空集是一切集合的子集，在这种意义上，它是"最小"的集合，但$\{\varnothing\}$不是$\{\{\varnothing\}\}$的子集．集合 A 和集合 B 包含的元素相同，该两集合称为相等：$A=B$．若 $A\subseteq B$，但 A 不等于 B，称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subset B$．

二、集合的基本运算规律

集合可以用组合(或运算)的方式产生．

1.并运算

集合 A 和集合 B 的并是一个集合，其元素是 A 的元素或是 B 的元素或同时是 A 和 B 的元素，该集合称为并集，以 $A\cup B$ 记之，运算$\cup$称为并运算．$A\cup B$ 和 $B\cup A$ 表示同一个集合．n 个集合 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 的并也是一个集合，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，它包含了构成该集的各个集合 $A_i(i=1,2,3,\cdots,n)$的元素．并运算是可以交换和结合的：$A\cup B=B\cup A$；$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$．

例 5 集合$\{a\}\cup\{b,c,d\}=\{a,b,c,d\}$，$\{a,b\}\cup\{\varnothing\}=\{a,b\}$，$\{a,b\}\cup\{\{a,b\}\}=\{a,b,\{a,b\}\}$等是并集．

2. 交运算

集合 A 和集合 B 的交也是一个集合，其元素同属于 A 和 B 的元素，该集合称为交集：$A\cap B$，运算$\cap$称为交运算．$A\cap B$ 和 $B\cap A$ 表示同一个集合．n 个集合 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 的交也是一个集合，它包含同时属于集合 $A_i(i=1,2,3,\cdots,n)$的元素，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$．交运算也是可以交换和结合的：$A\cap B=B\cap A$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$．

例 6 集合$\{a,b\}\cap\{b,c\}=\{b\}$，$\{a,b\}\cap\{d,c\}=\varnothing$(表示该两集不相交)，$\{a,b\}\cap\varnothing=\varnothing$等都是交集．

对任意集合 A、B 和 C，集合 $C\cap(A\cup B)$和集合$(C\cap A)\cup(C\cap B)$相等．

证明：若令 x 是集合 $C\cap(A\cup B)$中的任意一个元素，它一定在 C 中，也一定在 A 中或 B 中．如果它在 A 中，则也一定在 $C\cap A$ 中；如果它在 B 中，则也一定在 $C\cap B$ 中．如果元素 x 在$(C\cap A)\cup(C\cap B)$中，则 $C\cap(A\cup B)$是$(C\cap A)\cup(C\cap B)$的子集．若令 x 是集合$(C\cap A)\cup(C\cap B)$的任意元素，因而 x 一定在$(C\cap A)$中或在$(C\cap B)$中，于是集合$(C\cap A)\cup(C\cap B)$是 $C\cap(A\cup B)$的子集，这样 $C\cap(A\cup B)$就和$(C\cap A)\cup(C\cap B)$相等．

不难证明，对任意集合 A、B 和 C，集合 $C\cup\cap(A\cap B)$和$(C\cup A)\cap(C\cup B)$相等．按照上述证明方法，可以做推广

$$C \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = (C \cap A_1) \cup (C \cap A_2) \cup \cdots \cup (C \cap A_n)$$
$$C \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = (C \cup A_1) \cap (C \cup A_2) \cap \cdots \cap (C \cup A_n) \tag{1-1-2}$$

式(1-1-2)称为分配律.

3.补运算

两个集合 A 与 B 的差也是一个集合，以 $A-B$ 记之，运算 $-$ 称为补运算，它由在集合 A 中而不在集合 B 中的那些元素组成. 由此可见，若 B 的元素有某种性质，则 $A-B$ 就是 A 中那些没有这种性质的元素的集合，因而称 $A-B$ 是 B 关于 A 的补集，简称 B 的补集.

例 7　集合$\{a,b,c\}-\{a,d\}=\{b,c\}$、$\{a,b,c\}-\{e,d\}=\{a,b,c\}$是补集.

4. 对称差运算

两个集合 A 与 B 的对称差也是一个集合，记作 $A\oplus B$，运算$\oplus$称为对称差运算，它由在 A 中而不在 B 中与在 B 中而不在 A 中的那些元构成

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) \tag{1-1-3}$$

从对称差的表示和并运算以及交运算满足的规律可知,它满足交换律、结合律和分配律.

例 8　$\{a,b\}\oplus\{b,c\}=\{a,c\}$、$\{a,b\}\oplus\varnothing=\{a,b\}$、$\{a,b\}\oplus\{a,b\}=\varnothing$是对称差.

5. 积运算

设有 A、B 两个集合，它们的直积构成积集 $A\times B$(直积也称 Descartes 积，直积运算以 $\times$ 表示)，乃所有如(a,b)那样的有序对(这里，用符号(a,b)表示有序对，第一个对象是 a，第二个对象是 b. 在有序对中，对象的次序十分重要，但两个对象可以不同，也可以相同)的集合$(a\in A,b\in B)$:$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$. 这表明两个集合的元素都要分别相乘，才构成积集，如果集合 A 和 B 分别有 α 和 β 个元素，它们的积集则有 $\alpha\beta$ 个元素.

Descartes 积有如下基本性质:

a. $A\times B\neq B\times A$(除非 A 和 B 都是空集，或者 $A=B$)，说明不满足交换律;

b. $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$(除非 A、B 和 C 都是空集)，说明不满足结合律;

c. 若 $A\times C=B\times C$，不能推断出 $A=B$，说明不满足消去律;

d. 满足四种分配律

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$
$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

上面所讲述的某些关系，可以用图表示(图 1-1-1)，其中画出了并、交、补和对称差四种运算.

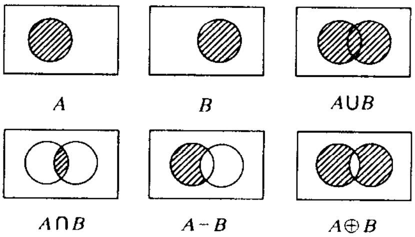

图 1-1-1　某些集合的组合

三、有限集合和无限集合

一个集合,其中不同元素的个数表示了该集合的大小，这种有限的个数表明该集合是有限集合，为此，给出有限集合的定义：如果一个集合的元素与某一集合的 n 个元素之间存在着一一对应关系，其中 $n \in N$，则该集合称为有限集合，n 称为该集合的基数. 对一给定的集合 A,可以定义 A^+ 是 A 的后继，于是，A^+ 就是 $A \cup \{A\}$,意思是 A^+ 由 A 的所有元素和一个追加的元素 A 所构成的集合.

例 9　空集$\varnothing$(0 号)的后继是$\{\varnothing\}$(1 号)，而$\{\varnothing\}$的后继是$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$(2 号)，$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$的后继是$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$(3 号)等等.

用上述方法所构成的越来越多的后继可以依次编号. 显然，$1 = 0^+$，$2 = 1^+$，$3 = 2^+$，….因此可以定义集合 N(自然数)，使得 N 包含集合 0，若 n 是 N 的元素，则 n^+ 也是 N 的元素，且 N 不包含其他的元素. 看来 N 不是一个有限集合，因此一个集合不是有限集合，就称为无限集合. 如果一个集合的元素与 N 的元素一一对应，此集合就叫做可数无限集合(即集合的基数是可数无限的).

例 10　所有自然数的集合是可数无限集合，所有非负偶数的集合是可数无限集合，所有正整数集合也是可数无限集合.

包含与排斥原则. 对有限集合 A，可以用$|A|$表示该集合的基数，于是

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \tag{1-1-4}$$

成立.

证明:注意到集合 A_1 和集合 A_2 可以有公共元素，其个数是$|A_1 \cap A_2|$的个数，它们中的每一个都在$|A_1| + |A_2|$中各计算了两次，因此必须扣除，于是式(1-1-4)成立. 若有三个集合 A_1、A_2 和 A_3，仿照两个集合的情形，应当有

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \tag{1-1-5}$$

如果有 $A_i(i=0,1,\cdots,n)$个集合，则按上述方法，可以得到

$$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n|=\sum_i|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n| \quad (1-1-6)$$

上式称为包含与排斥原则.

第二节　关系与函数

若集合 S 中全体元素都是有序的$n(n\geqslant 2)$元素组，称 S 为n 元关系. 在 $n=2$ 时，称为二元关系. 二元关系(用 R 表示)是表示集合 A 中某些元素和集合B 中某些元素相关的形式，直积 $A\times B$ 的任何子集均称为A 到B 的二元关系. 若有序对(a,b)在 R 中，就说元素 a 相关于元素 b. 构成 R 的一切有序对的第一元构成的集称为R 的定义域，第二元构成的集为 R 的值域.

例 1　直积$\{a,b,c\}\times\{d,e\}=\{(a,d),(a,e),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e)\}$表明从集合 A 到集合B 的一个二元关系就是$A\times B$ 的一个子集. 对二元关系，用图来表示，相当方便.

例 2　两个集合 $A=\{a,b,c,d\}$和 $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$的关系图画在图 1-2-1 中，由表示关系的箭头看到，其中只有五个二元关系，记为 $R=\{(a,\alpha),(b,\gamma),(c,\gamma),(c,\alpha),(d,\beta)\}$，它是从 A 到 B 的二元关系. 该二元关系是有序对的集合，若令 R_1 和 R_2 是从 A 到B 的两个二元关系，则 $R_1\cap R_2$、$R_1\cup R_2$、$R_1\oplus R_2$ 以及 R_1-R_2 也是从 A 到 B 的二元关系，分别称为 R_1 和 R_2 的交、并、对称差和差.

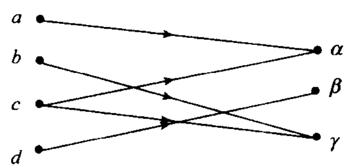

图 1-2-1　二元关系图

上述关系可以推广到集合 A、B 和 C 间的三元关系，在形式上，定义有序三重元为一个有序对$((a,b),c)$，它的第一个分量也是一个有序对，于是集合 A、B 和 C 间的一个三元关系是集合$A\times B$ 和 C 的 Descartes 积$(A\times B)\times C$ 的一个子集.

例 3　令 $A=\{\alpha,\beta\}$、$B=\{\gamma,\delta\}$和 $C=\{\mu,\nu\}$，则有

$$(A\times B)\times C=\{((\alpha,\gamma),\mu),((\alpha,\gamma),\nu),((\alpha,\delta),\mu),((\alpha,\delta),\nu),$$
$$((\beta,\gamma),\mu),((\beta,\gamma),\nu),((\beta,\delta),\mu),((\beta,\delta),\nu)\}$$

与上述定义方法相似，定义一个有序对$(((a,b),c),d)$是一个有序四重元，它有两个分量，第一个分量是有序三重元$((a,b),c)$，第二个分量只是一个元素 d. 于是集合 A、B、C 和D 间的一个四元关系定义为$((A\times B)\times C)\times D$ 的一个子

集. 如果推广至有序 n 重元，则可以定义一个有序对，其第一个分量是一个有序 $n-1$ 重元. 集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 间的一个 n 元关系，定义为集合 $((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \cdots \times A_n$ 的一个子集.

一、二元关系的基本性质

1. 自反

从集合 A 到 A 的二元关系，称为 A 上二元关系. 设 R 是 A 上的二元关系，若对 A 中每一个元素 a，(a,a) 都在二元关系 R 中，则称 R 是自反关系. 在自反关系中，A 的每一个元素都与其自身相关.

例 4 定义正整数集合 A 上的二元关系 R，当且仅当 a 整除 b 时，(a,b) 属于 R. 由于一个整数一定能够整除自身，因而 R 也是自反关系.

但要注意，如果在例子中规定当且仅当 $a>b$ 时 (a,b) 才属于 R，则 R 不是自反关系. 二元关系 R 也可以用图来表示，图 1-2-2 是以图的形式表示自反和非自反情形，左图是自反情形，右图是非自反情形.

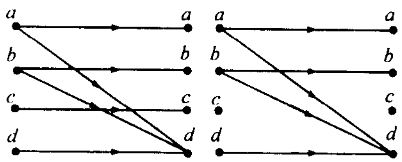

图 1-2-2 左图：自反关系；右图：非自反关系

2. 对称与反对称

令 R 是 A 上的二元关系，假如由有序对 (a,b) 属于 R 而能够推出有序对 (b,a) 也属于 R，则 R 是对称的二元关系.

例 5 有集合 $A=\{a,b,c\}$，存在关系 $X=\{(a,a),(b,b)\}$、$Y=\{(a,b),(b,a)\}$ 和 $X=A\times A$，显然它们都是对称的二元关系.

要判断二元关系是否对称，可以从表的形式来观察，实际上它和图的形式相同，只要判断对主对角线是否对称就能确定二元关系的对称性(注意：主对角线有两种情形，一是从左上角到右下角，一是从右上角到左下角). 图 1-2-3 是图 1-2-2 的表的形式，不难看出，左表中主对角线都有 L，这种二元关系是自反的、反对称的，右表则不是自反的、反对称的.

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & a & b & c & d \\
a & L & 0 & 0 & L \\
b & 0 & L & 0 & L \\
c & 0 & 0 & L & 0 \\
d & 0 & 0 & 0 & L
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc|}
 & a & b & c & d \\
a & L & 0 & 0 & L \\
b & 0 & L & 0 & L \\
c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
d & 0 & 0 & 0 & L
\end{array}$$

图 1-2-3 图 1-2-2 的表的形式

令 R 是 A 上的二元关系，如果有序对 (a,b) 属于 R，设除 $a=b$ 外，可以推断有序对 (b,a) 不在 R 中，则称 R 为反对称关系．假定 (a,b) 和 (b,a) 都在 R 中，必有 $a=b$．

例 6　A 是正整数集合，R 是 A 上的二元关系，当且仅当 $a\geqslant b$ 时，(a,b) 属于 R，则 R 是一个反对称关系．

例 7　若有集合 $A=\{a,b,c\}$，令 $S=\{(a,a),(b,b)\}$，$N=\{(a,b),(a,c),(c,a)\}$ 是 A 上的两个二元关系，则 S 既是对称的又是反对称关系，而 N 则两者都不是．

3．传递

若 R 是 A 上的一个二元关系，如果由 (a,b) 和 (b,c) 都在 R 中可以推断 (a,c) 也在 R 中，则称 R 为传递关系．设 $A=\{a,b,c\}$，$X=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c)\}$ 是传递关系，$Y=\{(a,b)\}$ 也是传递关系，但 $Z=\{(a,b),(b,c)\}$ 则不是传递关系．如果 R 是 A 上的二元关系，R 的传递扩张是 A 上的二元关系 R_1，使 R_1 包含 R，且若有序对 (a,b) 和 (b,c) 都在 R 中，则 (a,c) 在 R_1 中．

例 8　图 1-2-4 是一个例子，设 $A=\{a,b,c,d\}$，其二元关系 R 为图 1-2-4(a)，显然 (a,b) 和 (b,c) 以及 (b,c) 和 (c,d) 都在 R 中，所以 (a,c) 和 (b,d) 应当在 R_1 中，于是(b)为(a)的传递扩张，按照传递扩张的做法，一定可以得到传递闭包 R^*(c)(传递闭包定义为各传递扩张的并：$R^*=R_1\cup R_2\cup R_3\cup\cdots$)．

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & a & b & c & d \\
a & 0 & L & 0 & L \\
b & 0 & 0 & L & 0 \\
c & 0 & L & 0 & L \\
d & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc|}
 & a & b & c & d \\
a & 0 & L & L & L \\
b & 0 & 0 & L & L \\
c & 0 & L & 0 & L \\
d & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc|}
 & a & b & c & d \\
a & 0 & L & L & L \\
b & 0 & L & L & L \\
c & 0 & L & L & L \\
d & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

(a) R　　(b) R_1　　(c) R^*

图 1-2-4　二元关系、传递扩张和传递闭包

4．等价

一个集合上的二元关系是自反的、对称的和传递的，则称之为等价关系．

一个集合 A 的一个划分是集合 A 的非空子集的集合，用 $\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\}$ 表示，这种划分使这些非空子集(称为块) A_i 的并等于 A，且对任意两个不同的子集 A_i 和 A_k 的交是空集 $(i\neq k)$．由集合 A 上的一个等价关系，可以确定 A 的一个划分，使同一块中的任意两元素都是相关的，而不同块中的元素则是不相关的，这种划分中的块称为等价类．