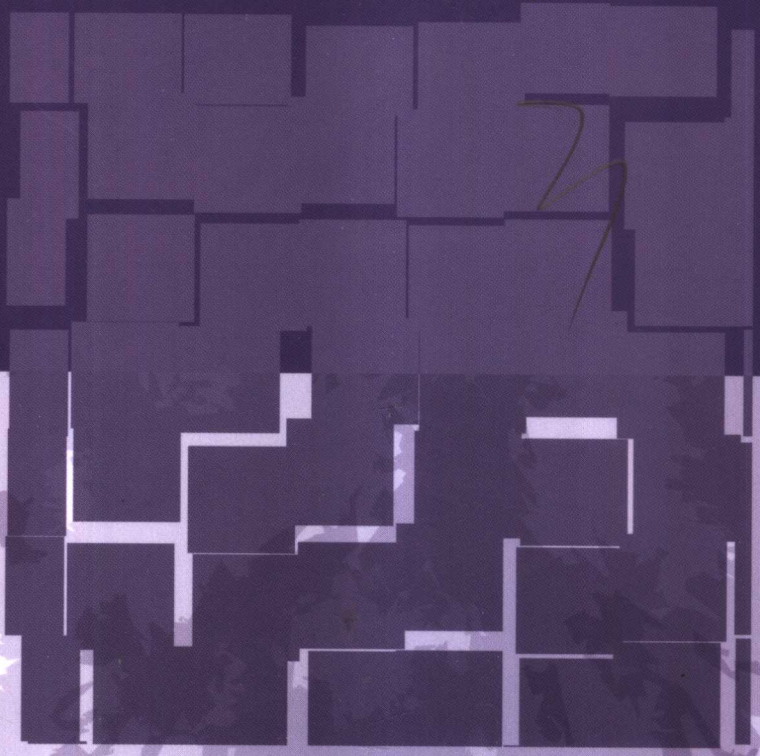
高等学校教材

离散数学

（修订版）

尹宝林　何自强
许光汉　檀凤琴　等编著



高等教育出版社

高等学校教材

离散数学

（修订版）

尹宝林　何自强
许光汉　檀凤琴　等编著

高等教育出版社

内容提要

本教材由五篇构成。第一篇数理逻辑，内容包括：命题逻辑，谓词逻辑，公理系统，归结法原理。第二篇集合论，内容包括：集合的基本概念及其运算，关系，函数，自然数和基数。第三篇图论，内容包括：基本概念，通路问题，图的矩阵表示，树，穿程问题，二分图的匹配问题，平面图及色数。第四篇代数系统，内容包括：基本概念，半群和群，环和域，格和布尔代数，抽象数据类型的代数规范。第五篇有限自动机理论，内容包括：基本概念，有限自动机的简化，有限自动机和正则表达式，有限自动机的综合与应用。

本书内容系统、全面，概念清晰，叙述严谨精炼，推理详尽严格，语言简明易懂，各部分独立成篇，并有大量例题和习题，便于读者理解和掌握相关知识。本书可作为高等院校本科计算机专业离散数学课程的教材，也可供计算机科学与工程技术人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学／尹宝林等编著．—2版（修订本）．—北京：高等教育出版社，2004．7
ISBN 7－04－014612－6

Ⅰ．离… Ⅱ．尹… Ⅲ．离散数学－高等学校－教材 Ⅳ．0158

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第051167号

策划编辑 刘建元 **责任编辑** 康兆华
封面设计 李卫青 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京二二〇七工厂		
		版　　次	1998年6月第1版
开　　本	787×1092　1/16		2004年7月第2版
印　　张	23	**印　　次**	2004年7月第1次印刷
字　　数	480 000	**定　　价**	25.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

近年来，计算机科学与信息技术正在以惊人的速度迅猛发展，并且对人类社会的各个领域产生着日益广泛和深远的影响．离散数学，作为计算机科学与技术的重要理论基础之一，也因此更加显示出它的重要性．

离散数学在计算机科学与技术中的地位如同微积分在物理学和工程技术中的地位一样，离散数学为计算机科学与技术的发展奠定了重要的数学基础．不仅离散数学的基本思想、概念和方法广泛地渗透到计算机科学与技术的各个领域，而且其基本理论和研究成果更是全面而系统地影响和推动着这些领域的发展．例如，布尔代数为开关电路的研究提供了重要的分析工具，并且导致了数字逻辑理论的建立；自动机理论对形式语言及其编译产生了重大的影响，并形成了完整而严密的理论体系；谓词演算成为程序理论的一种重要研究工具；代数结构为编码理论的研究提供了新的途径；图灵机模型和递归函数理论构成了可计算性理论研究的基础．离散数学的这些重要成果和作用，使得它成为一个计算机科学工作者和工程师所必须具备的基本理论知识．对于计算机专业的学生来说，离散数学不仅是很多后续专业课程所必需的先修课，而且也为高等院校工科本科生提供了必要的抽象思维和严密推理的基本训练．

本书内容分为数理逻辑、集合论、图论、代数系统和有限自动机理论五个部分，每个部分独立成篇又互相联系．在各篇的引言中概括地叙述了该部分的发展简史及其主要研究领域和内容，以便于读者在后续的学习中提纲挈领地掌握所学的内容．各章后面的习题主要是为使学生巩固所学的基本内容而设计的，少量难度较高的习题可供学有余力的学生进一步深入掌握书中的内容和提高解题技巧之用．

本书是在使用多年的教材和二十余年教学经验的基础上重新编写的．在编写过程中参考了孙怀民主编、北京航空航天大学出版社出版的《离散数学》以及一些内部讲义和教材．在此谨对这些书籍及讲义的全体编著者和对本书的编写提出过建议的教师和同学表示感谢．本书数理逻辑部分由何自强执笔，集合论部分由马殿富执笔，图论部分由许光汉执笔，代数系统部分由马世龙执笔，有限自动机理论部分由檀凤琴执笔．各篇内容经集体讨论修改，由尹宝林统稿．本书在编写过程中得到了北京航空航天大学计算机学院的支持，阎志欣和李波两位教授也参加了本书初稿的讨论，提出了宝贵的意见．编著者对此表示深深的谢意．

编著者

2004 年 3 月

目　录

第一篇　数理逻辑

第一章　命题逻辑 …… (5)
§1.1　命题和联结词 …… (5)
§1.2　公式和真值赋值 …… (8)
§1.3　等值演算 …… (12)
§1.4　对偶定理 …… (15)
§1.5　联结词的完全集 …… (17)
§1.6　范式 …… (19)
§1.7　逻辑推论 …… (23)
习题一 …… (24)
第二章　谓词逻辑 …… (29)
§2.1　谓词和量词 …… (29)
§2.2　项和公式 …… (33)
§2.3　解释和赋值 …… (36)
§2.4　永真式 …… (43)
§2.5　等值演算 …… (46)
§2.6　逻辑推论 …… (49)
习题二 …… (51)
第三章　公理系统 …… (54)
§3.1　命题逻辑的公理系统 …… (54)
§3.2　谓词逻辑的公理系统 …… (59)
习题三 …… (64)
第四章　归结法原理 …… (65)
§4.1　命题逻辑的归结法 …… (65)
§4.2　前束范式与斯科伦范式 …… (69)
§4.3　谓词逻辑的归结法 …… (70)
习题四 …… (78)
参考文献 …… (80)

第二篇　集　合　论

第五章　集合的基本概念及其运算 … (83)
§5.1　集合与元素 …… (83)
§5.2　集合间的相等和包含关系 …… (85)
§5.3　幂集 …… (87)
§5.4　集合的运算 …… (89)
§5.5　有穷集的计数原理 …… (95)
§5.6　集合的归纳定义法 …… (97)
§5.7　有序偶和笛卡儿乘积 …… (101)
习题五 …… (103)
第六章　关系 …… (106)
§6.1　关系及其性质 …… (106)
§6.2　关系的运算 …… (110)
§6.3　次序关系 …… (115)
§6.4　等价关系、划分及其他 …… (119)
习题六 …… (123)
第七章　函数 …… (127)
§7.1　基本概念 …… (127)
§7.2　函数的复合 …… (131)
§7.3　特殊性质的函数 …… (134)
§7.4　集合的特征函数 …… (138)
习题七 …… (139)
第八章　自然数和基数 …… (142)
§8.1　自然数及数学归纳法 …… (142)
§8.2　基数 …… (145)
习题八 …… (151)
参考文献 …… (153)

第三篇 图 论

第九章 基本概念 …… (157)
§9.1 有向图及无向图 …… (157)
§9.2 图的基本结构 …… (159)
§9.3 子图 …… (161)
§9.4 连通性 …… (164)
§9.5 顶点基和强分图 …… (169)
习题九 …… (173)
第十章 通路问题 …… (175)
§10.1 最短通路 …… (175)
§10.2 关键通路 …… (178)
习题十 …… (181)
第十一章 图的矩阵表示 …… (182)
§11.1 邻接矩阵 …… (182)
§11.2 有向图的可达性矩阵 …… (184)
§11.3 关联矩阵 …… (188)
习题十一 …… (189)
第十二章 树 …… (190)
§12.1 树的一般定义 …… (190)
§12.2 根树与有序树 …… (192)
§12.3 二元树 …… (193)
§12.4 生成树 …… (197)
§12.5 割集 …… (200)
习题十二 …… (201)
第十三章 穿程问题 …… (204)
§13.1 欧拉图 …… (204)
§13.2 哈密顿图 …… (207)
习题十三 …… (209)
第十四章 二分图的匹配问题 …… (211)
§14.1 基本概念 …… (211)
§14.2 二分图的最大匹配 …… (213)
§14.3 从 X 到 Y 的匹配 …… (215)
习题十四 …… (217)
第十五章 平面图及色数 …… (219)
§15.1 平面图 …… (219)
§15.2 色数 …… (224)
习题十五 …… (227)
参考文献 …… (229)

第四篇 代 数 系 统

第十六章 基本概念 …… (233)
§16.1 代数系统 …… (233)
§16.2 同态和同构 …… (236)
§16.3 子代数和商代数 …… (237)
习题十六 …… (240)
第十七章 半群和群 …… (241)
§17.1 半群的概念 …… (241)
§17.2 子半群和半群同态 …… (242)
§17.3 商半群和半群直积 …… (243)
§17.4 群的概念 …… (245)
§17.5 子群和群的同态 …… (247)
§17.6 变换群、置换群和循环群 … (249)
§17.7 不变子群和商群 …… (251)
习题十七 …… (255)
第十八章 环和域 …… (257)
§18.1 环和域的概念 …… (257)
§18.2 子环和环的同态 …… (259)
§18.3 理想和商环 …… (260)
习题十八 …… (262)
第十九章 格和布尔代数 …… (263)
§19.1 格的定义与基本性质 …… (263)
§19.2 子格和格的同态 …… (265)
§19.3 布尔代数 …… (265)
§19.4 布尔代数的表示 …… (267)
习题十九 …… (270)
第二十章 抽象数据类型的代数

规范 …… (271)
§20.1 标记、项和代数规范 …… (271)
§20.2 Σ－代数和范畴 …… (276)
§20.3 代数规范的初始语义 …… (278)
习题二十 …… (279)
参考文献 …… (281)

第五篇　有限自动机理论

第二十一章　基本概念 …… (285)
§21.1 字符表、字符串及其集合的运算 …… (285)
§21.2 有限自动机的定义 …… (286)
§21.3 有限自动机的等价 …… (290)
§21.4 Mealy 机与 Moore 机 …… (292)
习题二十一 …… (295)
第二十二章　有限自动机的简化 …… (296)
§22.1 最小有限自动机的定义及性质 …… (296)
§22.2 状态集的 S 划分和格 L_M … (298)
§22.3 有限自动机的最小化 …… (304)
习题二十二 …… (311)
第二十三章　有限自动机和正则表达式 …… (313)
§23.1 有限自动机的识别功能 …… (313)
§23.2 非确定有限自动机 …… (315)
§23.3 正则表达式 …… (318)
§23.4 由正则表达式构造 FA 的算法 …… (320)
§23.5 有限自动机和正则表达式的等价性 …… (326)
§23.6 正则集合及其性质 …… (329)
习题二十三 …… (331)
第二十四章　有限自动机的综合与应用 …… (333)
§24.1 有限自动机的综合 …… (333)
§24.2 FA 理论在算法设计中的应用 …… (336)
§24.3 FA 理论与形式语言理论的关系 …… (341)
习题二十四 …… (344)
参考文献 …… (346)

名词索引 …… (347)

第一篇

数理逻辑

逻辑学是研究推理的科学，具有十分悠久的历史，在两千多年前的古希腊时代就已很发达.数理逻辑是数学化的逻辑学，是用数学方法研究推理的科学，其历史只有三百多年.

德国数学家、哲学家莱布尼茨(Leibniz)于17世纪中叶明确地提出了建立通用的符号语言和通用代数的思想[1].他指出，如果我们能对人类的全部思想进行综合分析，并把它们化归成最简单的概念，那么，只要再进一步设计出适当的符号来表示这些基本概念及其组合关系，就可以获得一种既简单又严密的符号语言.由于这种语言克服了自然语言的弊病及局限性(如不规则性、歧义性等)，因此，它是一种理想的、世界性的公共语言，即所谓的“通用语言”.其次，通用语言的建立不仅有益于思想的交流，而且也有益于思维.由于在通用语言中实现了彻底的符号化，其中的推理过程就表现为符号序列的变形，从而只要对此做出明确的规定，就可以按照这些规定机械地实行推理，正如人们在代数运算中按照明确的法则对代数式进行演算一样.我们最终所获得的就不仅是一种“通用语言”，而且也是一种“通用代数”.在这种符号语言中，思维被“演算化”了.莱布尼茨只是进行了一些初步的尝试，并没有能够实现他的关于通用符号语言和通用代数的设想，但是数理逻辑却是沿着他的设想发展起来的.因此，人们公认莱布尼茨为数理逻辑的创始人.

布尔(Boole)构造了一个抽象的代数系统，并且给予它多种解释，如类的演算、命题演算、概率演算.当然，布尔所提出的演算很不成熟，某些演算公式没有逻辑解释.但是，布尔的贡献在于，他在逻辑史上首先提出了一个逻辑演算，实现了莱布尼茨的一部分设想.经过许多数学家的改进，今天的布尔代数已发展成为具有广泛应用的丰富的代数理论.

在布尔构造逻辑演算的同时，另一些逻辑学家着手进行推广古典形式逻辑的工作.古典形式逻辑把每个简单命题分析为一个主词和一个谓词，缺乏对于关系的研究.英国逻辑学家德·摩根(De·Morgan)提出了论域的概念，明确指出了关系对于推理的重要性，研究了关系的种类和性质，并使用了一些自己规定的符号.他的功绩在于突破了古典主谓词逻辑的局限

性,提出了关系命题和关系推理,为后人进一步探讨开辟了道路.

德国逻辑学家、数学家弗雷格(Frege)首先引入和使用了量词和约束变元,构造了一个初步自足的一阶谓词演算系统.这是历史上第一个关于逻辑规律的严格的公理系统.当然,这个公理系统还存在某些缺点,例如其中的某些公理可由其他公理推出,某些推理规则表述不够严格.

意大利逻辑学家、数学家佩亚诺(Peano)创立了一套表意的符号语言.佩亚诺的符号比弗雷格的符号简单得多,后来人们广泛采用了佩亚诺的符号体系,其中某些符号一直沿用至今.佩亚诺对公理化方法也进行了深入研究,他提出的关于自然数的五个公理一直沿用至今.

弗雷格发展的逻辑演算系统没有引起广泛的注意,影响深远的是英国逻辑学家、哲学家罗素(Russel)和英国数学家怀特黑德(Whitehead)在他们合著的《数学原理》中给出的系统.在《数学原理》中,他们建立了完备的命题演算和谓词演算.在《数学原理》中未对推理规则做出明确的陈述,这主要是因为当时还未对对象语言和元语言做出明确的区分.德国数学家希尔伯特(Hilbert)和阿克曼(Akermann)在他们合著的《理论逻辑基础》中给出了一个完全严格的一阶谓词演算系统.1921 年美国逻辑学家波斯特(Post)证明了命题演算系统的完备性.1929 年奥地利逻辑学家哥德尔(Gödel)在其博士论文中证明了一阶谓词演算系统的完备性.20 世纪 30 年代波兰逻辑学家塔斯基(Tarski)用归纳法明确表述了一阶逻辑的语义.

数理逻辑最近几十年来发展迅速,研究范围不断扩大,应用领域日益广泛.概括起来,数理逻辑可以分为五大分支:逻辑演算、公理集合论、证明论、递归论、模型论.

逻辑演算是数理逻辑的最基础部分.从莱布尼茨到罗素,经过许多逻辑学家二百多年的努力,在 20 世纪初建立了完备的命题逻辑和一阶谓词逻辑的演算系统,我们称其为经典逻辑,或标准逻辑.从 20 世纪 40 年代开始,逻辑学不仅与数学相互渗透与结合,而且也与社会科学、自然科学和技术相互渗透与结合.人们扩充和改造经典的一阶逻辑,用数学方法发展了各种非标准逻辑,以适应各方面应用的需要.例如,用于计算机科学和人工智能的程序逻辑、算法逻辑、直觉主义逻辑、动态逻辑、知道逻辑、模糊逻辑、内涵逻辑、时态逻辑、模态逻辑、三值逻辑、非单调逻辑等[2,3],用于物理学的量子逻辑,用于社会科学的道义逻辑、认识论逻辑、优先逻辑等[3].这些非标准逻辑,有些已经形成了比较成熟的演绎系统和语义理论,有些尚处于初创阶段,还没有形成一个公认的科学体系.

近年来,数理逻辑在计算机科学中的重要地位已经被广大计算机及相关领域工作者所认识.荷兰计算机科学家德克斯特拉(Dijkstra)曾经这样说[2]:

> 我现在年纪大了,搞了这么多年软件,错误不知犯了多少,现在觉悟了.我想,假如我早年在数理逻辑上好好下点工夫的话,我就不会犯这么多的错误.不少东西逻辑学家早就说了,可我不知道.要是我能年

轻20岁的话,就要回去学逻辑.

美国计算机科学家麦卡锡(McCarthy)曾经说[4]:

> 我们有理由希望,到了21世纪,逻辑和计算机的关系将和19世纪时数学分析和物理学的关系那样富有成果.

早在1936年英国数理逻辑学家图灵(Turing)就从理论上证明了可以设计出存储程序式计算机[4],这比世界上第一台电子计算机的诞生早了10年.推理与计算是相通的,计算是受控制的推理[4].因此,逻辑中的不少成果可以用于计算机科学.例如,PROLOG语言就以一阶逻辑为基础.在程序验证[5]、程序变换、程序综合、软件形式说明、程序设计语言的形式语义学[6]、人工智能[7]等方面,都大量地应用数理逻辑的概念、方法和理论.同时,计算机科学的发展也向数理逻辑提出了大量新的问题,促进了数理逻辑的繁荣[4].

命题逻辑和一阶谓词逻辑是数理逻辑中最成熟的部分,也是学习和研究各种非标准逻辑的基础,在计算机科学中应用最为广泛.因此,在离散数学课程中需要学习命题逻辑和一阶谓词逻辑.

第一章　命题逻辑

一切科学，不论是社会科学还是自然科学，都离不开推理．正确的推理形式应当满足，从正确的前提出发，得出正确的结论．因此，要保证推出的结论正确，除了推理过程正确之外，还需要推理的前提正确．形式逻辑基本上采用自然语言研究推理．自然语言是丰富而生动的，但具有二义性，即一个词可以表达多种不同的意义，这为精确研究推理形式造成了困难．为了精确地表达思想，数理逻辑使用了特制的表意符号．因此，数理逻辑又被称为符号逻辑．数理逻辑是用数学方法研究推理形式的科学．

在后面的讨论中，需要用到集合和函数的概念．把一些事物汇集到一起组成一个整体就成为一个集合，而这些事物就是这个集合的元素．例如，所有的中国人，平面上所有的点，全体偶数就分别构成了不同的集合．将 a 是集合 S 的元素记为 $a \in S$，将 a 不是集合 S 的元素记为 $a \notin S$．不包含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$．不是空集的集合称为非空集．用 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ 表示由元素 $a_1,\cdots,a_n$ 组成的集合．如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 为 B 的子集，记为 $A \subseteq B$．如果集合 A 和 B 包含相同的元素，则称 A 和 B 相等，记为 $A = B$．包含有穷个元素的集合称为有穷集，否则称为无穷集．由集合 A 和 B 的全体公共元素组成的集合称为 A 和 B 的交，记为 $A \cap B$．把集合 A 和 B 的元素合在一起构成的集合称为 A 和 B 的并，记为 $A \cup B$．从集合 A 中去掉集合 B 中元素构成的集合称为 A 和 B 的差，记为 $A - B$．由集合 A 中元素构成的长度为 n 的序列的全体组成的集合记为 A^n．例如，

$$\{0,1\}^3 = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),$$
$$(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

集合 A 中元素构成的长度为 0 的序列只有一个，即空序列，将其记为 ε．因此 $A^0 = \{\varepsilon\}$．从集合 A 到集合 B 的函数 f 是一个规则，对于 A 中每个元素 x，它指定了 B 中惟一的元素 $f(x)$ 与之对应，称 $f(x)$ 为函数 f 在 x 处的值，并称 A 为 f 的定义域．若 f 是从 A^n 到 A 的函数，则称 f 为 A 上的 n 元函数，也称 f 为 A 上的 n 元运算．因为 0 元函数 f 的定义域 A^0 中只有一个元素 ε，所以可以把 A 中元素 $f(\varepsilon)$ 看做函数 f．因此，A 中每个元素都可看成 A 上的 0 元函数．若 P 是从 A^n 到集合 $\{0,1\}$ 的函数，则称 P 为集合 A 上的 n 元谓词．

§1.1　命题和联结词

命题是推理的基本要素．自然语言将命题表达为具有确定真假意义的陈述句．若该语句

意义为真，就称其为真命题．若该语句意义为假，就称其为假命题．用0表示假命题，用1表示真命题，并称$\{0,1\}$为真值集合，称假命题的真值为0，真命题的真值为1．

考察下列语句：

(1) 雪是白的．

(2) 2是奇数．

(3) $x+y>5$．

(4) 你是谁？

(5) 我正在说谎．

(6) 北京是中国的首都．

(7) 21世纪有人住在月球上．

语句(1)、(2)、(6)、(7)是命题，其中(1)、(6)是真命题，(2)是假命题，(7)的真假还不知道，但其具有惟一的真假值却是可以肯定的．语句(3)虽然是陈述句，但其真假意义不确定．若$x=y=3$，它为真；若$x=y=2$，它为假．所以，(3)不是命题．语句(4)是疑问句，不是命题．语句(5)虽然是陈述句，但它的意义自相矛盾，称为说谎者悖论，故不是命题．

由简单陈述句表述的命题称为简单命题．命题逻辑不再进一步分析简单命题的内部结构．在自然语言中，用连接词可以将若干个简单句组合成复合句．例如，用连接词“并且”将简单句“北京在广州的南面．”和“北京航空航天大学在北京．”组合成复合句“北京在广州的南面，并且北京航空航天大学在北京．”这个复合句表述了一个假命题，因为北京不在广州的南面．复合句表述的命题称为复合命题，组成这个复合句的简单句表述的命题称为它的支命题．可以看出，复合命题的真值由其支命题的真值和连接词的意义共同决定．若每个支命题的真值已确定，则连接词就为复合命题指定了惟一的真值．因此，可将连接词的意义看做真值函数．

定义 1.1　0和1称为0元真值函数．设$n\geqslant 1$，称$\{0,1\}^n$到$\{0,1\}$的函数为n元真值函数．真值函数也称为联结词．

用小写英文字母p,q,r,s,t等表示命题变元，即在集合$\{0,1\}$中取值的变元．将真值函数F在其自变量所有可能取值下得到的值列成的表称为F的真值表．例如，一元真值函数共有4个，它们的真值表如表1.1所示。

表 1.1　一元联结词的真值表

p	$F_1(p)$	$F_2(p)$	$F_3(p)$	$F_4(p)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

定义 1.2　上表中的联结词F_3称为否定，记为$\neg$．

把$\neg p$称为p的否定．$\neg$相当于汉语中的“不”．例如，用p表示“今天天气好”，则“今天

天气不好”可表示为 $\neg p$.有时也用 $\sim$ 表示否定联结词.

定义 1.3 二元联结词 $\wedge$（合取），$\vee$（析取），$\oplus$（异或），$\rightarrow$（蕴涵），$\leftrightarrow$（等价）的真值表如表 1.2 所示.

表 1.2 常用二元联结词的真值表

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

$p \wedge q$ 称为 p 和 q 的合取. $\wedge$ 相当于汉语中的“并且”.由真值表可以看出，$p \wedge q = 1$ 当且仅当 $p = q = 1$.有时也用 & 表示合取联结词.

$p \vee q$ 称为 p 和 q 的析取. $\vee$ 相当于汉语中的“或”.由真值表可以看出，$p \vee q = 0$ 当且仅当 $p = q = 0$.

$p \oplus q$ 称为 p 和 q 的异或. $\oplus$ 也相当于汉语中的“或”.由真值表可以看出，$p \oplus q = 1$ 当且仅当 $p \neq q$.

$p \rightarrow q$ 称为 p 蕴涵 q，其中 p 称为 $p \rightarrow q$ 的前件，q 称为 $p \rightarrow q$ 的后件.由真值表可以看出，$p \rightarrow q = 0$ 当且仅当 $p = 1$ 且 $q = 0$.有时也用 $\supset$ 表示蕴涵联结词.

$\rightarrow$ 类似于汉语中的“如果 …，则 …”，但是并不完全相同.在日常语言中，只有命题 p 和 q 存在某种意义上的联系时，“如果 p，则 q”才能成为复合命题.例如，“如果太阳从西边出来，则雪是黑的.”是一句毫无意义的话.若用 p 表示命题“太阳从西边出来”，q 表示命题“雪是黑的”，则 $p \rightarrow q$ 表示一个真命题，因为 p 是假命题.在数理逻辑中，只要 p 和 q 是命题，不管它们是否有任何意义上的联系，$p \rightarrow q$ 总是表示一个命题.

在 $\rightarrow$ 的真值表中规定，只要 p 为假，不管 q 的真假如何，$p \rightarrow q$ 总为真.这也与日常语言中“如果 …，则 …”的含义不同.若用 p 表示“我今天死”，用 q 表示“我长生不老”，则 $p \rightarrow q$ 表示一个真命题，因为事实上我今天没有死.在日常语言中，“如果我今天死，则我长生不老”显然是一个假命题.事实上，日常语言中的“如果 …，则 …”不是一个真值函数.复合命题“如果 p，则 q”的真值不仅与 p 和 q 的真值有关，还与 p 和 q 的具体含义有关.为了与日常语言中的“蕴涵”相区别，有时把 $\rightarrow$ 所表示的蕴涵称为实质蕴涵.本书只讨论实质蕴涵，将“如果 …，则 …”理解为实质蕴涵.

$p \leftrightarrow q$ 称为 p 等价于 q. $\leftrightarrow$ 相当于汉语中的“当且仅当”.由真值表可以看出，$p \leftrightarrow q = 1$ 当且仅当 $p = q$.有时也用 $\equiv$ 表示等价联结词.

$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\oplus$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$ 是 6 个最常用的联结词.用字母 p, q, r, s, t 等表示简单命题，复合命题就可以用简单命题和联结词表示出来，这个过程叫做命题符号化.

例 1.1 将下列命题符号化:

(1) 李明是计算机系的学生,他住在 312 室或 313 室.

(2) 如果我下班早且不累,就去商店看看.

(3) 燕子飞回来是春天来了的必要条件.

(4) 如果明天下雨,就不开运动会而照常上课.

解 (1) 首先用字母表示简单命题.

p:李明是计算机系的学生.

q:李明住在 312 室.

r:李明住在 313 室.

该复合命题可表示为 $p \wedge (q \oplus r)$,因为李明不会既住在 312 室,又住在 313 室,所以这里不用 $\vee$,而用 $\oplus$.

(2) 首先用字母表示简单命题.

p:我下班早.

q:我累.

r:我去商店看看.

该复合命题可表示为$(p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

(3) 首先用字母表示简单命题.

p:燕子飞回来了.

q:春天来了.

该复合命题可表示为 $q \rightarrow p$.

(4) 首先用字母表示简单命题 .

p:明天下雨.

q:明天开运动会.

r:明天照常上课.

该复合命题可表示为 $p \rightarrow ((\neg q) \wedge r)$.

§1.2 公式和真值赋值

在中学代数中,我们早已熟悉了公式的概念.例如,$(x + \sin y) \times 2$就是一个公式,其中2是实数,x和y是自实数集取值的变元,sin是一元实函数,+和×是二元实函数.只要给 x 和 y 赋予确定的实数值,该公式就有惟一确定的值.例如,令 $x = 1$ 和 $y = 0$,该公式的值为 2.因此,实际上可将该公式看做一个二元实函数.在我们还没有学到对数函数时,并不认为 $\ln x$ 是一个公式.因此,一个符号串是不是公式,还和所考虑的函数集合有关.

在这里将要定义的公式与中学代数的公式十分类似.代数中的变元是实变元,它取实数

为值;命题逻辑中的变元是命题变元,它取真值为值.代数中的常元是实数,命题逻辑中的常元是 0 和 1.代数中的函数是实函数,命题逻辑中的函数是真值函数.

用加或不加下标的小写英文字母 p,q,r,s,t 等表示命题变元,命题变元也称为命题符号,有无穷多个.

定义 1.4 命题变元称为原子公式.

可以用归纳法定义公式集合.归纳法是计算机科学中常用的方法.例如,某个程序设计语言的语句集可以定义如下:

$$C::= x = e \mid \{C_1;C_2\} \mid \text{if } b \text{ then } C_1 \text{ else } C_2 \mid \text{while } b \text{ do } C$$

其中 C,C_1,C_2 表示语句,x 表示变元,e 表示表达式,b 表示布尔表达式.用汉语可将上述定义表述如下:

(1) 赋值语句是语句.

(2) 如果 C_1 和 C_2 是语句,则 $\{C_1;C_2\}$ 是语句.

(3) 如果 b 是布尔表达式,C_1 和 C_2 是语句,则 if b then C_1 else C_2 是语句.

(4) 如果 b 是布尔表达式,C 是语句,则 while b do C 是语句.

(5) 每个语句都可通过有限次使用上述规则而得到.

在上述定义中,(1) 是归纳定义的基础,直接规定赋值语句是语句,这是最简单的语句.(2)、(3)、(4) 是归纳步,由比较简单的语句得出比较复杂的语句.(5) 是极小化,规定语句集是满足上述四条件的最小集合,即不能有限次使用前面四条规则得到的都不是语句.每个集合的归纳定义的极小化步都是一样的,因此,本书后面内容都省略这一步不写.

下面用归纳法定义公式集合.

定义 1.5 设 S 是联结词的集合.由 S 生成的公式定义如下:

(1) 原子公式是由 S 生成的公式.

(2) 若 c 是 S 中的 0 元联结词,则 c 是由 S 生成的公式.

(3) 若 $n \geqslant 1$,F 是 S 中的 n 元联结词,$A_1,\cdots,A_n$ 是由 S 生成的公式,则 $FA_1\cdots A_n$ 是由 S 生成的公式.

例如,$p,\neg\neg q,\neg r$ 都是由 $\{\neg\}$ 生成的公式.对于二元联结词可以采用前缀记法,即把联结词写在运算对象的前面.如 $\vee pq$.采用前缀记法不需要用括号也不会引起歧义.但是,人们习惯采用中缀记法,即把联结词写在运算对象的中间.采用中缀记法需要引进括号,否则有时会引起歧义,如 $p \vee q \wedge r$ 既可理解为 $(p \vee q) \wedge r$,也可理解为 $p \vee (q \wedge r)$.为了使读者阅读方便起见,本书也采用中缀记法,把 $(p \vee q)$ 看做 $\vee pq$ 的另一种表示.因此,$(p \vee q),(p \wedge q),\neg(p \vee 0)$ 都是由 $\{0,\neg,\vee,\wedge\}$ 生成的公式.

如果不需要特别指出联结词集合 S,就将由 S 生成的公式简称为公式.由于对二元联结词采用中缀记法,为了避免歧义而引进了括号,但公式中的括号太多会使人眼花缭乱,如在公式 $((((((p \wedge q) \vee r) \vee q) \rightarrow p) \oplus q) \leftrightarrow r)$ 中就有六对括号.为了减少括号.又不引起

歧义,引进以下省略括号的约定:

(1) 公式最外层的括号可省略.

(2) 规定联结词的优先级从高到低的顺序排列为:$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$,$\leftrightarrow$.若无括号,优先级高的联结词先运算.

(3) 若同一个联结词连续多次出现且无括号,则按从左至右的顺序运算.

例如,按约定(1),公式$((((((p \wedge q) \vee r) \vee q) \rightarrow p) \oplus q) \leftrightarrow r)$可去掉最外层括号简写为$(((((p \wedge q) \vee r) \vee q) \rightarrow p) \oplus q) \leftrightarrow r$;按约定(2), $\vee$ 的优先级比 $\rightarrow$ 高, $\oplus$ 的优先级比 $\leftrightarrow$ 高, $\wedge$ 的优先级比 $\vee$ 高,该公式可再简写为$((p \wedge q \vee r) \vee q \rightarrow p) \oplus q \leftrightarrow r$;再按约定(3),可进一步简化为$p \wedge q \vee r \vee q \rightarrow p) \oplus q \leftrightarrow r$.

定义 1.6 从全体命题变元组成的集合到集合$\{0,1\}$的函数称为真值赋值.设 v 是真值赋值,用 p^v 表示 v 赋给命题变元 p 的真值.由 S 生成的公式 A 在真值赋值 v 下的真值 $v(A)$ 定义如下:

(1) 若 A 是命题变元 p,则 $v(A) = p^v$.

(2) 若 A 是 S 中的 0 元联结词 c,则 $v(A) = c$.

(3) 若 A 是$FA_1 \cdots A_n$,其中 $n \geqslant 1$, F 是 n 元联结词,则 $v(A) = F(v(A_1), \cdots, v(A_n))$.

定理 1.1 设 A 是公式, v_1 和 v_2 是真值赋值,对于 A 中出现的每个命题变元 p, $p^{v_1} = p^{v_2}$,则 $v_1(A) = v_2(A)$.

证明 对 A 的长度进行归纳.

若 A 的长度是 1,则 A 是命题变元或 0 元联结词.

(1) 若 A 是命题变元 p,则 $v_1(A) = p^{v_1} = p^{v_2} = v_2(A)$.

(2) 若 A 是 0 元联结词 c,则 $v_1(A) = c = v_2(A)$.

设 A 的长度 m 大于 1,对于每个长度小于 m 的由 S 生成的公式 B, $v_1(B) = v_2(B)$.

(3) 若 A 是$FA_1 \cdots A_n$,其中 $n \geqslant 1$, F 是 n 元联结词,则 $A_1, \cdots, A_n$ 的长度都小于 m,由归纳假设知道

$$v_1(A_i) = v_2(A_i) \qquad i = 1, \cdots, n$$

因此

$$\begin{aligned} v_1(A) &= F(v_1(A_1), \cdots, v_1(A_n)) = F(v_2(A_1), \cdots, v_2(A_n)) \\ &= v_2(A) \end{aligned}$$

证毕.

若公式 A 中出现的命题变元为 $p_1, \cdots, p_n$, v 是真值赋值,则 $v(A)$ 只与 $p_1^v, \cdots, p_n^v$ 有关,而与 v 对其他命题变元的赋值无关.因此,在计算 $v(A)$ 时,只需指定 $p_1^v, \cdots, p_n^v$.用 $(p_1/a_1, \cdots, p_n/a_n)$表示满足 $p_1^v = a_1, \cdots, p_n^v = a_n$ 的任何一个真值赋值 v.

例 1.2 设公式 A 为 $p \vee 0 \rightarrow q \wedge 1$,真值赋值 $v = (p/1, q/0)$,则 $v(A) = 1 \vee 0 \rightarrow 0 \wedge 1 = 0$.