

高等 学校 教材

概率论及数理统计

Probability and Statistics (第3版)

(上册)

中山大学统计科学系

梁之舜 邓集贤

杨维权 司徒荣 邓永录 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

概率论及数理统计

Probability and Statistics

(上册)

(第3版)

中山大学统计科学系

梁之舜 邓集贤

杨维权 司徒荣 邓永录

编 著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论及数理统计.上册/梁之舜等编著;中山大学
统计科学系.—3版.—北京:高等教育出版社,
2005.2

ISBN 7-04-015956-2

I.概... II.①梁...②中... III.㊦概率论—高等
学校—教材②数理统计—高等学校—教材 IV.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 132647 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	北京蓝色畅想图书发行 有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	河北省财政厅印刷厂		
		版 次	1980年3月第1版
开 本	850×1168 1/32		2005年2月第3版
印 张	12.5	印 次	2005年2月第1次印刷
字 数	320 000	定 价	14.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 15956-00

内容提要

本书是中山大学数学系梁之舜等五人编著的《概率论及数理统计》(1988年第二版)的第三版,署名现改为中山大学统计科学系,五位编者不变。第三版与第二版相比有不少小的修改,将原第四章与第五章合并为新的第四章,增设新的第五章与新的第十章,全书共分设十二章,仍分上、下册出版。

学习本书只要求具有高等数学(微积分,高等代数)的基础知识,因此本书具有适应面广、便于自学的特点。

本书可作为综合大学、师范院校及其他高等院校的数学、统计科学、计算数学等专业的教材,也可作为其他有关专业的教学参考书。

第三版序

《概率论及数理统计》(第1版)上、下册,作为概率论及数理统计课程的全国通用教材于1980年出版,至今已二十多年并跨入21世纪。如所知“概率统计”作为一门数学学科出现在19世纪上半叶,它的发展经历了相当曲折的道路。首先它要作为一门严谨的数学学科为古典数学家接受并不容易⁽¹⁾,另一方面要为工程、技术、气象、医药、医疗工作者同意使用并取得效果,广泛推广也经历了不简单过程⁽²⁾。新中国成立后即把概率论与数理统计作为数学本科生的一门教学基础课。怎样使学生掌握正确的内容并发生兴趣,也不是轻而易举的事。

首先作为一门研究随机现象规律性及其应用的学科,它不同于一门纯粹的数学学科,它需要科学思想从确定性思维到随机性思维的转变。其次它要求解决从反映自然与社会的客观实际到建立抽象概念与模型又回到实际应用的哲学思辨问题。

人们普遍承认,1933年柯尔莫哥洛夫《概率论基础》的出版是概率统计成为一门严谨的学科的里程碑。但把它作为对“概率”概念给出的严格数学定义是不够的。正如不少学者指出,一门学科的严谨性是建立在概念之间的严谨的相互关系的严格逻辑推理上。至于概念定义本身,由于经过对客观事物的抽象过程,不可能都可以严格给出。但抽象的几何点线面概念不能严格给出并不妨碍它在描述客观几何形状的作用和工程技术中的应用。(物理学中“力”、“质量”、“能量”的概念也不严格,但并不妨碍牛顿力学的应用。)

基本概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是最重要的理论框架,初学学生接受是有困难的,可以逐步树立对它的认识和正确运用。第一章例

1.2.10(见特朗奇论)的一个几何概率问题可以有多个不同的答案是由于 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 的不同。随机变量和事件的可测性都和对应的 σ 代数 $\mathcal{F}$ 有关, $\mathcal{F}$ 可以按照需要扩大或缩小。事件 A, B 相互独立的充要条件是 $P(AB) = P(A)P(B)$,故事件的独立性是相对于概率测度 P 而言的。换了另一个概率测度,事件的可测性和独立性都有可能发生变化。

概率公理化系统当然由实际概型包括古典概型、统计概型等抽象出来,当公理系统建立以后它与实际的联系在柯尔莫哥洛夫的书只是指出两点:①在条件相同的情况下多次重复试验,一事件 A 的概率 $P(A)$ 应与 A 出现的频率 m/n 相差不多。②如果 $P(A)$ 很小,则事件 A 在一次试验中可能不会发生⁽³⁾。

这里并未给出肯定性的论断,反映公理系统并未建立与现实世界的呆板关系。

“随机性”当然是“概率统计”的中心概念。书中很容易给出必然现象和偶然现象的定义和例子。但人们很容易形成这样的观念:不是肯定性的例子就是随机事件。著名气象学家E.N.洛伦兹在他的书“混沌的本质”⁽⁴⁾中叙述一件事:多年前在他上大学的城市,当地商店忽然增设了几台弹球器,很快不少学生偶尔赢了相当多的钱,但更经常是输钱。市政府曾想作出决定废除这些机器,因为他们违反赌博法。但后来有人告诉他们,弹球器是技巧的竞争而非机会性游戏,因而完全合法。

20世纪上半叶,非线性科学陆续取得发展,不同学科分别发现肯定性规律中由于对初值敏感性会出现貌似随机的不规则现象,有些人称之为内秉随机性或称之为“混沌”现象。外在随机性与内秉随机性不同之处在于后者是具有长期可预报性(例如趋于某些吸引子)⁽⁵⁾。本书是一本入门的教材,不可能展开大谈“混沌理论”,但略加介绍是可以的。作为北京市哲学社会科学“九五”规划的重点项目成果《跨世纪科技与社会可持续发展》中有一段话:“如果说人类16世纪以前停留在经验的科学思想,其后广泛使用

因果的科学思想,20世纪主要使用概率的科学思想的话,那么21世纪全新的科学思想将是非线性的。

关于统计的作用,历史上数理统计的两大开创者权威K.皮尔逊与R.A.费希尔的意见针锋相对。K.皮尔逊特别是其子E.S.皮尔逊与奈曼认为统计是作出决策的科学,而费希尔及其后继者则认为统计是数据分析和取得意见的科学。⁽⁶⁾

2000年被国际数学家联盟(IMU)定为世界数学年并得到联合国教科文组织和第三世界科学院的支持,它的主要任务是“使数学及其对世界的意义被社会所了解,特别是被普通大众所了解”,⁽⁷⁾主要内容为揭示数学的五个本质:①作为一门纯粹科学;②作为一门应用科学;③作为决策与行动的工具;④作为一门艺术;⑤作为现代教育最重要的学科之一。

概率统计作为一门数学它都反映了这五种本质,而作为决策行动的工具这一特点似乎更突出。

概率统计更大一个学派争论是古典学派与贝叶斯学派之争⁽⁸⁾。

贝叶斯统计来源于贝叶斯公式。贝叶斯对统计学几乎没有什么贡献,生前默默无闻地写过一篇文章,这篇文章在他死后由一个保险经理加以发表。初时由于应用了被看作带有主观随意性的先验概率和贝叶斯假设而遭到冷遇,以后由于一些实际应用而被统计学者谨慎地接受,而在理论上形成了古典统计学派与贝叶斯学派的争论。但是有人说正是这些学术争论促进了概率统计科学的发展。今天历史已经发生了戏剧性的变化,贝叶斯统计亦成为统计推断与决策的重要工具,在近代人工智能中亦有重要的应用,效果良好。

梁之舜

注

(1) J. L. Doob. 数学概率理论中严格性的发展,数学译林,1997年第二期。

- (2) 陈达等. 生物医学的统计方法, 现代医学统计。
- (3) Kolmogorov. Foundation of Probability。
- (4) [美] E. M. Lorentz. 《混沌的本质》, 1997。
- (5) 同(4)。
- (6) [美] 福尔克斯. 统计思想讲演 32。
- (7) 赵小平. 现代数学大观, § 1.1。
- (8) 张尧庭. 贝叶斯统计. 现代数学手册随机数学卷第 8 篇。

第三版前言

本书(上、下册)作为全国高等院校通用教材于1980年出版。1988年第二版发行至今又经历了十五年时光,在这期间本书(上、下册)又共重印发行十余万册,仍然受到全国高等院校师生及广大读者的欢迎。高等教育出版社根据当前高等院校教学的具体情况和需要,要求我们对本书重新修订作为第三版继续出版发行。本书编者多次讨论了高等教育出版社对本书修订的建议及第三版修订的基本原则。我们听取了曾多次使用过本书的有关院校老师们的意见,并同中山大学统计科学系何远江、区景琪、尹小玲、余锦华等教师进行了讨论。我们还注意到当前高等院校不同专业对《概率论及数理统计》课程的教学要求有所不同。为了使本书具有广泛的适用性,在教学中使用本书时更好地操作,因此将第三版编写的基本原则与具体措施体现在下述三个方面:

(1) 第三版仍保持第一版提出的基本原则,即本书只要求读者具有高等数学的数学基础;

(2) 对第三版作了删繁就简的修改,如将第二版的第四、五两章合并为第三版的第四章,删去纯分析和偏难的内容(大部分定理和性质的证明过程)。又如对第二版的第七、八、九各章按删繁就简原则作了较大的修改。其他各章也都作了部分修改,并适当增加一些实际应用的例子。

(3) 我们注意到有许多读者希望进一步学习概率论,因此在第三版中增设新的第五章,主要介绍勒贝格—斯蒂尔切斯积分的有关知识及其在概率论中的一些应用。又考虑到数理统计学的一个学派即贝叶斯统计学在理论与应用方面有较成熟的发展,于是在第三版中增设第十章,介绍统计决策论与贝叶斯统计的基本

知识。

我们认为《概率论及数理统计》课程的基本内容是本书第三版(上册)第一、二、三、四及(下册)第六、七、八、九共计八章。书中有些章、节、段或定理的证明打*号或用小字编排,供教学参考选用。不同专业按其教学计划的要求,可以从本书(上、下册)中适当选讲有关章节内容。

本书的第一、四、十一各章由邓集贤执笔;第二、三两章由司徒荣执笔;第五章由梁之舜(区景琪、何远江协助)执笔;第六、七、八、九、十各章由杨维权执笔;第十二章由邓永录执笔。本书第三版能顺利地发行,编者感谢广大读者的厚爱 and 高等教育出版社的大力支持和鼓励,并感谢中山大学统计科学系何远江教授的协助。再版后可能还会有许多不妥之处,希望读者及专家批评指正。

编者

2004年7月1日

目 录

第一章 随机事件和概率	1
§ 1.1 随机事件的直观意义及其运算	1
一、必然现象与随机现象	1
二、随机试验与事件	4
三、事件的关系与运算	5
四、用集合与几何图形表示事件,样本空间	7
§ 1.2 概率的直观意义及其计算	10
一、古典概率	10
二、统计概率	16
三、几何概率	19
§ 1.3 概率模型与公理化结构	24
§ 1.4 条件概率	37
一、条件概率的定义、例及性质	37
二、乘法公式	41
三、全概率公式	45
四、贝叶斯公式	48
§ 1.5 相互独立随机事件、独立试验概型	52
一、相互独立随机事件	52
二、串联,并联系统的可靠度计算	58
三、独立试验概型	60
习题	65
第二章 随机变量及其分布函数	71
§ 2.1 随机变量的直观意义与定义	71
一、离散型随机变量与分布列	74
二、连续型随机变量及其密度函数	97
三、分布函数及其基本性质	115

§ 2.2 多维随机变量及其分布函数	120
一、二维分布函数及其基本性质	120
二、边缘分布	127
§ 2.3 相互独立随机变量, 条件分布	131
一、相互独立随机变量	131
二、条件分布	137
§ 2.4 随机变量的函数及其分布函数	142
一、和的分布	144
二、商的分布	150
三、随机变量的线性变换与平方变换	153
四、 χ^2 -分布, t -分布, F -分布	155
习题	165
第三章 随机变量的数字特征	178
§ 3.1 数学期望与方差	178
一、离散型和连续型随机变量的数学期望和方差	181
二、一般的随机变量的数学期望与方差的定义和性质	195
§ 3.2 矩	202
§ 3.3 多维随机变量的数字特征	204
§ 3.4 多维随机变量的函数的数字特征	216
§ 3.5 条件数学期望	230
习题	235
第四章 特征函数与极限定理	240
§ 4.1 一维特征函数的定义及其性质	240
一、定义及例	240
二、性质	246
三、特征函数与矩的关系	249
四、反演公式及惟一性定理	251
§ 4.2 多维随机变量的特征函数	254
一、定义及例	254
二、二维随机变量特征函数的性质	256
三、相互独立随机变量和的特征函数	259
§ 4.3 母函数	262

§ 4.4 大数定律	267
一、弱大数定律	267
二、强大数定律	273
三、依概率收敛与以概率为 1 收敛的关系	274
§ 4.5 中心极限定理	276
一、依分布收敛	278
二、中心极限定理	280
*§ 4.6 三种收敛的关系	289
习题	290
第五章 测度与积分及其在概率论中的一些应用	295
§ 5.1 为什么要引进测度与对测度的积分	295
一、绪言	295
二、从若尔当(Jordan)测度谈起	296
三、所谓“病态函数”促进了勒贝格测度与勒贝格积分 理论的诞生	297
§ 5.2 一般测度与勒贝格测度	300
一、 σ 代数与测度	300
二、勒贝格外测度	304
三、勒贝格测度	306
四、勒贝格可测集与博雷尔可测集的关系	309
§ 5.3 对测度的积分	311
一、可测函数	311
二、可测函数对测度的积分	313
三、积分的基本性质	317
四、积分的极限性质	318
五、黎曼可积的充要条件、黎曼积分与勒贝格积分的关系	322
§ 5.4 在概率论中的应用	324
一、可测变换、随机变量与概率分布	324
二、勒贝格-斯蒂尔切斯积分	325
三、积分变换定理与数学期望	326
四、Radon-Nikodym 定理与密度函数	329

上册习题答案	332
附录 I 排列组合补充	349
附录 II 集合论简介	353
附录 III $R-S$ 积分	359
附表	373
表 1 二项分布	373
表 2 泊松(Poisson)分布	376
表 3 正态分布	381
译名对照表	384
参考文献	385

第一章 随机事件和概率

§ 1.1 随机事件的直观意义及其运算

一、必然现象与随机现象

在自然界里,在生产实践和科学试验中,人们观察到的现象大体可归结为两种类型.一类是可事前预言的,即在准确地重复某些条件下,它的结果总是肯定的,或是根据它过去的状态,在相同条件下完全可以预言将来的发展.我们把这一类型的现象称之为确定性现象或必然现象.例如重物在高处总是垂直落到地面;在一个气压下,水在 100°C 时会沸腾;水稻的生长从播种到收割,总是经过发芽、育秧、长叶、吐穗、扬花、结实这几个阶段;在射击时(假设空气阻力等可以忽略)弹道完全由射击的初始条件(如炮弹的初速度、发射角和弹道参数等)决定.早期的科学就是研究这一类现象的规律性,所应用的数学工具如数学分析、几何、代数、微分方程等是大家所熟悉的.但人们逐渐还发现另一类型的现象,它是事前不可预言的,即在相同条件下重复进行试验,每次结果未必相同;或是知道它过去的状况,在相同条件下,未来的发展事前却不能完全肯定.这一类型的现象我们称之为偶然性现象或随机现象.如抛掷一个质地均匀的对称的硬币,结果可能是正面向上,或背面向上;新生的婴儿可能是男或是女;在相同海况与气象条件下,某定点海面的浪高时起时伏;当空气阻力等不能忽略时,弹道不能根据初始条件完全确定,可能向不同方向作程度不同的偏移,事前不能肯定.类似的例子还可以举出许多来.

初时人们把这种现象称为“偶然现象”是指它是“不正常的”、“出乎意料的”或者是“原因不明的”,甚至对于迅雷、疾风、陨石、地

震等认为是天降的灾难。

是不是这些偶然现象都没有什么规律性可寻呢？事实上并非如此。人们通过长期的反复观察和实践，逐渐发现所谓不可预言，只是对一次或少数几次观察或实践而言，当在相同条件下进行大量观察时，偶然现象都呈现某种规律，因而也是可以预言的。例如根据各个国家各个时期的人口统计资料，新生婴儿中男婴和女婴的比例大约总是 1:1。据传，在我国古代很早的时候就已经知道了这样一个结果。又如人的高度虽然各不相同，但通过大量的统计，如果在一定范围内把人的高度按所占的比例画出“直方图”，就可以连成一条和铜钟的纵剖面一样的曲线；定点海面在一段时间内的浪高，也可以画出类似的曲线，如图 1.1.1。还有更简单的例子（大家可以立即检验的），均匀的硬币抛掷多次，正面和背面出现的次数比例总是近似 1:1，而且大体上抛掷次数愈多，愈接近这个比值。历史上，蒲丰掷过 4 040 次，得到 2 048 次正面；皮尔逊掷过 24 000 次，得到 12 012 次正面。

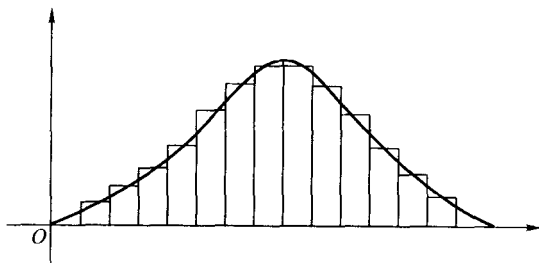


图 1.1.1

从上面的叙述中我们看到，自然界中存在着具有如下特性的现象：在一定的条件组实现时，有多种可能的结果发生，事前人们不能预言将出现那种结果，但大量重复观察时，所得的结果却呈现某种规律，称为随机现象的统计规律性。

正如恩格斯所说：“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种

偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的,而问题只是在于发现这些规律。”(《马克思恩格斯选集》中译本第四卷 243 页)。

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。

根据马克思、恩格斯的论述,必然性与偶然性是对立统一的概念,偶然性不能理解为“碰巧的”,(为了避免这种误解,人们往往把它称为“随机性”)它蕴含内在必然性的规律;反过来,被断定为必然的东西,是由纯粹的偶然性构成的。

例 1.1.1 研究气体的性质知道,由于气体是由数目众多的分子构成,这些分子以很快的速度进行剧烈的运动,在运动的过程中相互碰撞而改变其动量和方向,因而每个分子的运动是随机现象。而大量的分子运动呈现出的总体现象——温度、压强却满足波耳定律。

曾经有人认为,之所以会出现事前不可预言的偶然现象,是因为我们对一个现象出现的原因还缺乏全面足够的知识,认为随着科学的发展和人类认识的深化,总有一天将不再存在不可预言的随机现象。

诚然,增加条件组的条件来减少随机性是可能的。例如,人的高度按不同的年龄、地区、性别是有差异的,若限定在同一地区,在一定年龄范围内选取同性别的人来测量高度,可能会得到比一般任意选取时有较均匀的结果,但随机因素的影响总是不可避免的。很多现象初始条件的稍微改变,其产生的后果却差别很大。在实际中即使人们有可能把条件组的条件绝对控制到每次都一样,但影响的因素还是大量的,且互相作用错综复杂。例如在例 1.1.1 关于气体分子运动的例子中,即使我们把 1 cm^3 气体的 2.683×10^{18} 个分子的运动方程和初始条件都列出来,且不说我们要求出这组联立方程的解也是很困难的,更应注意这里在建立方程和确定初始条件时已是忽略了许多次要的,但往往是随机的因素。

因此,偶然性现象是客观存在的,那种否认偶然现象的想法,