大学数学基础指导丛书

线性代数指导

万桂华 刘兰冬 编

清华大学出版社

大学数学基础指导丛书

线性代数指导

万桂华 刘兰冬 编

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书是根据教育部高等学校工科数学课程指导委员会制定的线性代数教学要求，配合同济大学主编、高等教育出版社出版的《线性代数》第三版教材编写的同步教学参考书. 本书分为5章，包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵与二次型. 各章主要对相关内容和解题方法进行了分析、归纳和总结，并通过典型例题，针对不同问题，分析、总结解决问题的思路、方法和技巧，以帮助读者提高分析问题和解决问题的能力. 每章配有检测题及参考答案，书末附有三套模拟试题及参考答案.

本书可作为理工院校大学生的参考书，也可供报考硕士研究生的读者使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数指导/万桂华，刘兰冬编．—北京：清华大学出版社，2005.9
(大学数学基础指导丛书)
ISBN 7-302-10765-3

Ⅰ．线…　Ⅱ．①万…②刘…　Ⅲ．线性代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第028277号

出 版 者：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969
组稿编辑：刘　颖
文稿编辑：王海燕
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市金元装订厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×230　印张：8.5　字数：181千字
版　次：2005年9月第1版　2005年9月第1次印刷
书　号：ISBN 7-302-10765-3/O·455
印　数：1～4000
定　价：12.00元

前　言

本书是根据教育部编发的《线性代数教学大纲》，配合由同济大学主编、高等教育出版社出版的《线性代数》(第三版)教材，分行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵与二次型五章编写的教学指导书.

本书每章内容由四部分组成：一是主要内容，将该章的基本概念、主要定理、公式、相关结论和应用归类列出，便于读者使用. 二是学习指导，首先以教学大纲为依据，指出该部分的目的要求、重点难点，使读者对所需掌握的知识一目了然；然后是学习方法，针对基本概念、基本理论、基本计算和基本应用的要求及解题方法进行归纳总结，以补充线性代数教材重演绎轻归纳的不足，这是目前国内外同类教学参考书中很少见的，也是本书的主要特色之一. 三是解题指导，对精选的典型例题，在求解前既有与学习方法相呼应的解决一类问题的解题思路或解题步骤，也有针对个别问题的解题分析，使读者通过阅读这些例题，不仅学会"是什么"，而且掌握"为什么". 四是检测题，选题主要来源于我们多年的教学积累，难易适中，覆盖面广，且附有参考答案，读者宜在学完每章后进行自我检查. 另外，我们还在书末附了三套模拟试题，并对这些试题做了解答. 建议读者先自行演练，再阅读试题解答，通过练习，可以检验自己对线性代数基本内容、基本计算、基本理论和应用的掌握情况.

本书第 1、2、3 章由刘兰冬编写，第 4、5 章由万桂华编写.

由于水平所限，书中疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正.

作　者

2005 年 4 月

目　　录

第1章　行　列　式

1.1　主要内容

1　基本概念

排列　由 n 个不同的元素无重复地排成一列称为这 n 个元素的全排列，简称排列．

逆序　对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序(如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序)，于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就构成一个逆序．

逆序数　一个排列中逆序的总数称为该排列的逆序数．

排列的奇偶性　若一个排列的逆序数是奇数，则称该排列是奇排列；否则称为偶排列．

对换　把一个排列中任意两个元素的位置调换，其他元素不动得到新的排列，这种调换称作一次对换；相邻两个元素对换称为相邻对换．

行列式　设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

表中取自不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$ 的代数和，即

$$\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

或

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

简记作 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为元素，元素 a_{ij} 的第 1 个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第 2 个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列，从 a_{11} 起到 a_{nn} 止的斜线称为主对角线. 其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为该排列的逆序数. $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和.

余子式　n 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 中把元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列划去后，剩下的 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

代数余子式　记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

k 级子式　在一个 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列 $(1\leqslant k\leqslant n)$，位于这些行和列的交点上的 k^2 个元素按原来位置组成一个 k 阶行列式 M 称为 D 的一个 k 级子式.

k 级子式的余子式　在 n 阶行列式 D 中划去一个 k 级子式的 k 行 k 列后，剩下的元素按照原来的位置组成一个 $n-k$ 级行列式 M'，M' 称为 k 级子式 M 的余子式.

k 级子式的代数余子式　设 n 阶行列式 D 的 k 级子式 M 在 D 中所在的行标为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，列标为 $j_1,j_2,\cdots,j_k$，则 M 的余子式 M' 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 k 级子式 M 的代数余子式.

转置行列式　记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\qquad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

2 性质

(1) 排列逆序的性质

① 由 $1,2,\cdots,n$ 可以构成 $n!$ 种不同的排列，其中排列 $1\ 2\ \cdots\ n$ 称为自然排列，其逆序数为 0，即自然排列是偶排列.

② 一个排列中任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

③ 奇(偶)排列调成自然排列的对换次数为奇(偶)数.

(2) 行列式的性质

① 行列式与它的转置行列式相等.

② 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

③ 行列式的某行(列)所有元素都乘以数 k，等于该数乘以此行列式.

推论 行列式中某一行(列)所有元素的公因子都可以提到行列式符号之外.

④ 行列式中如果有两行(列)元素对应成比例，则此行列式为 0.

推论 行列式有两行(列)完全相同，则该行列式等于 0.

⑤ 行列式的某一行(列)的元素是两组数之和，则此行列式可拆成两个新行列式之和.

⑥ 将行列式的某一行(列)的所有元素乘以同一个数后加到另一行(列)对应元素上，行列式不变.

3 主要定理及公式

行列式按某一行(列)展开定理 n 阶行列式 $D_n=\det(a_{ij})$ 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D_n = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D_n = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

推论 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j).$$

拉普拉斯(Laplace)定理(行列式按 k 行(列)展开定理) 若在 n 阶行列式 D_n 中任意取定 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 行(列)，那么由这 k 行(列)所组成的所有 k 级子式与它们对应的代数余子式乘积之和等于行列式 D_n.

以四阶行列式 $D_4=\det(a_{ij})$ 为例. 取 $k=2$，在 D_4 中取定第 1,3 行，共可以得到 $C_4^2=6$

个子式：

$$M_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix},\quad M_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix},\quad M_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{14}\\a_{31}&a_{34}\end{vmatrix},$$

$$M_4=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad M_5=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{14}\\a_{32}&a_{34}\end{vmatrix},\quad M_6=\begin{vmatrix}a_{13}&a_{14}\\a_{33}&a_{34}\end{vmatrix},$$

它们对应的代数余子式分别为

$$A_1=(-1)^{(1+3)+(1+2)}\begin{vmatrix}a_{23}&a_{24}\\a_{43}&a_{44}\end{vmatrix},\quad A_2=(-1)^{(1+3)+(1+3)}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{24}\\a_{42}&a_{44}\end{vmatrix},$$

$$A_3=(-1)^{(1+3)+(1+4)}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{42}&a_{43}\end{vmatrix},\quad A_4=(-1)^{(1+3)+(2+3)}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{24}\\a_{41}&a_{44}\end{vmatrix},$$

$$A_5=(-1)^{(1+3)+(2+4)}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{41}&a_{43}\end{vmatrix},\quad A_6=(-1)^{(1+3)+(3+4)}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{41}&a_{42}\end{vmatrix}.$$

根据拉普拉斯定理，有

$$D_4=M_1A_1+M_2A_2+M_3A_3+M_4A_4+M_5A_5+M_6A_6.$$

克拉默(Cramer)法则 若线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$，则此方程组有惟一解

$$x_i=\frac{D_i}{D},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是将 D 的第 i 列元素换成 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所构成的行列式.

推论 若齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\qquad\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0,\end{cases}$$

的系数行列式不等于零 $(D\neq0)$，则此线性方程组只有零解.

主要公式

(1) $$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(3) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & * & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & & \vdots & & * & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

（其中 * 部分为非零元素）

(4) $$\begin{vmatrix} & & & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & & & \\ \vdots & & \vdots & & * & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & * & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

(5) 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i - x_j) = \begin{aligned}[t] &(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \\ &\qquad (x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2) \\ &\qquad\qquad \cdots \\ &\qquad\qquad (x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

1.2 学习指导

1 基本要求

(1) 了解 n 阶行列式的定义.
(2) 掌握行列式的性质.
(3) 掌握计算行列式的基本方法.
(4) 掌握并会应用克拉默法则.

2 重点与难点

重点 n 阶行列式的计算方法.
难点 n 阶行列式的定义.

3 学习方法

行列式是线性代数中的一个重要的研究对象,也是讨论线性方程组理论的一个有力工具,学习这一章应掌握行列式的计算方法.本章的难点是行列式的定义,可以依定义去计算 n 阶行列式,但此方法计算量较大,除非行列式中有大量的零元素,否则不提倡用定义去计算行列式,而应更多地采用以下方法.

(1) 对二、三阶行列式可采用“对角线法则”即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

需要特别注意的是:对四阶及四阶以上行列式“对角线法则”不适用.

(2) 熟练掌握行列式的性质,并将行列式进行等价变形为已知的、简单的、易计算的行列式.

(3) 利用一些特殊行列式来计算行列式.常用的特殊行列式为上(下)三角行列式、关于副对角线的上(下)三角行列式、范德蒙德行列式等.

(4) 利用按行(列)展开定理及拉普拉斯定理对行列式进行降阶处理.

(5) 利用递推法来计算行列式.

(6) 利用加边法(也称升阶法)来计算行列式.计算行列式时,不一定都降阶处理,有时给行列式加上一行一列后,反而会出现一些规律性的关系,使计算简单.

(7) 利用数学归纳法来计算行列式.

以上几种方法并不是孤立地使用，我们可以灵活地运用行列式的定义、性质及相关定理，结合具体行列式的特点来计算.

1.3 解题指导

1 排列的逆序数

例 1 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数.

(1) $1\ 3\ \cdots\ (2n-1)\ 2\ 4\ \cdots\ (2n)$.

(2) $1\ 3\ \cdots\ (2n-1)\ (2n)\ (2n-2)\ \cdots\ 2$.

分析 求一个排列的逆序数，就要搞清楚基本概念“逆序”及“逆序数”，我们只要把题中所有的逆序都找出来，然后加在一起就得到该排列的逆序数.

解 (1) 1 的逆序数是 0，3 的逆序数是 0，…，$(2n-1)$的逆序数是 0.

2 的逆序数是 $n-1$(比 2 大的数有 $3,5,\cdots,2n-1$，共 $n-1$ 个数)，4 的逆序数是$n-2$(比 4 大的数有 $5,7,\cdots,2n-1$，共 $n-2$ 个数)，……，$2n-2$ 的逆序数是 1，$2n$ 的逆序数是 0. 所以排列 $1\ 3\ \cdots\ (2n-1)\ 2\ 4\cdots\ (2n)$的逆序数为

$$0+0+\cdots+0+(n-1)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

(2) 逆序数为

$$2+4+\cdots+(2n-2)=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1).$$

例 2 若排列 $5\ 2\ 3\ i\ 4\ 6\ j\ 7\ 9$ 为奇排列，则 i,j 各等于什么？

分析 注意排列是不同的元素排成一列，数字不允许有重复，所以 i,j 不能同时取 1 和 8，然后再判断下面两种排列：

$$5\ 2\ 3\ 1\ 4\ 6\ 8\ 7\ 9,\quad 5\ 2\ 3\ 8\ 4\ 6\ 1\ 7\ 9$$

的奇偶性就可以确定出 i,j.

解 5 2 3 1 4 6 8 7 9 的逆序数是 7，5 2 3 8 4 6 1 7 9 的逆序数是 12. 由此可知

$$5\ 2\ 3\ 1\ 4\ 6\ 8\ 7\ 9$$

是奇排列，故 $i=1,j=8$.

2 行列式的计算及证明

例 3 求行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & c \\ b & c & a & d \\ b & c & d & d \end{vmatrix}$$

的展开式中 b^2cd 的系数.

分析　记此行列式的第 i 行第 j 列交叉点上的元素为 a_{ij}. 行列式的本质是取自不同行不同列的 n 个数的乘积，而 b^2 是 b^2cd 的因子，因此我们只须考虑出现 b^2 的以下几项：

$$a_{12}a_{21}, \quad a_{12}a_{31}, \quad a_{12}a_{41}.$$

第一项 $a_{12}a_{21}$ 的可能性可以排除，因为第 3,4 行与第 3,4 列元素中没有因子 c. 剩下两项列表如下：

出现 b^2cd 的项	相关的列标排列	奇偶性	b^2cd 前的符号
$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$	2 3 1 4	偶	+
$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$	2 4 1 3	奇	−
$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$	2 3 4 1	奇	−

解　行列式展开式中出现 3 项 b^2cd 项，而 b^2cd 的系数是 $1-1-1=-1$.

例 4　计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

分析　此行列式中出现大量的零元素，计算时应该给予充分的考虑，利用行列式的定义. 在 D_n 中只有一项不为 0，即

$$a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn},$$

然后再定一下该项前的符号就可以算出 D_n.

解　　$$D_n=(-1)^t a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn},$$

其中 t 为列标排列 $(n-1)(n-2)\cdots 1n$ 的逆序数，因此

$$t = 0+1+2+\cdots+(n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

于是

$$D_n = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} 1\times 2\times\cdots\times n = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} n!.$$

例 5　设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$，把 D 上下翻转，或逆时针旋转 $90°$，或依副对角线翻转依次得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}.$$

证明：$D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D, D_3=D$.

分析　本题必须搞清楚 D_1, D_2, D_3 的元素与 D 元素之间的关系.

证明 (1) $D_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$.

将 D_1 的第 n 行依次与上一行交换直至第 1 行；再对所得行列式的第 n 行依次与上一行交换直至第 2 行；……；最后将第 n 行与第 $n-1$ 行交换，即得 D. 于是

$$\begin{aligned} D_1 &= (-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n-2}\cdots(-1)\cdot D \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D. \end{aligned}$$

(2) $D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$. 对 D_2 按如上方法交换行，即得

$$\begin{aligned} D_2 &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D^{\mathrm{T}} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D. \end{aligned}$$

(3) $D_3=D$. 同(1)一样交换行，得

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} a_{nn} & a_{n-1,n} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{11} \\ a_{n2} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & a_{n-1,n} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_1^{\mathrm{T}} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_1 \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D \\ &= D. \end{aligned}$$

例 6 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

分析 计算行列式时可以考虑利用行列式性质把行列式化为上(下)三角行列式，再利用三角行列式的结论(见前面主要公式). 又观察该行列式每一行元素之和都是 x，所以我们可以把每一列都加到第一列上，提取公因子 x，然后再利用行列式性质把行列式化为三角行列式.

解

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\1 & -1 & x+1 & -1\\1 & x-1 & 1 & -1\\x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}\xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3}}\begin{vmatrix}x & -1 & 1 & x-1\\x & -1 & x+1 & -1\\x & x-1 & 1 & -1\\x & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\1 & -1 & x+1 & -1\\1 & x-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}\xlongequal[c_4+c_1]{\substack{c_2+c_1\\c_3-c_1}}x\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x\\1 & 0 & x & 0\\1 & x & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\qquad \text{（其中 } c_i \text{ 表示第 } i \text{ 列）}$$

$$=x\cdot(-1)^{\frac{4\times 3}{2}}x^3$$

$$=x^4.$$

例 7　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x & a & a & \cdots & a\\a & x & a & \cdots & a\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\a & a & a & \cdots & x\end{vmatrix}.$$

分析　此行列式的特点是每行元素之和都等于 $x+(n-1)a$. 这种类型的行列式常常采用把第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第 1 列上去，然后提取公因子，再化行列式为三角行列式.

解

$$D_n\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{c_1+c_i}\begin{vmatrix}x+(n-1)a & a & a & \cdots & a\\x+(n-1)a & x & a & \cdots & a\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\x+(n-1)a & a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\1 & x & a & \cdots & a\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\1 & a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1\\\vdots}}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\0 & x-a & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

例 8 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2^2&\cdots&2^n\\3&3^2&\cdots&3^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{vmatrix}.$$

分析 根据本题行列式的特点，利用行列式性质把 D_n 化为范德蒙德行列式.

解 在 D_n 的第 i 行提取公因子 $i(i=1,2,\cdots,n)$，得

$$D_n=1\times2\times3\times\cdots\times n\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&2^{n-1}\\1&3&\cdots&3^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&n&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=n!\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&3&\cdots&n\\1&2^2&3^2&\cdots&n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2^{n-1}&3^{n-1}&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=n!\prod_{n\geqslant i>j\geqslant1}(i-j)$$

$$=n![(2-1)(3-1)\cdots(n-1)$$
$$(3-2)\cdots(n-2)$$
$$\cdots$$
$$(n-(n-1))]$$

$$=n!(n-1)!(n-2)!2!1!.$$

例 9 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&0&\cdots&0&0\\0&x&a&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&&x&a\\a&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}.$$

分析 该行列式每一行(列)只含有两个非零元素 x 与 a，具有这种特点的行列式就可以按行(列)展开的方法对行列式进行降阶处理.