

好玩的数学

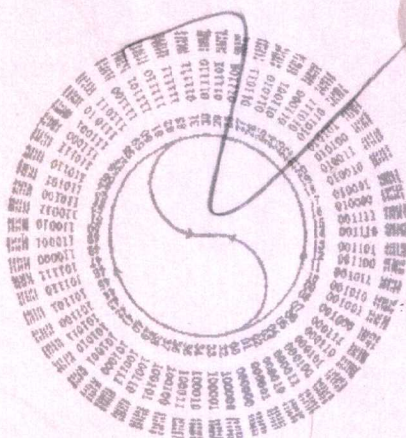
张景中 主编

陈仁政 著

不可思议的 e

对数是怎样发明的？对数为什么可以延长科学家的寿命？以 e 为底的对数为什么叫自然对数？为什么数学家们要用 e 作对数的底？ e 究竟是一个什么样的数……

跟书走吧，现在就出发，穿过快乐的河流，就会到达那“不可思议”的 e 的“老家”！



科学出版社

www.sciencep.com

好玩的

数学

张景中 主编

不可思议的 e

陈仁政_二著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书以生动活泼的形式,通俗地介绍了对数的发明和这一发明的重大意义,如何用它来解决实际问题,以及常用对数的诞生和应用。而更多的篇幅则留给了“主角”自然对数——它为什么和怎样在整个科学中大放异彩,为什么数学家们要用 e 作自然对数的底, e 究竟是一个什么样的数……

本书图文并茂,将人文精神融入“好玩的数学”以至整个科学之中,妙趣横生的情节引人入胜,让读者充分感受数学之真、之美、之乐、之用,适合于中等及以上文化的人阅读。

“跟我走吧”,现在就出发,穿过快乐的河流,就会到达 e 那“不可思议”的“老家”!

图书在版编目(CIP)数据

不可思议的 e /陈仁政著. —北京:科学出版社, 2005

(好玩的数学/张景中主编)

ISBN 7-03-015201-8

I. 不… II. 陈… III. 常数-普及读物 IV. O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第022163号

丛书策划:李 敏

责任编辑:李 敏 / 责任校对:宋玲玲

责任印制:钱玉芬 / 整体设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年4月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2005年4月第一次印刷 印张:21 3/4

印数:1—6 000 字数:243 000

定价:27.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(科印))

张景中|中国科学院院士 计算机科学家、数学家

1936年生于河南汝南。1959年毕业于北京大学数学力学系。1979年任教于中国科学技术大学，后曾任中国科学院成都数理科学研究室主任，成都计算机应用研究所副所长，名誉所长、博士生导师，四川师范大学计算机学院院长，广州大学教育软件研究所所长，中国数学会理事，中国计算机学会理事，中国科普作家协会理事长等。

张景中教授多年从事教学和研究工作，在自己的专业研究领域获得过中国科学院自然科学一等奖等多项奖项。他在教学研究工作之余热心科普事业。曾被评为建国以来贡献突出的科普作家。著有多种优秀科普作品，其中《教育数学丛书》获1995年中国图书奖；《数学家的眼光》等书（一套3册）获2003年第六届国家图书奖、五个一工程奖和全国科普创作一等奖。他还从事智能教育软件的研究，并提出智能教育平台的概念和结构设计，所主持开发的软件《Z+Z智能教育平台》获2000年香港国际发明博览会金奖。

陈仁政|中学高级 教师

1943年生于重庆，曾从事多科中学教学。在《数学通报》《中小学数学》《数学教学通讯》《物理通报》《物理教学》《中学物理教学参考》《物理教师》《中学物理》《中学物理教学》《物理实验与仪器》《物理教学探讨》《化学教学》《知识就是力量》《世界发明》《百科知识》《科学世界》《光明日报》《中国电子报》等40多种报刊上，发表过文章130多篇。出版过《站在巨人肩上》（丛书一套9册）等10多部专著；其中《站在巨人肩上》获2003年北方十五省市图书评奖的一等奖。曾在1979年主持发明中国第一块磁性教学板，发现电学中的“并阻定理”（载《物理教学》1995年第7期）等。

总 序

2002年8月在北京举行国际数学家大会(ICM2002)期间,91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词,写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗?不同的人可能有不同的看法。

有人会说,陈省身先生认为数学好玩,因为他是数学大师,他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说,数学枯燥,数学难懂,数学一点也不好玩。

其实,陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩,才兴致勃勃地玩个不停,才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以,小孩子也可能觉得数学好玩。

当然,中学生或小学生能够体会到的数学好玩,和数学家所感受到的数学好玩,是有所不同的。好比象棋,刚入门的棋手觉得有趣,国手大师也觉得有趣,但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味,理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物,很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道:“但得此中味,勿为醒者传”,不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学,要接触数学,或多或少地能理解一

些数学。

早在 2000 多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力：“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深

思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i} = 1$$

这里指数中用到的 π ，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第 2 个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e ，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用到的另一个数 i ，就是虚数单位，它的平方等于 -1 。谁能想到，这 3 个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π 》和《不可思议的 e 》，分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树禾教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回 三次方程闹剧获得公式解 神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树禾教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》，把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使

读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师加德纳 25 年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自 2002 年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的

方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等 40 余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第 37 节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少 $1024 - 4 = 1020$ 个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有 x 个，借给它们4个，成为 $x + 4$ 个。

5个猴子分别拿了 a, b, c, d, e 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a = (x + 4) / 5$$

$$b = 4(x + 4)/25$$

$$c = 16(x + 4)/125$$

$$d = 64(x + 4)/625$$

$$e = 256(x + 4)/3125$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以 $(x + 4)$ 应是 3125 的倍数，所以

$$(x + 4) = 3125k \quad (k \text{ 取自然数})$$

当 $k = 1$ 时， $x = 3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射-反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π 》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 355/113。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 355/113。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 355/113。后来，在夏道行教授所著《 π 和 e 》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 355/113，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi = 3.1415926535897\cdots$ ，可得 $|355/113 - \pi| < 0.00000026677$ ，如果有个分数 q/p 比 355/113 更接近 π ，一定会有

$$|355/113 - q/p| < 2 \times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p - 113q|/113p < 2 \times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 $355/113$ ，所以 $|355p - 113q|$ 不是 0。但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p < 2 \times 0.00000026677$$

由此推出

$$p > 1/(113 \times 2 \times 0.00000026677) > 16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，其分母 p 一定大于 16586。

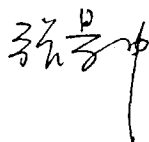
如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。



2004年9月9日

前 言

真理只是一颗纯洁的明珠，它虽然晶莹透亮，却仿佛比不上那些五颜六色的玻璃片。

——弗朗西斯·培根

1615年夏天，一辆马车在炎热的大地上向北日夜兼程——从英格兰的伦敦到苏格兰的爱丁堡。

由于意外事故，马车在路上耽误了时间。

一位焦急等待的贵族终于失望了：“咳！他不会来了。”

就在他失望之际，有人敲门了……

素不相识的两个人紧握双手、热烈拥抱、泪流满面，在沉默中凝视了一刻钟之久……

他们是谁？为何事“相知无远近”，浓情胜美酒，竟忘了“今夕是何年”？

1614年，梅尔契斯顿堡的贵族纳皮尔发明了对数，出版了《论对数的奇妙性》一书，成为当时轰动英伦三岛的新闻。伦敦格雷沙姆学院几何学教授布里格斯闻讯后，立即写信和他联系……

于是就有了上面的“隔行扫描”。

本书第一～三章，分别介绍对数的诞生、应用和趣事。第四章，谈论常用对数和自然对数的缘起，和

它们为什么会成为“科学明星”。第五~九章，重墨描绘自然对数在数学及其他学科中形形色色的应用，它的“本来面目”，五花八门的奇闻趣事，以及等待我们揭开的谜团雾障。最后的第十章，备有 e 的几种数表供你查询。不过有关 e 的知识是“说不尽”的，而我们相信， e 一定也是“好玩”的。

对数的发明，“使天文学家的寿命延长了一倍”。接着，无处不在的常用对数和自然对数大放异彩……

在《西厢记》中，中国元代戏曲作家王实甫这样描述黄河的作用：“滋洛阳千种花，润梁园万倾田，也曾泛浮槎到日月边。”对数，就是数学以至整个科学的“黄河”，它已经和将继续承载科学这只“浮槎”到浩瀚真理的“日月边”……

对数和相关发明，为数学和整个科学那万紫千红的百花园又增添了一朵朵绚丽的奇葩。今天，我们正在这花园中尽情地享受着阳光的温暖，但千万不能忘记科学先贤们经过坚忍不拔的努力建立的伟大功绩，千万不要“污染”他们挖掘的至今不息的汨汨泉流……

读完这本书，科学先贤们朝圣科学“麦加”那艰难而欢快的脚步声，数学以至整个科学那起伏跌宕而振聋发聩的潮声，一定会时时在我们耳边回响，永远激励着我们“在崎岖的小路上”向科学的高峰攀登……

国内某著名杂志的一位编辑在一封信中写道：“一流的科普佳作不但应科学性、通俗性、趣味性并举，还应传递出科学精神，即不但写出科学之趣之美，还应写出科学家的人性之美……”这和德国数学家

汉门·韦尔 (Hermann Weil, 1885~1955) 的“我的工作常想把真和美统一起来……”的说法相通。

汉门·韦尔接下去说：“但不得不在这两者之间选择时，我经常选择美。”而我们还要接下去说，当不得不在美和乐之间选择时，我们必定选择乐——“欢乐是人生的别名”嘛！

欢乐是人生的最高追求。科学家们之所以终生“苦苦”追求真善美——不惜宵衣旰食，甚至通宵达旦，……在于他们视这种追求为快乐，而且乐此不疲。当得到“1+2”的陈景润 (1933~1996) 住在 3m^2 的厕所里追求“1+1”的时候，他一定是快乐的。

单纯罗列丰富的科学知识、机械堆积翔实的科学史料、就科学写科学的作品，难以吸引“眼球”和有长久的生命力。只有那些熔科学知识、科学方法、科学精神等和人文精神于一炉，能培养人的全面素质——特别是健康的心理，让人赏心悦目、给人真正快乐的作品，才能“叫好又叫座”。只有具备生动故事情节和蕴涵深刻哲理的巨著才会穿破时空，广久流传。因为人们可以漠视一个观点，但却不会拒绝一个故事——特别是给人以快乐的故事。

要完成一个科普佳作，似乎唾手可得，实则决非易事，因此，如何创作出使青少年觉得快乐的、爱不释手的科普佳作 (和教科书) ——“胜过”他们迷恋的“网吧”那些“黄赌毒黑”，是国内作者 (和教育工作者) 永远探讨的课题和任重道远的任务，也是让青少年走出“网吧”的“治本”之道。

在这方面，苏联人别莱利曼（Яков Исидорович Перельман, 1882 ~ 1942）、美籍乌克兰人盖莫夫（George Gamow, 1904 ~ 1968）、美国人马丁·加德纳（Martin Gardner, 1914 ~）、美籍苏联人阿西莫夫（Isaac Asimov, 1920 ~ 1992）等世界顶级科普作家和中国的一些优秀科普作家，为我们树立了很好的榜样。

本书作者借“他山之石”，冒昧抛出这块“砖”，以就教于广大读者朋友的时候，就是企图引出读者和上述科普作家的“玉”。所以，敬请“公婆”们——广大读者和大方之家，不吝对这个“丑媳妇”指指点点、评头论足。

陈仁政

2005.02.15