

# 摄影测量与非摄影测量 观测值的联合平差

单 杰 编著

182

.1512

测绘出版社

# 摄影测量与非摄影测量 观测值的联合平差

单 杰 编著

测绘出版社

(京)新登字 065 号

### 内 容 简 介

本书讨论的核心是摄影测量与非摄影测量观测值联合平差的数学模型、算法和质量。主要包括：联合平差中非摄影测量观测值的数学模型及其误差；联合平差计算及其质量分析中的各种算法；卫星像片联合平差的数学模型及其计算方法；联合平差的质量特点及规律等。

本书可作为有关专业技术人员，以及研究生、高年级本科生参考用书。

### 摄影测量与非摄影测量观测值的联合平差

单 杰 编著

\*

测绘出版社出版·发行

北京大兴星海印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所经销

\*

开本 787×1092 1/16·印张 10·字数 220 千字

1993 年 6 月第一版·1993 年 6 月第一次印刷

印数：0 001—1 000 册·定价：10.50 元

ISBN 7-5030-0601-3/P·232

# 前 言

自 80 年代以来,摄影测量与非摄影测量观测值的联合平差(简称联合平差)一直是摄影测量数据处理的一个重要研究热点。它集解析空中三角测量几十年来取得的一系列精华成就与当代大地测量、卫星导航理论与技术、航天遥感测量理论与方法、近代统计理论与方法、数值计算理论与方法等于一体,成为当今解析空中三角测量研究与应用领域最为活跃、最具有吸引力的一个分支。

本书是在作者近几年从事摄影测量与非摄影测量观测值联合平差研究的基础上写成的。研究的核心是联合平差的数学模型、算法和质量。主要内容包括:在分析现有几种大地测量观测值数学模型的基础上,为联合平差提出了准三维大地测量模型;并从理论上分析了此模型误差及其对联合平差的影响;此外,还建立了其它非摄影测量观测值的数学模型。从稀疏矩阵技术的理论出发,分析比较了现有联合平差的各种算法,在此基础上提出了一整套联合平差的算法并予以实现。从人造地球卫星轨道理论及其计算出发,结合卫星摄影测量的特点,为卫星像片的联合平差建立了数学模型和算法。利用近代统计理论从理论上分析了联合平差的质量特点,同时用大量试验全面分析了联合平差的质量。

当今的科学发展一日千里。在可以预见的将来,联合平差的点位测定将成为各类地理信息系统的直接数据源,基于数字影像的解析空中三角测量也将成为现实。各类导航设备的发展与应用将给解析空中三角测量带来一场革命。所有这一切都已不再是目前联合平差这一概念所能包含的意义,但这恰恰又是摄影测量学科发展所赋予我们的使命。

在本书完稿之际,首先应该感谢引导我步入联合平差研究领域并在我的各个学习研究阶段给予谆谆教诲、循循诱导的王之卓教授、钱曾波教授和李德仁教授。他们严谨治学,甘为人梯,献身于自己用全身心所热爱的事业,没有他们的指导和帮助则不会有本书的面世。

感谢钱曾波教授受测绘出版社委托审阅了本书原稿并提出了宝贵的修改意见;感谢测绘出版社朱伟同志对本书的编辑和出版所付出的辛勤劳动;感谢测绘出版社及郑州测绘学院有关领导和同志对出版本书所给予的支持和帮助。

由于作者水平有限,书中难免有错误和不当之处,敬请读者批评指正。

作 者

1992 年 7 月于郑州

# 目 录

<b>第一章 联合平差概述</b> .....	( 1 )
第一节 解析空中三角测量发展中的主要成就.....	( 1 )
第二节 联合平差的概念和应用.....	( 2 )
第三节 联合平差的发展过程及现状.....	( 2 )
<b>第二章 联合平差的数学模型</b> .....	( 5 )
第一节 数学模型概述.....	( 5 )
第二节 大地测量观测值的简单模型.....	( 6 )
第三节 二维大地测量模型.....	( 9 )
第四节 三维大地测量模型.....	( 11 )
第五节 准三维大地测量模型.....	( 14 )
第六节 准三维大地测量模型的误差.....	( 26 )
第七节 利用 GPS 观测数据计算摄影站位置 .....	( 34 )
第八节 数字高程模型数据的数学模型.....	( 39 )
<b>第三章 联合平差的算法</b> .....	( 42 )
第一节 基本公式.....	( 42 )
第二节 数据结构.....	( 44 )
第三节 稀疏矩阵技术.....	( 47 )
第四节 未知数的最优排序与解算.....	( 51 )
第五节 法方程的构建与循环分块求解.....	( 58 )
第六节 法方程并行解算的一种排序方法 .....	( 64 )
第七节 精度矩阵 $Q_{xx}$ 的计算.....	( 65 )
第八节 可靠性矩阵 $Q_{vv}P$ 的计算 .....	( 67 )
第九节 重复计算可靠性矩阵 $Q_{vv}P$ 的逐次递归快速算法 .....	( 69 )
第十节 联合平差程序系统 WuCAPS 介绍.....	( 76 )
<b>第四章 卫星像片的联合平差及其计算</b> .....	( 80 )
第一节 概述.....	( 80 )
第二节 卫星运动的轨道方程.....	( 80 )
第三节 二体问题的基本关系式.....	( 85 )
第四节 卫星运动方程的数值解法.....	( 88 )
第五节 带轨道条件的光线束法平差的数学模型.....	( 93 )
第六节 摄动诸因素对轨道和平差结果的影响.....	( 100 )
第七节 卫星像片模拟数据制作原理.....	( 108 )



第八节 恒星像片姿态角计算的理论精度·····	( 113 )
<b>第五章 联合平差的质量</b> ·····	<b>( 116 )</b>
第一节 质量度量·····	( 116 )
第二节 联合平差的质量特点·····	( 120 )
第三节 摄影测量与大地测量观测值联合平差的质量分析·····	( 126 )
第四节 摄影测量观测值与导航数据联合平差的质量分析·····	( 137 )
第五节 联合平差研究实例·····	( 144 )
第六节 网的优化设计原理·····	( 148 )
<b>主要参考文献</b> ·····	<b>( 153 )</b>

# 第一章 联合平差概述

本章首先简要回顾了解析空中三角测量发展过程中的主要成就，着重总结了迄今为止国内外联合平差的发展过程、现状和存在的问题，最后简要介绍了本书的主要研究内容。

## 第一节 解析空中三角测量发展中的主要成就

长期以来，空中三角测量的主要任务是为地形图，特别是中、小比例尺地形图的测绘提供必要的控制基础。从 30 年代广泛使用的像片辐射三角测量到稍后的模拟空中三角测量以及 60 年代出现的解析空中三角测量，其最终目的都是如此。

随着电子计算机的迅速发展和广泛使用，解析空中三角测量已逐渐取代辐射三角测量和模拟空中三角测量，其在空中三角测量中的主导地位已经确定。

70 年代后期以来，解析空中三角测量的概念及目的有了重要的延拓，它不再仅仅局限于以测图为目的，而逐步发展到多用途的、高质量的点定位，并成为数据库的直接数据源之一。

近 30 年来，以区域网平差为核心的解析空中三角测量日趋完善，无论是在理论上还是在实用上都取得了极其丰硕的成就，归纳起来，主要有以下几个方面。

1. 建立并发展了以航带法、独立模型法和光线束法为典型代表的三种区域网平差方法。
2. 提出并完善了以循环分块法为典型代表的大规模法方程的解算方法。
3. 扩充了区域网平差的数学模型，使其能够处理各种机载设备如高差仪、测高仪、空中断面记录仪 (APR)、惯性导航系统和 GPS 接收机等所记录的观测数据。
4. 再次扩充了区域网平差的数学模型，提出以自检校为代表的补偿系统误差的平差方法。
5. 从理论上揭示了各种区域网平差方法的精度的内在规律，并建立了相应的精度模型。
6. 发展了以序贯算法为基本解算策略的在线解析空中三角测量。
7. 引入了大地测量中的可靠性理论，从理论上分析了摄影测量区域网的可靠性，并建立了相应的可靠性模型。
8. 提出了旨在区分不同类模型误差的可区分性理论，对区域网平差的可区分性有了初步认识。
9. 提出了摄影测量观测值与非摄影测量观测值联合平差（简称联合平差）和联合网的优化设计。

10. 提出了自动解析空中三角测量的概念, 这其中包括处理信息的数字化和区域网平差过程的智能化。

目前, 区域网平差正在向着联合平差和联合网的优化设计以及数字化和智能化方向发展, 并逐步深入到各类高精度的点位测定应用之中。

## 第二节 联合平差的概念和应用

联合平差是摄影测量点位测定精度不断提高, 各种辅助设备迅速发展并投入使用, 以及各学科、专业间相互渗透的必然结果。

联合平差是指以摄影测量观测值为主, 综合利用其它非摄影测量信息, 采用统一的数学模型和算法, 整体测定点位并对其质量进行评价的理论、技术和方法。

目前, 联合平差中可利用的非摄影测量信息主要包括两类, 即摄影机定向数据和大地测量观测数据。

联合平差的应用是多方面的:

与地面(大地)测量观测值的联合平差在地面(近景)摄影测量中有着广泛的应用, 渗透在诸如像机检校、变形测量、工业测量、工程测量等许多分支之中。

在荒僻地区的航空摄影测量任务中, 联合平差一直是提供测图控制点的有效方法。

在大比例尺城镇测量、地籍测量、工程测量中, 联合平差已成为最有潜力的、高效且高质量的点位测定手段。

在我国, 利用航空摄影测量方法进行大比例尺城镇测量和地籍测量也是极具意义的研究和应用领域。

在航天摄影测量中, 联合平差已成为一项必不可少的技术手段。

需要指出的是, 在相当长的一段时期内, 人们一直认为摄影机定向数据只能用于中、小比例尺测图加密。然而, 近期的试验结果表明, GPS 可以提供内精度为厘米级的摄站坐标, 这便为其用于大比例尺测图和精密点定位提供了可能。

从更一般的意义上讲, 各种信息的联合利用和处理在摄影测量和遥感中有着更加广泛的应用, 例如利用结构信息辅助的影像匹配, 以及 DTM 在改善遥感影像分类精度中的应用等等。

## 第三节 联合平差的发展过程及现状

在摄影测量中利用摄影机定向数据的历史要追溯到 50 多年以前。芬兰最早将高差仪和地平摄影机观测数据用于像片纠正以减少所需的地面控制点。不久, 这些观测数据又被用于模拟航带空中三角测量以控制模型连接误差的二次累积。二次大战以后, 人们的注意力又开始转向使用空中断面记录仪(APR)。但总的来说, 这些摄影机定向数据的实际效果是很有限的, 其精度还不能达到可在仪器上直接安置的水平。50 年代, 出现了机载无线电定位系统和惯性平台, 然而, 尽管这些装置集中了当时最先进的技术, 但精度仍然不高且成本十分



昂贵, 未能在摄影测量实践中广泛应用

在此后的 20 多年里, 处理摄影机定向数据的理论和方法发生了根本的改变。过去, 这些数据都是作为无误差的真值安置在仪器上的, 后来, 随着解析空中三角测量的发展, 它们不再作为真值而是作为具有一定误差的观测值参加平差计算。早在 1959 年, 美国的 Brown 就提出把摄影机定向数据通过虚拟观测值的方法以先验强制的形式参加平差计算; 1964 年, 他又系统地给出了在光束法平差中使用各种机载设备观测数据的数学模型; 随后, 1974 年 Brown 又对数学模型进行了扩展, 使其能够处理观测数据中的系统误差。至此, 利用摄影机定向数据的联合平差在理论上已具雏形。直到目前为止, 我们使用的仍是 Brown 给出的基本形式。

以 Brown 的理论方案为基础, 美国在 60 年代末对月球轨道飞行器的数据进行了平差计算, 并建立了月球控制网。1972 年, Stuttgart 大学摄影测量研究所在其独立模型法平差程序 PAT—M43 中, 采用平差方法对高差仪和 APR 数据进行了精确处理, 以节省高程控制点。另外, 许多程序系统 (如 PAT—M43、SPACE—M) 还顾及了湖面点的等高条件。

在摄影测量观测值与大地测量观测值的联合平差方面, Brown 也做了开拓性的工作。他首先提出将大地测量获得的距离观测值参加摄影测量网的平差计算。1972 年 Wong 和 Elphingstone 系统地提出了摄影测量和大地测量观测值联合平差的理论和方法。在他们编制的联合平差程序系统 SAPGO 中, 几乎可以接受所有的大地测量观测值。至此, 摄影测量与大地测量观测值联合平差的概念已初步形成。

在此后的近 10 年的时间里, 联合平差的研究进展缓慢, 特别是与摄影机定向数据的联合平差几乎不再被人们所问及, 这主要是由于摄影测量本身的定点精度还难以达到大地测量的水平、辅助设备的类型比较单一且精度低成本高。近来, 由于摄影测量在各类误差处理上的显著成效, 其定点精度有了明显改善, 另外还出现了多种高精度的机载导航设备, 联合平差再度引起国际摄影测量界的高度重视。

从 1984 年 Ackermann 报道利用 CPNS (计算机控制的像片导航系统) 数据进行联合平差的试验结果起, Schwarz(1984)、Lucas(1986)、Ackermann(1986)、Friess (1986)、李德仁等 (1989) 先后报道了利用 GPS 数据进行区域网平差的模拟试验结果, 从而从理论上对利用摄影机定向数据的区域网平差有了新的认识。1988 年 Ackermann 报道, 对实际 GPS 资料处理可以获得厘米级的摄影站坐标, 显然, 这是十分鼓舞人心的。

目前, 获取摄影机定向数据的机载设备正在从最早的一维记录 (APR 等) 到二维记录 (CPNS 等) 一直发展到目前的三维记录 (GPS), 从过去单一的导航系统发展到现在的组合导航系统。区域网联合平差的研究从简单的精度分析深入到理论上全面的质量分析。在应用上, 正在由为传统的测图提供控制发展为精密点定位, 特别是国外已经多次完成了带有 GPS 接收机的航摄飞行。我国学者在 1991 年也报道了利用 GPS 导航数据的解析空中三角测量试验。所有这一切都表明, 利用摄影机定向数据的联合平差正在从试验和模拟走向实用, 其对摄影测量的影响是强烈的, 至少在目前是一场小的技术革命。

进入 80 年代, 对与大地测量观测值的联合平差亦做了许多有益的研究。加拿大的 EL—Hakim 在 GEBAT 联合平差程序中引入了三维大地测量模型, 从而使联合平差较以

前的 SAPGO 方案建立在更严格的基础上。瑞典的 Larsson 在 1980 至 1984 年二次 ISP-RS 大会期间多次撰文介绍其联合平差程序系统 GENTRI 的设计思想,其主要工作旨在构造一套合适的算法。前联邦德国的 Kruck 设计了解算工程问题的光线束法联合平差程序系统 BINGO,其特点在于从图论的角度提出了一种新的未知数排序和求解方法,并且能够计算算法方程系数阵之逆阵的主要元素。

联合平差的进一步发展是联合网的优化设计。优化设计最初的研究是分析控制点粗差对区域网平差的影响。1986 年意大利的 Crosilla 首次将大地测量中网的优化设计理论应用到摄影测量中,研究了将区域网平差转换为优化设计的一级设计(FOD)和二级设计(SOD)问题的可能性。目前,这一理论正有待于应用到联合网优化设计的实际作业中。

更进一步的发展是联合平差的自动化,它包括处理信息的数字化和处理过程的智能化。以最小二乘相关为典型代表的影像匹配方法为联合平差乃至整个解析空中三角测量向数字化迈进提供了有效而可靠的途径。联合平差的智能化则须以对网的质量有充分的认识并积累一定的知识为基础。

国际摄影测量学界对联合平差给予了高度的重视。早在 1980 年就指出应对联合平差从理论和实践上进行研究,1984 年又做出决议成立专门的工作组(WG I/1),继续对联合平差及其质量评定进行研究,并对联合网的优化设计给予特别重视。工作组制定的三个研究专题为:

1. 为联合平差结果的质量构造准则;
2. 用模拟数据分析联合平差的质量;
3. 开发一系列软件用以完成联合网的设计和平差。

回顾几年来的工作,所做研究都是围绕以上专题进行的。

在与摄影机定向数据的联合平差方面,目前已从理论上进行了全面和详尽的研究,今后的工作主要是将其广泛地用于实际。这不仅依赖于摄影测量界的努力,而且更依赖于卫星大地测量及各类导航设备的发展。

在与大地测量观测值的联合平差方面,虽然近年来做了许多工作,但在理论和实用上仍感不足,对一些理论问题也存在不同的认识和空白,究其原因主要有以下几方面:

1. 缺乏适用于联合平差精密且实用的大地测量观测值的数学模型,而这是高精度联合平差的基本保证;
2. 缺乏有效的算法。这表现在联合平差的许多方面,特别是数据结构、法方程未知数的排序与求解、精度矩阵  $Q_{xx}$  和可靠性矩阵  $Q_{vv}P$  的有效计算等;
3. 对联合平差的质量及联合网的设计缺乏理论上的分析和认识;
4. 巨大的数据量和计算工作量。

本书后面的章节将系统总结和介绍摄影测量与非摄影测量观测值联合平差的主要内容,将联合平差建立在严密且实用的基础上,从理论和试验上分析联合平差的质量,为功能强、效率高的联合平差程序系统发展和设计相应的算法。讨论的核心内容是联合平差的数学模型、算法和质量,其中许多是作者近几年来从事联合平差研究的成果,另外也收入了国内外有关的最新成果。

## 第二章 联合平差的数学模型

建立联合平差中各类观测值的数学模型是进行联合平差的基础。由于摄影测量观测值的数学模型已有现成的形式，因此，本章主要讨论非摄影测量观测值的数学模型。第一节对数学模型进行概述，第二节至第六节讨论大地测量观测值的数学模型，最后两节分别讨论利用 GPS 观测数据计算摄影站位置和数字高程模型数据参加联合平差的数学模型。

### 第一节 数学模型概述

数学模型是指对某一客观事物的数学抽象和描述。在联合平差中，数学模型是指各类观测值与未知量之间所应满足的函数关系以及据此导出的平差计算赖以进行的误差方程。

众多不同的测量方法和手段获得的观测数据的同时处理，产生了许多在常规摄影测量中所不曾遇到的问题，联合平差的数学模型的建立便是其中之一，它是联合平差得以实现的基础，并且直接关系到联合平差实际实现的质量和效率。

数学模型的建立总是以一定的参考坐标系为基础的。现假定已选取了某一坐标系，在此坐标系基础上建立各类观测值的数学模型。

对于摄影测量观测值，有观测方程

$$L_p = F_p(X) \quad (2-1-1)$$

其中， $L_p$ 为摄影测量观测值向量；

$X$ 为待定未知参数向量；

$F_p$ 为  $X$  与  $L_p$ 之间的函数关系，即熟知的共线条件方程。

将 (2-1-1) 式线性化便得误差方程

$$V_p + L_p = \frac{dF_p}{dX} \Delta X + F_p(X^0) \quad (2-1-2)$$

其中， $X^0$ 为  $X$ 的近似值向量；

$\Delta X$ 为  $X^0$ 的改正数向量；

$V_p$ 为观测值  $L_p$ 的改正数向量。

类似地，对于地面控制点坐标观测值有观测方程

$$L_o = F_o(X) \quad (2-1-3)$$

误差方程

$$V_o + L_o = \frac{dF_o}{dX} \Delta X + F_o(X^0) \quad (2-1-4)$$

以上二式中,

- $L_o$ 为地面控制点观测值向量;
- $F_o$ 为 $X$ 与 $L_o$ 之间的函数关系;
- $V_o$ 为观测值 $L_o$ 的改正数向量。

对于大地测量观测值有

观测方程

$$L_o = F_o(X) \quad (2-1-5)$$

误差方程

$$V_o + L_o = -\frac{dF_o}{dX} \Delta X + F_o(X^0) \quad (2-1-6)$$

以上二式中,

- $L_o$ 为大地测量观测值向量;
- $F_o$ 为 $X$ 与 $L_o$ 之间的函数关系;
- $V_o$ 为观测值 $L_o$ 的改正数向量。

对于导航数据有

观测方程

$$L_N = F_N(X) \quad (2-1-7)$$

误差方程

$$V_N + L_N = -\frac{dF_N}{dX} \Delta X + F_N(X^0) \quad (2-1-8)$$

以上二式中,

- $L_N$ 为导航数据观测值向量;
- $F_N$ 为 $X$ 与 $L_N$ 间的函数关系;
- $V_N$ 为观测值 $L_N$ 的改正数向量。

所谓建立联合平差的数学模型,实际上即为确立上述各类观测值与未知参数之间的函数关系 $F_i (i = P、C、G、N)$ ,以及相应的误差方程式。

在许多应用情形里,各种非摄影测量观测值的数学模型中,未知参数的系数有绝大部分是零值,这使得此类观测值的数学模型具有十分简单的形式,从而为数值计算提供了方便。

需要说明的是,建立数学模型总是以一个(并且只能是一个)特定的坐标系为基础的。坐标系选择的不同,所建立的数学模型也会不同,相应的使用及计算的难易程度也会不同。从这一意义上讲,建立数学模型与选择坐标基础是密切相关的两个问题。以下各节将分别讨论联合平差的各种数学模型。

## 第二节 大地测量观测值的简单模型

在大地测量观测值的简单模型中,各种大地测量观测值均认为是在一空间直角坐标系

下获得的，平面观测量与高程观测量彼此完全无关，量测的地球表面视为一平面。这是一种理想的情形，也是大地测量观测量数学模型的最简单形式。以下分别给出各观测值的数学模型。

### 一、方位角 $\alpha_{ij}$

由图 2-2-1 知

$$\alpha_{ij} = \text{tg}^{-1} \frac{\Delta X_{ij}}{\Delta Y_{ij}} \quad (2-2-1)$$

其中， $\alpha_{ij}$  为  $i$ 、 $j$  两点连线方向的方位角；

$$\Delta X_{ij} = X_j - X_i$$

$$\Delta Y_{ij} = Y_j - Y_i$$

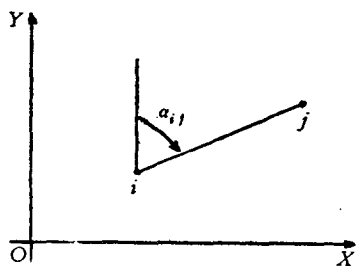


图 2-2-1 方位角

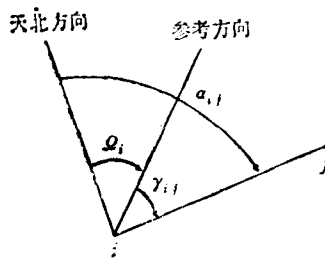


图 2-2-2 水平方向

将 (2-2-1) 式线性化，则有如下的误差方程式

$$V_{\alpha_{ij}} = -\frac{\Delta Y_{ij}}{l_{ij}^2} dX_i + \frac{\Delta X_{ij}}{l_{ij}^2} dY_i + \frac{\Delta Y_{ij}}{l_{ij}^2} dX_j - \frac{\Delta X_{ij}}{l_{ij}^2} dY_j - (\alpha_{ij}^0 - \alpha_{ij}^c) \quad (2-2-2)$$

其中， $l_{ij}^2 = \Delta X_{ij}^2 + \Delta Y_{ij}^2$  为  $i$ 、 $j$  两点水平距离的平方；

$\alpha_{ij}^0$  为方位角的观测值；

$\alpha_{ij}^c$  为由各未知参数近似值按 (2-2-1) 式算得的计算值。

### 二、水平方向 $\gamma_{ij}$

如图 2-2-2 所示， $\gamma_{ij}$  为方向观测值， $\Omega_i$  为未知的仪器的参考方向。将

$$\alpha_{ij}^0 = \Omega_i + \gamma_{ij}^0 = d\Omega_i + \Omega_i^0 + \gamma_{ij}^0$$

代入 (2-2-2) 式可得

$$V_{\gamma_{ij}} = -\frac{\Delta Y_{ij}}{l_{ij}^2} dX_i + \frac{\Delta X_{ij}}{l_{ij}^2} dY_i + \frac{\Delta Y_{ij}}{l_{ij}^2} dX_j - \frac{\Delta X_{ij}}{l_{ij}^2} dY_j - d\Omega_i - (\gamma_{ij}^0 + \Omega_i^0 - \alpha_{ij}^c) \quad (2-2-3)$$

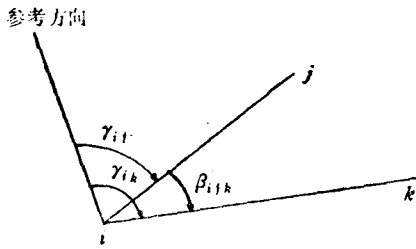


图 2-2-3 水平角

其中,  $\Omega_i^0$  为  $\Omega_i$  的近似值;

$d\Omega_i$  为  $\Omega_i^0$  的改正数, 在联合平差中其将作为未知数求解;

$\gamma_{ij}^0$  为水平方向观测值;

$\alpha_{ij}^0$  由各未知参数近似值按 (2-2-1) 式计算。

### 三、水平角 $\beta_{ijk}$

参见图 2-2-3, 可直接由 (2-2-3) 式写出水平角观测值的误差方程

$$\begin{aligned}
 V_{\beta_{ijk}} = & \left( \frac{\Delta Y_{ij}}{l_{ij}^2} - \frac{\Delta Y_{ik}}{l_{ik}^2} \right) dX_i + \left( \frac{\Delta X_{ik}}{l_{ik}^2} - \frac{\Delta X_{ij}}{l_{ij}^2} \right) dY_i \\
 & - \frac{\Delta Y_{ij}}{l_{ij}^2} dX_j + \frac{\Delta X_{ij}}{l_{ij}^2} dY_j + \frac{\Delta Y_{ik}}{l_{ik}^2} dX_k \\
 & - \frac{\Delta X_{ik}}{l_{ik}^2} dY_k - (\beta_{ijk}^0 - \beta_{ijk}^0)
 \end{aligned} \quad (2-2-4)$$

其中,  $\beta_{ijk}^0$  为水平角观测值。

$$\beta_{ijk}^0 = \text{tg}^{-1} \frac{\Delta X_{ik}}{\Delta Y_{ik}} - \text{tg}^{-1} \frac{\Delta X_{ij}}{\Delta Y_{ij}} \quad (2-2-5)$$

### 四、垂直角 $V_{ij}$

将 
$$V_{ij} = \text{tg}^{-1} \frac{\Delta Z_{ij}}{l_{ij}} \quad (2-2-6)$$

线性化后便有

$$\begin{aligned}
 V_{V_{ij}} = & \frac{\Delta X_{ij}}{s_{ij}^2} \cdot \text{tg} V_{ij} dX_i + \frac{\Delta Y_{ij}}{s_{ij}^2} \text{tg} V_{ij} dY_i \\
 & - \frac{l_{ij}}{s_{ij}^2} dZ_i - \frac{\Delta X_{ij}}{s_{ij}^2} \text{tg} V_{ij} dX_j - \frac{\Delta Y_{ij}}{s_{ij}^2} \text{tg} V_{ij} dY_j \\
 & + \frac{l_{ij}}{s_{ij}^2} dZ_j - (V_{ij}^0 - V_{ij}^0)
 \end{aligned} \quad (2-2-7)$$

其中,

$s_{ij}^2 = \Delta X_{ij}^2 + \Delta Y_{ij}^2 + \Delta Z_{ij}^2$ , 为  $i, j$  二点斜距的平方;

$V_{ij}^0$  为  $i, j$  二点的垂直角观测值;

$V_{ij}^0$  由各未知参数的近似值按 (2-2-6) 式计算。

### 五、距离 $s_{ij}$

$$s_{ij} = \sqrt{\Delta X_{ij}^2 + \Delta Y_{ij}^2 + \Delta Z_{ij}^2} \quad (2-2-8)$$

相应的误差方程式为



$$\begin{aligned}
 V_{s_{ij}} = & \frac{\Delta X_{ij}}{s_{ij}} dX_j + \frac{\Delta Y_{ij}}{s_{ij}} dY_j + \frac{\Delta Z_{ij}}{s_{ij}} dZ_j \\
 & - \frac{\Delta X_{ij}}{s_{ij}} dX_i - \frac{\Delta Y_{ij}}{s_{ij}} dY_i - \frac{\Delta Z_{ij}}{s_{ij}} dZ_i \\
 & - (s_{ij}^0 - s_{ij}^0)
 \end{aligned} \tag{2-2-9}$$

其中,  $s_{ij}^0$  为  $i$ 、 $j$  二点间的距离观测值;

$s_{ij}^0$  由各未知参数近似值按 (2-2-8) 式计算。

### 六、高差 $\Delta h_{ij}$

$$\Delta h_{ij} = Z_j - Z_i \tag{2-2-10}$$

$$V_{\Delta h_{ij}} = dZ_j - dZ_i - (\Delta h_{ij}^0 - \Delta h_{ij}^0) \tag{2-2-11}$$

其中  $\Delta h_{ij}^0$  由各未知参数近似值按 (2-2-10) 式计算;

$\Delta h_{ij}^0$  为  $i$ 、 $j$  二点的二差观测值。

## 第三节 二维大地测量模型

在常规大地测量中, 先将所有原始观测值经过运算归化到参考椭球面上, 尔后进行平差计算, 得到相对于参考椭球面的角度、距离、高程等平差值。这种处理通常是平面与高程分别进行的。二维大地测量模型就是将这些平差值作为观测值进行联合平差计算的数学模型。考虑摄影测量的实际情况, 在导出二维大地测量模型时假定联合平差在局部切平面坐标系中进行。

### 一、大地经纬度 $L$ 、 $B$ 和大地高 $H$

设局部切平面坐标  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  与大地坐标  $L$ 、 $B$ 、 $H$  的变换关系可以一般地记为

$$\left. \begin{aligned}
 L &= F_L(X, Y, Z) \\
 B &= F_B(X, Y, Z) \\
 H &= F_H(X, Y, Z)
 \end{aligned} \right\} \tag{2-3-1}$$

其中  $L$ 、 $B$ 、 $H$  为点的大地经纬度和大地高。

对 (2-3-1) 式线性化则有误差方程式

$$\left. \begin{aligned}
 V_L &= \frac{\partial F_L}{\partial X} dX + \frac{\partial F_L}{\partial Y} dY + \frac{\partial F_L}{\partial Z} dZ - (L^0 - L^0) \\
 V_B &= \frac{\partial F_B}{\partial X} dX + \frac{\partial F_B}{\partial Y} dY + \frac{\partial F_B}{\partial Z} dZ - (B^0 - B^0) \\
 V_H &= \frac{\partial F_H}{\partial X} dX + \frac{\partial F_H}{\partial Y} dY + \frac{\partial F_H}{\partial Z} dZ - (H^0 - H^0)
 \end{aligned} \right\} \tag{2-3-2}$$

其中,

$dX$ 、 $dY$ 、 $dZ$  分别为  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  的改正数；

$L^{00}$ 、 $B^{00}$ 、 $H^{00}$  为观测值；

$L^0$ 、 $B^0$ 、 $H^0$  由  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  的近似值按 (2-3-1) 式计算。

## 二、大地高差 $\Delta H_{ij}$

大地高差为二个大地高之差  $\Delta H_{ij} = H_j - H_i$  (2-3-3)

误差方程式为

$$V_{\Delta H_{ij}} = -\frac{\partial F_H}{\partial X_j} dX_j + \frac{\partial F_H}{\partial Y_j} dY_j + \frac{\partial F_H}{\partial Z_j} dZ_j - \frac{\partial F_H}{\partial X_i} dX_i - \frac{\partial F_H}{\partial Y_i} dY_i - \frac{\partial F_H}{\partial Z_i} dZ_i - (\Delta H_{ij}^{00} - \Delta H_{ij}^0) \quad (2-3-4)$$

其中， $\Delta H_{ij}^{00}$  为观测值；

$\Delta H_{ij}^0$  由  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  之近似值按 (2-3-1) 和 (2-3-3) 式计算。

## 三、大地方位角 $\alpha_{ij}$

设  $\alpha_{ij}$  为测站  $i$  到测站  $j$  的大地方位角，由经典大地测量可得用大地坐标表示的误差方程为

$$V_{\alpha_{ij}} = a_{ij} M_i dB_i - b_{ij} N_i \cos B_i dL_i + c_{ij} M_j dB_j - f_{ij} N_j \cos B_j dL_j - (\alpha_{ij}^{00} - \alpha_{ij}^0) \quad (2-3-5)$$

其中，

$$a_{ij} = \frac{\sin \alpha_{ij}}{s_{ij}}, \quad b_{ij} = \frac{\cos \alpha_{ij}}{s_{ij}} \quad (2-3-6)$$

$$c_{ij} = \frac{\sin \alpha_{ij}}{s_{ij}}, \quad f_{ij} = \frac{\cos \alpha_{ij}}{s_{ij}}$$

$N$ 、 $M$  为卯酉圈和子午圈曲率半径，其值按本章第五节 (2-5-7) 式计算；

$s_{ij}$  为  $i$ 、 $j$  二点间大地线的长度；

$\alpha_{ij}^{00}$  和  $\alpha_{ij}^0$  分别为大地方位角的观测值和计算值。

将  $dL$ 、 $dB$ 、 $dH$  的微分关系式代入 (2-3-5)，则得用切平面直角坐标表示的误差方程

$$V_{\alpha_{ij}} = \left( a_{ij} M_i \frac{\partial F_B}{\partial X_i} - b_{ij} N_i \frac{\partial F_L}{\partial X_i} \cos B_i \right) dX_i + \left( a_{ij} M_i \frac{\partial F_B}{\partial Y_i} - b_{ij} N_i \frac{\partial F_L}{\partial Y_i} \cos B_i \right) dY_i + \left( a_{ij} M_i \frac{\partial F_B}{\partial Z_i} - b_{ij} N_i \frac{\partial F_L}{\partial Z_i} \cos B_i \right) dZ_i + \left( c_{ij} M_j \frac{\partial F_B}{\partial X_j} - f_{ij} N_j \frac{\partial F_L}{\partial X_j} \cos B_j \right) dX_j + \left( c_{ij} M_j \frac{\partial F_B}{\partial Y_j} - f_{ij} N_j \frac{\partial F_L}{\partial Y_j} \cos B_j \right) dY_j$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( c_{i,j} M_j \frac{\partial F_B}{\partial Z_j} - f_{i,j} N_j \frac{\partial F_L}{\partial Z_j} \cos B_j \right) dZ_j \\
 & - (\alpha_{i,j}^0 - \alpha_{i,j}^1)
 \end{aligned} \tag{2-3-7}$$

#### 四、水平角 $\beta_{i,j,k}$

水平角  $\beta_{i,j,k}$  可以表示为大地方位角  $\alpha_{i,k}$  和  $\alpha_{i,j}$  之差, 即

$$\beta_{i,j,k} = \alpha_{i,k} - \alpha_{i,j} \tag{2-3-8}$$

将 (2-3-7) 式代入 (2-3-8) 式则有如下的误差方程

$$\begin{aligned}
 V_{\beta_{i,j,k}} = & \left[ (\alpha_{i,k} - \alpha_{i,j}) \cdot M_i \frac{\partial F_B}{\partial X_i} - (b_{i,k} - b_{i,j}) \cdot N_i \cos B_i \frac{\partial F_L}{\partial X_i} \right] dX_i \\
 & + \left[ (\alpha_{i,k} - \alpha_{i,j}) \cdot M_i \frac{\partial F_B}{\partial Y_i} - (b_{i,k} - b_{i,j}) N_i \cdot \cos B_i \frac{\partial F_L}{\partial Y_i} \right] dY_i \\
 & + \left[ (\alpha_{i,k} - \alpha_{i,j}) \cdot M_i \frac{\partial F_B}{\partial Z_i} - (b_{i,k} - b_{i,j}) N_i \cdot \cos B_i \frac{\partial F_L}{\partial Z_i} \right] dZ_i \\
 & - \left[ c_{i,j} M_j \frac{\partial F_B}{\partial X_j} - f_{i,j} N_j \cos B_j \frac{\partial F_L}{\partial X_j} \right] dX_j \\
 & - \left[ c_{i,j} M_j \frac{\partial F_B}{\partial Y_j} - f_{i,j} N_j \cos B_j \frac{\partial F_L}{\partial Y_j} \right] dY_j \\
 & - \left[ c_{i,j} M_j \frac{\partial F_B}{\partial Z_j} - f_{i,j} N_j \cos B_j \frac{\partial F_L}{\partial Z_j} \right] dZ_j \\
 & + \left[ c_{i,k} M_k \frac{\partial F_B}{\partial X_k} - f_{i,k} N_k \cos B_k \frac{\partial F_L}{\partial X_k} \right] dX_k \\
 & + \left[ c_{i,k} M_k \frac{\partial F_B}{\partial Y_k} - f_{i,k} N_k \cos B_k \frac{\partial F_L}{\partial Y_k} \right] dY_k \\
 & + \left[ c_{i,k} M_k \frac{\partial F_B}{\partial Z_k} - f_{i,k} N_k \cos B_k \frac{\partial F_L}{\partial Z_k} \right] dZ_k \\
 & - (\beta_{i,j,k}^0 - \beta_{i,j,k}^1)
 \end{aligned} \tag{2-3-9}$$

其中,  $\beta_{i,j,k}^0$  为水平角观测值;  $\beta_{i,j,k}^1$  按 (2-3-8) 式计算。

以上给出了二维大地测量模型的基本公式。需要说明的是, 它们是以 (2-3-1) 式为基础的, 而这一函数没有简单的显式形式, 因此, 计算往往需要迭代, 各偏导数的计算也要采用数值微分的方法, 这使得二维大地测量模型有较多的计算量。

### 第四节 三维大地测量模型

三维大地测量模型从原始的大地测量观测值出发, 利用测站直角坐标系作为过渡, 建立观测值与点位坐标的函数关系, 它无需对原始观测值进行任何归化, 并且对所测量的地球表面可以不做几何形状上的限制。因此, 从理论上讲, 三维大地测量模型是大地测量观