21世纪高等学校经济管理类教材

管理运筹学

GUANLI YUNCHOUXUE

李　军
杨纬隆　编著

华南理工大学出版社

21 世纪高等学校经济管理类教材

管理运筹学

李　军　杨纬隆　编著

华南理工大学出版社
·广州·

内容简介

本书系统地阐述了运筹学各主要分支的理论与方法，用大量的案例介绍了各种运筹学模型的构建、求解及其在实际中的应用.全书共分11章，即绪论、线性规划、线性规划的对偶理论、运输问题、整数规划、非线性规划、动态规划、存贮论、图论、排队论和对策论，覆盖了经济管理类教材会议修订的“运筹学”大纲规定的基本内容.

本书着重介绍运筹学的基本原理和方法，注重理论与实践的紧密结合，对知识的论述强调经济学上的逻辑关系和经济内涵，避免为追求所谓的严密而进行的纯数学的论证，把数学的应用保持在中等水平上.

本书可作为普通高校各专业本科生和研究生学习运筹学的教材，也可以作为企业工程技术人员和管理人员培训的教材或自学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

管理运筹学/李军，杨纬隆编著.—广州：华南理工大学出版社，2005.2
ISBN 7-5623-2173-6

Ⅰ.管…　Ⅱ.①李…②杨…　Ⅲ.管理学：运筹学　Ⅳ.C931.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第140380号

总 发 行：华南理工大学出版社(广州五山华南理工大学17号楼，邮编510640)
发行部电话：020-87113487　87111048(传真)
E-mail：scut 202@scut.edu.cn　　http://www.scut press.com
责任编辑：赵　鑫
印 刷 者：广东省阳江市教育印务公司
开　　本：787×1092　1/16　**印张**：14.75　**字数**：368千
版　　次：2005年2月第1版第1次印刷
印　　数：1～5 000册
定　　价：23.50元

前　言

随着世界经济的一体化,企业所处的环境变化越来越快,市场竞争也越来越激烈,企业运营充满着无穷的变数与风险,生存与发展的不确定性正在迅速增加,因此,企业必须能够及时地对所面临的机遇与挑战作出科学的决策.要作出正确的决策,就要求企业家、高层管理者、基层管理者和工程技术人员能够驾驭科学决策技术,有效地解决生产经营中所出现的各种实际问题.

目前,运筹学在经济管理活动中应用的广度和深度令人吃惊,其地位越来越重要,对科学决策的关键作用也越来越显著.运筹学提供的决策方法和技术,不仅可以帮助企业解决战术层面上的问题,以降低成本或提高利润,而且可以帮助企业解决战略层面上的问题,使企业建立并保持长久的竞争优势.运筹学的基本理论和方法已是广大管理人员和工程技术人员所必须掌握的基础知识之一.

高等教育从精英教育转向大众教育,作为专业基础课程的运筹学教学面临着巨大的挑战.在不降低运筹学教学质量的前提下,如何从实际需要出发构建运筹学教学新体系以适应大众教育的需要,是摆在运筹学教育工作者面前的一个新课题.在吸收众家之长的基础上,编者结合多年运筹学教学所积累的经验,构建了运筹学教学新体系,针对教学中学生普遍存在的难点问题,对相关知识进行了全新的论述并充实了一定量的案例,充分体现了教材编著过程中的以人为本的新理念.

本书作为运筹学教学的基础性教材,没有过多涉猎通常教材中所包含的超"运筹学"大纲的内容,目的是空出版面以增加案例的数量和案例分析、求解的详细程度,更好地满足读者的需要.运筹学需要大量微积分、线性代数、概率论与数理统计等高等数学的知识作基础,本书始终把数学的应用保持在中等水平,对知识的论述强调经济学上的逻辑关系和经济内涵,避免为追求所谓的严密而对一些运筹学理论和方法进行复杂的纯数学的论证,解决了学生长期以来运筹学课程难学、运筹学教材难懂的问题.

全书共分 11 章,其中带有"*"号的第 6 章(非线性规划)、第 8 章(存贮论)、第 10 章(排队论)和第 11 章(对策论)属运筹学Ⅱ的范畴,读者可按自身的具体情况作为一般了解的内容选用.运筹学Ⅰ的授课时数为 72 学时,上机实验时数为 8 学时.全书由李军教授和杨纬隆副教授合作完成,李军负责 1~9 章的编著和全书的结构设计及最终的统稿工作,杨纬隆负责 10~11 章的编著工作.

本书在编著过程中参考了大量国内外的图书文献,吸收了参考文献中大量

的营养成分，丰富的营养是本书健康诞生所不可缺少的；此外，多方的关心和支持也是圆满完成本书编著工作的重要保证.在此，对提供意见和建议的专家、学者，以及所有参考文献的作者表示衷心的感谢.希望通过我们的共同努力，提高运筹学教学的质量，使运筹学在管理教育事业中发挥更加积极的作用.

由于受编者知识水平和学术视野的局限，书中难免存在一些这样或那样的缺点和不足，热忱欢迎广大读者批评指正.

编　者

2004年12月

目　录

1 绪 论

1.1 运筹学的产生与发展

任何一门学科或理论都是为解决一些客观实际问题而出现并得以发展的，为了更好地理解和掌握今天的运筹学，有必要首先了解一下运筹学发展的简史.虽然一定的运筹学思想和方法在很久以前已留下了被应用的痕迹，历代先驱所做的一些工作今天看来也具有一定的运筹学性质，但这些零散的活动还不足以标志作为系统知识体系的一门新学科的诞生.运筹学的产生可以说很难有一个明确的时间界定，目前国际上比较公认的观点是运筹学产生于第二次世界大战前后.1937年，英国部分科学家被邀请去帮助皇家空军研究雷达的部署和运作问题，目的在于最大限度地发挥有限雷达的效用，以应对德军的空袭.1938年，波德塞(Bawdsey)雷达站的负责人罗伊(A.B.Rowe)提出了优化防空作战系统运行的问题，并用“Operational Research”一词作为对这一方面研究的描述，这就是直至今日我们仍然将运筹学称为“O.R.”的历史由来.1939年，从事此方面问题研究的科学家被召集到英国皇家空军指挥总部，成立了一个由布莱开特(P.M.S.Blacket)领导的军事科技攻关小组；由于其成员学科性质的多样性，这一最早成立的军事科技攻关小组被戏称为“布莱开特马戏团”.由于“布莱开特马戏团”的活动是第一次有组织的系统的运筹学活动，所以后人将该小组的成立作为运筹学产生的标志.此后，O.R.小组的活动范围不断扩大，从最初的仅限于空军，逐步扩展到海军和陆军；研究内容也从对军事战术性问题的研究，逐步扩展到对军事战略性问题的研究.由于科学家的天赋、战争的需要以及不同学科的交互作用，这一军事科技攻关小组在提高军事运筹水平方面取得了惊人的成功，这使得运筹学在整个军事领域迅速传播，到1941年，英国皇家陆、海、空三军都成立了这样的科学小组.比较典型的论题包括雷达布置策略、反空袭系统控制、海军舰队的编制和对敌潜艇的探测等.O.R.小组的巨大成就所显示出的神奇力量，促使其他盟军也纷纷效仿，建立了自己的研究小组.以美国为代表的一些英语国家称这类研究小组的工作为“Operations Research”.

二战后，许多从事运筹小组活动的科学家将其精力转向对早期仓促建立起来的运筹优化技术进行加工整理，探索应用运筹学思想和方法解决社会经济问题的可能性.首先接纳运筹学的非军事组织是一些效益较好的大公司，如石油公司和汽车公司.“大商业”领导运筹学应用的新潮流是很自然的事，因为虽然当时运筹学可以为任何一个经济组织提供获得竞争优势的方案，但由于运筹学还处于起步的基础研究时期，只有大公司才能承担起运筹学研究的巨大费用.后来，随着运筹学思想和方法的积累与程序化，不用太大的投入就能从沉淀的知识中受益，运筹学才得到了广泛的应用.计算机的普及与发展是推动运筹学迅速发展的巨大动力.没有现代计算机技术，求解复杂的运筹学模型是不可设想的，也是不实际的.运筹学实践反过来又促进了计算机技术的发展，它不断地对计算机提出内存更大、运行速度更快的要求.可以说，运筹学在过去的半个多世纪里，既得益于计算机技术的应用与发

展,同时也极大地促进了计算机技术的发展.

20 世纪 50 年代,运筹学理论、方法及其活动发展到了一个新的水平,运筹学开始成为一门独立的学科,其标志是大量运筹学学会的创建和相应期刊的问世.继 1948 年英国创立运筹学学会之后,美国运筹学学会于 1952 年成立,它的宗旨是满足运筹学研究领域的科学家相互交流的需要,以促进 O.R. 理论与实践的发展. 1953 年,美国又成立了管理科学研究所.美国运筹学学会和管理科学研究所两个组织所创办的刊物《运筹学》和《管理科学》将许多零散的研究成果系统化,为构建运筹学新学科的知识体系作出了突出的贡献.在 1956 年至 1959 年短短的几年里,先后就有法国、印度、日本等十几个国家成立了运筹学学会,并有 6 种运筹学期刊问世. 1957 年,在英国牛津大学召开了第一届运筹学国际会议. 1959 年,成立了国际运筹学学会(International Federation of Operations Research Societies, IFORS).截止到 1986 年,国际上已有 38 个国家和地区成立了运筹学学会或类似的组织.

20 世纪 60 年代以来,运筹学得到了迅速的普及和发展.运筹学细分为许多分支,许多大专院校把运筹学的规划理论引入本科教学课程,把规划理论以外的内容引入硕士、博士研究生的教学课程.运筹学的学科划分没有统一的标准,在工科学院、商学院、经济学院和数理学院的教学中都可以发现它的存在.

20 世纪 50 年代中期,我国从西方引入运筹学,最初曾根据英文"Operational Research"和"Operations Research"直译为"运用学". 1957 年,从"运筹帷幄之中,决胜千里之外"这句古语中摘取"运筹"二字,将 O.R. 正式命名为"运筹学",比较恰当地反映了这门学科的性质和内涵.我国第一个运筹学小组于 1956 年在中国科学院力学研究所成立,1958 年成立了运筹学研究室;1960 年,在济南召开了全国应用运筹学的经验交流和推广会议;1962 年和 1978 年,先后在北京和成都召开了全国运筹学学术会议;1980 年,中国运筹学学会正式成立.我国各高等院校,特别是经济管理类专业已普遍把运筹学作为一门专业的主干课程列入教学计划.运筹学在我国虽然起步较晚,但发展却非常迅速,目前我国运筹学的研究和应用已跟上了世界时代的步伐.

1.2 运筹学的内涵

运筹学是一门具有多学科交叉特点的边缘学科,至今还没有一个统一的定义.或许运筹学的定义迟早会确定下来,但是目前要排除任何一种解释还是不成熟的.下面提出几种有代表性的解释,以说明运筹学的性质和特点.

美国运筹学学会提出的定义为:"Operations Research is concerned with scientifically deciding how to best design and operate man-machine systems, usually under conditions requiring the allocation of scarce resources."

英国运筹学学会提出的定义为:"Operational Research is the application of the methods of science to complex problems arising in the direction and management of large systems of men, machines, materials and money in industry, business, government, and defense. The distinctive approach is to develop a scientific model of the system, incorporating measurements of factors such as chance and risk, with which to predict and compare the outcomes of alternative decisions, strategies or controls. The purpose is to help management determine its policy and actions scientifically."

莫斯(P. M. Morse)和金博尔(G. E. Kimball)提出的定义为:"为决策机构对其控制下的业务活动进行决策,提供数量化基础的科学方法."

我国《辞海》(1979年版)中有关运筹学条目的释义为:"运筹学主要研究经济活动与军事活动中能用数量来表达的有关运用、筹划与管理方面的问题,它根据问题的要求,通过数学的分析与运算,作出综合性合理安排,以达到较经济有效地使用人力物力."

《中国企业管理百科全书》(1984年版)中的释义为:"应用分析、试验、量化的方法,对经济管理系统中人、财、物等有限资源统筹安排,为决策者提供有依据的最优方案,以实现最有效的管理."

综合以上种种定义,本书从直观、明了的角度将运筹学定义为:"通过构建、求解数学模型,规划、优化有限资源的合理利用,为科学决策提供量化依据的系统知识体系."

1.3 运筹学模型

运筹学的实质在于建立和使用模型.尽管模型的具体结构和形式总是与其要解决的问题相联系,但应当抛弃模型在外表上的差别,从最广泛的角度抽象出它们的共性.**模型**在某种意义上说是客观事物的简化与抽象,是研究者经过思维抽象后用文字、图表、符号、关系式以及实体模样对客观事物的描述.不加任何假设和抽象的系统称为**现实系统**,作为研究对象的系统来说,总是要求求解一定的未知量并给出相应的结论,求解过程如图1-1所示.图中左侧的虚线表示了人们最直接的目标,右侧的实线表示了这一目标的具体实现路径.

模型有三种基本类型,即形象模型、模拟模型和数学模型.运筹学模型主要是指数学模型.构造模型是一种创造性劳动,成功的模型是科学和艺术的综合体,其构造过程是一系列的简化、假设和抽象.在模型中,现实系统的哪些方面可以忽略、哪些方面应该合并、可以作哪些假设以及模型应构造成什么形式等,都是该阶段需要回答的问题.在构造模型中常用的假设包括两方面的内容:一方面是离散变量的连续性假设,另一方面是非线性函数关系的线性假设.很显然,构造模型阶段具有一定的主观性,在某种意义上说,面对同样的现实系统,不同的人能构造出完全不同的模型,而它们之间可能并无优、劣之别.当然,这并非意味着根本不存在区分好、坏模型的客观标准,也并非说明模型的效用与模型的建立过程无关.虽然对具体的模型可能会有许多特殊的标准,但是总的来说,模型的好坏决定于其对实现系统目标的实用性.

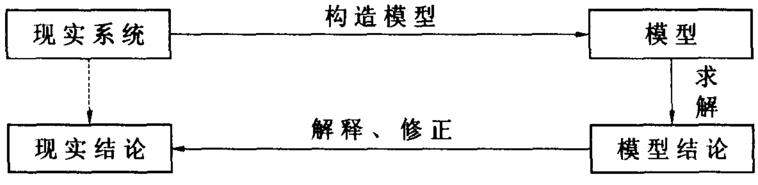

图1-1 运筹学的工作过程

既然运筹学模型主要是指数学模型,那么什么是数学模型呢?**数学模型**可以简单地描述为:"用字母、数字和运算符来精确地反映变量之间相互关系的式子或式子组."数学模型由**决策变量**、**约束条件**和**目标函数**三个要素构成.决策变量即问题中所求的未知的量,约束

条件是决策所面临的限制条件，目标函数则是衡量决策效益的数量指标.

1.4 运筹学的工作步骤

运筹学作为解决有限资源合理利用问题的系统的科学方法，具有其固有的工作步骤，现将这一步骤概括如下：

(1)提出和形成问题.即要弄清问题的目标、可能的约束、可控变量、有关的参数以及搜集有关信息资料.

(2)建立模型.即把问题中的决策变量、参数和目标、约束之间的关系用一定的模型表示出来.

(3)求解模型.根据模型的性质，选择相应的求解方法，求得最优或满意解，解的精度要求可由决策者提出.

(4)解的检验与转译.首先检查求解过程是否有误，然后再检查解是否反映客观实际.如果所得之解不能较好地反映实际问题，必须返回第(1)步修改模型，重新求解；如果所得之解能较好地反映实际问题，也必须仔细将模型结论转译成现实结论.

(5)解的实施.实施过程必须考虑解的应用范围及对各主要因素的敏感程度，向决策者讲清解的用法，以及在实施中可能产生的问题和修改的方法.

思考题

1. 试述运筹学的内涵.
2. 试述运筹学的工作过程.
3. 试述数学模型及其三要素.

2 线性规划

线性规划(Linear Programming, 简记为 LP)是运筹学的一个重要分支.自 1947 年丹捷格(G.B.Dantzig)提出了线性规划问题求解的一般方法(单纯形法)之后,线性规划在理论上日益趋向成熟,在实践中日益广泛和深入.特别是在计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后,线性规划的适用领域更是迅速扩大.线性规划在工业、农业、商业、交通运输、军事、经济计划和管理决策等领域都可以发挥重要的作用,它已是现代科学管理的重要手段之一.

2.1 线性规划的数学模型

规划问题总是与有限资源的合理利用分不开的.这里的"有限资源"是一个广义的概念,它可以是劳动力、原材料、机器设备、资本、空间等有形的事物,也可以是时间、技术等无形的事物;这里的"合理利用"通常是指费用最小或利润最大.下面通过几个案例来反映线性规划的数学模型.

例 2-1 资源合理利用问题.

某工厂在某一计划期内准备生产甲、乙两种产品,生产需要消耗 A,B,C 三种资源.生产每件产品对各种资源的消耗量、工厂拥有各种资源的数量以及每件产品所能获得的利润如表 2-1 所示,试建立该问题的数学模型,以使计划期内的生产获利最大.

表 2-1

资　源	单位产品资源消耗量		资源拥有量
	甲	乙	
A	1	2	8
B	4	0	16
C	0	4	12
单位产品利润	2	3	

解 建立模型.

设决策变量 x_1 和 x_2 分别表示在计划期内产品甲、乙的产量,此模型的约束条件为三种资源对生产的限制,即在确定甲、乙两种产品产量时,要考虑对三种资源的消耗不超过其拥有量.资源 A 的拥有量是 8 个单位,生产一件甲、乙产品需要资源 A 分别为 1 和 2 个单位,那么生产 x_1 件甲产品、x_2 件乙产品消耗资源 A 的总数为 x_1+2x_2,因此,资源 A 的约束可用不等式表示为

$$x_1+2x_2\leqslant 8.$$

同理,资源 B 和资源 C 的约束可用两个不等式表示为

$$4x_1 \leqslant 16,$$

$$4x_2 \leqslant 12.$$

该工厂的目标是在不超过所有资源限量的条件下,确定甲、乙两种产品的产量,以获得最大的利润.因此,此问题的目标函数可表示为 $\max\ z = 2x_1 + 3x_2$.综合数学模型的三要素,该问题的数学模型可表示为

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}.$$

例 2-2 质量检验问题.

某公司有备选一级质检人员 8 名,二级质检人员 10 名.该公司每天(按 8 小时计算)至少有1 800个工件需要质量检验,一级质检人员每小时可检验工件 25 个,检验的准确率为 98%,每小时的工资为 4 元;二级质检人员每小时可检验工件 15 个,检验的准确率为 95%,每小时的工资为 3 元.质检人员每出现一次错检,将给公司造成 2 元的经济损失.问公司应安排多少名一级、二级质检人员从事质检工作,才能使质量方面的花费最小?

解 设决策变量 x_1 和 x_2 分别表示安排质检的一级、二级质检人员的数量,此模型的约束条件为一级、二级质检人员总数的限制和每日需要检验的工件总量的限制.于是,约束条件可表示为不等式组

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 10 \\ 5x_1 + 3x_2 \geqslant 45 \end{cases}.$$

该公司的目标是使质量控制方面的花费最小,而质量控制方面的费用包括检验人员的工资和错检所造成的损失两部分.因此,目标函数可表示为 $\min\ z = 40x_1 + 36x_2$.综合数学模型的三要素,该问题的数学模型可表示为

$$\min\ z = 40x_1 + 36x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 10 \\ 5x_1 + 3x_2 \geqslant 45 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}.$$

线性规划数学模型的共同特征:

(1) 用一组决策变量表示某一方案,这组决策变量均为非负的连续变量;

(2) 存在一定数量(m)的约束条件,这些约束条件可以用关于决策变量的一组线性等式或线性不等式来加以表示;

(3) 有一个可以用决策变量加以表示的目标函数,而该函数是一个线性函数.

满足以上三个条件的数学模型称为线性规划数学模型,其一般形式可表示为

$$\max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_m \\ \quad x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

线性规划数学模型的一般形式也可以用矩阵向量表示为

$$\max(\min) z = \boldsymbol{CX}$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} \leqslant (=,\geqslant) \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 阶技术系数矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 $m \times 1$ 阶资源系数矩阵(列向量)，$\boldsymbol{C}$ 是 $1 \times n$ 阶价值系数矩阵(行向量)，$\boldsymbol{X}$ 是 $n \times 1$ 阶决策变量矩阵(列向量).

2.2 线性规划的图解法

上一节列举了两个把实际问题构造成线性规划数学模型的例子，初步解决了模型构造问题. 如何求解数学模型以获得问题的最优解自然成为本节关心的焦点.

从简单到复杂、从具体到抽象是人类认识客观事物的一般过程，首先讨论用图解法解决只包含两个变量的线性规划问题正是尊重人类认识规律的具体体现. 虽然在实际问题中只有两个决策变量的小问题是很少见的，但图解法能揭示线性规划问题解的一些基本概念，并为解决大规模线性规划问题提供原则性的指导.

图解法顾名思义是通过绘图来达到求解线性规划问题这一目的的. 在介绍图解法的具体步骤前，先明确一些有关线性规划问题解的概念.

决策变量的一组取值便构成了线性规划问题的一个**解**；满足约束条件(包括资源约束和非负约束)的解称为**可行解**；所有可行解构成的集合称为**可行域**；使目标函数达到所追求极值的可行解称为**最优解**；最优解所对应的目标函数值称为**最优值**.

例 2-3 用图解法求解例2-1.

解 第一步：构造平面直角坐标系(由于决策变量非负，所以只取第一象限).

第二步：为了在图上表示可行域，按自然顺序将各个约束条件都绘制出来(不等式约束先绘制其对应的等式直线，然后再根据其不等号方向用箭头方向代表所选定的半平面).

约束条件 $x_1 + 2x_2 \leqslant 8$ 要求问题的可行解位于直线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 的左下方. 约束直线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 可先通过两个方便点绘制出来，如(8,0)和(0,4). 直线上的箭头表明了满足条件的区域. 同理，约束条件 $4x_1 \leqslant 16$ 和 $4x_2 \leqslant 12$ 也可以用直线和直线上的箭头表示出来. 图 2-1 中的阴影部分即为例 2-1 的可行域. 显然，在这个区域内的每一个点(有无数多个)都是一个可行解. 求解的目标是确定使目标函数 $z = 2x_1 + 3x_2$ 达到最大值的最优解.

第三步：选取一个方便的 z 值，使得此 z 值所对应的目标函数的直线通过可行域的某一点或一些点.

目标函数 $z = 2x_1 + 3x_2$ 可以表示为斜截式 $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z}{3}$. 不妨令 $z = 0$，于是有

$x_2=-\frac{2}{3}x_1$,它是一条通过坐标原点的直线.

第四步:为寻求最优解,向使 z 值得到优化的方向平行移动目标函数直线,当目标函数直线平移到极限状态时,其与可行域的交点即为最优解点.

向右上方平行移动直线 $x_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{z}{3}$,得到一簇使 z 值(截距)不断增加的平行线,如图2-1虚线所示.目标函数直线向右上方移动使目标函数值增加,而这样的移动是受到一定限制的,那就是必须保持直线与可行域至少有一个公共点.显然,顶点 B 就是目标函数直线脱离可行域前经过的最后一点,即 $B=(4,2)$就是最优解点,其最优值 $z=2\times4+3\times2=14$.这说明该厂在计划期内的最优生产计划方案是:生产甲产品 4 个单位,乙产品 2 个单位,可得最大利润 14 个单位.

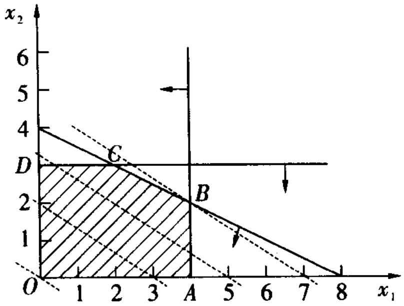

图 2-1 例 2-1 图解示意图

例 2-4 用图解法求解例2-2.

解 为了在图上表示出问题的可行域,首先将每一约束条件绘制出来.约束条件 $x_1\leqslant8$ 和 $x_2\leqslant10$ 的可行域分别位于其直线的左侧和下方,与坐标轴构成一个矩形.而约束条件 $5x_1+3x_2\geqslant45$ 要求问题的任何一个可行解都应位于直线 $5x_1+3x_2=45$ 的右上方;于是可得如图 2-2 阴影部分所示的可行域.

为寻求最优解,可以选取一个方便的 z 值,使得此 z 值所对应的目标函数的直线通过可行域的某一点或某些点,这里不妨假设 $z=600$.当 z 值由大变小时,直线

$$x_2=-\frac{40}{36}x_1+\frac{z}{36}$$

沿其法线方向向左下方平移,当目标函数线平移至 A 点时 z 值达到最小(见图 2-2),即此线性规划问题的最优解为 $\boldsymbol{X}^*=(8,5/3)^{\mathrm{T}}$.$x_1=8$ 说明选用 8 名一级质检人员;$x_2=5/3$ 说明选用 2 名二级质检人员,其中 1 名只有 2/3 的时间从事质量检验工作.

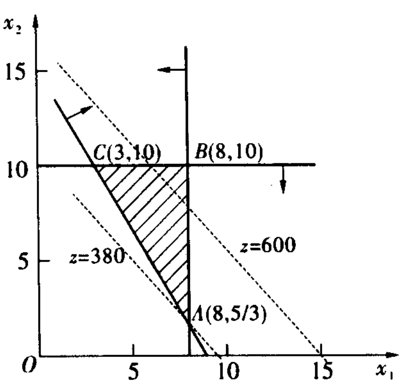

图 2-2 例 2-2 图解示意图

图解法所揭示的第一个重要结论:对一般线性规划模型而言,求解结果可能出现**惟一最优解**、**无穷多最优解**、**无界解**和**无可行解**四种情况.

1. 惟一最优解

上述两例的最优解都是惟一的.

2. 无穷多最优解

某些线性规划问题,可能存在一个以上的可行解使目标函数达到最优,在这种情况下,所有这些可行解都是最优解,线性规划具有无穷多最优解(或称为具有多重解).为说明这一情况,现将例 2-1 的目标函数变为 $z=2x_1+4x_2$,则以 z 为参数表示目标函数的直线族

与约束条件$x_1+2x_2=8$所示的可行域的边界平行.当 z 由小变大时,最终将与线段 BC 重合(见图 2 - 3),线段 BC 上任意一点都使 z 取得相同的最大值,此时线性规划问题有无穷多最优解.

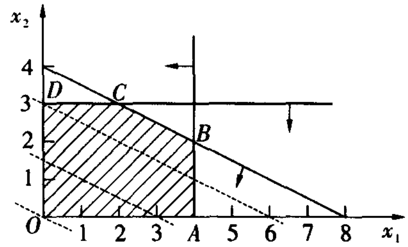

图 2 - 3　无穷多解示意图

3. 无界解

有些线性规划模型有可行解,但可能没有最优解,也就是说,能不断地找到更好的可行解使目标函数值增大或减小,此时线性规划问题有无界解(见图 2 - 4).

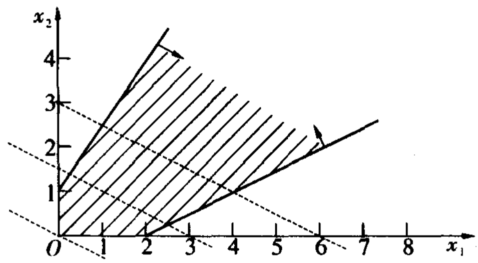

图 2 - 4　无界解示意图

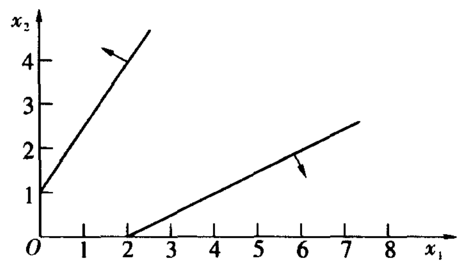

图 2 - 5　无可行解示意图

4. 无可行解

有些线性规划模型可能根本没有可行解.没有可行解即可行域为空集,当然也就不存在最优解(见图 2 - 5).

当实际问题的数学模型求解结果出现 3、4 两种情况时,一般说明线性规划问题数学模型的构建出现了错误.前者缺乏必要的约束条件,后者则存在相互矛盾的约束条件.

图解法所揭示的第二个重要结论:当线性规划问题的可行域非空时,它是有界或无界的凸多边形(凸集).

集合中任意两点的线性组合仍然属于该集合的集合称为**凸集**,图 2 - 6(a)、(b)所表示的集合为凸集,(c)、(d)所表示的集合为非凸集.

(a)　　(b)　　(c)　　(d)

图 2 - 6　凸集概念示意图

图解法所揭示的第三个重要结论:若线性规划问题存在最优解,其最优解一定在可行域的某个顶点(惟一最优解)或某两个顶点及其连线上(无穷多最优解)得到,即一定能在顶点上得到.

图解法虽然直观、简便,但当变量数多于两个时,它就无能为力了.下一节将介绍一种求解线性规划的代数法——单纯形法.

2.3　线性规划的单纯形法

由上节可知,线性规划模型有各种不同的形式,即目标函数可能求极大值,也可能求极小值;约束条件可能是等式也可能是不等式,不等式可能是“≤”也可能是“≥”;决策变量一般是非负的,但在理论模型中可能会允许在区间$(-\infty,+\infty)$内取值.为适应通用的代数求解方法,将不同形式的线性规划模型转化为统一的标准形式是十分必要的.

2.3.1　线性规划问题的标准形式

线性规划问题的标准形式应符合以下条件:①所有的决策变量非负;②所有的约束条件都用等式来表示;③目标函数为最大化(max)或最小化(min),本教材限定为最小化;④所有约束条件的右端项非负.用矩阵向量可以把线性规划问题的标准形式表示为

$$\min z=\boldsymbol{CX}$$
$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}.$$

求解线性规划问题的单纯形法要求把问题表达成标准形式,但并非所有的线性规划问题自身都是标准形式.因此,求解线性规划模型的第一步必定是把模型转化成标准形式.

1. 无约束变量的处理

在某些情况下,变量的取值并无正负的限制.如某一投资者拥有资本100万元,若投资需要他还可以贷款.如果用x代表其投资的数量,那么投资约束可表示为$x+s=100$.这里s的正负取决于它代表的是存款还是贷款.因为线性规划的标准形式总是要求变量是非负的,一个无约束的变量必须用两个非负变量的差来加以表示,即$s=y-z$,这里y,z非负,s的正负取决于y与z的相对大小.用两个非负变量y,z替代无约束变量s后,投资约束可表示为$x+y-z=100$,此时约束中的三个变量均为非负.

2. 目标函数最大化的处理

将最大化的目标函数转换为最小化的目标函数十分简单,只需将目标函数乘以“-1”即可.如$\max z=2x_1-3x_2$可以转换为$\min w=-2x_1+3x_2$,这里的z和w绝对值相等,符号相反.

3. 不等式约束条件的处理

对不等式约束条件可以通过引入一个代表不等式两边差的新变量来实现,这一新的变量称之为**松弛变量**.例如:$x_1+2x_2\leqslant 8$可转换为$x_1+2x_2+x_3=8$;$5x_1+3x_2\geqslant 45$可转换为$5x_1+3x_2-x_4=45$.这里加入的x_3和减去的x_4就是松弛变量.

4. 负约束条件右端项的处理

对负约束条件右端项的处理只需在方程(或不等式)两端同时乘以“-1”,这样即可将约束条件右端项转换为非负.例如:约束条件$x_1-2x_2\leqslant -8$可转换为$-x_1+2x_2\geqslant 8$;约束条件$x_1-2x_2-x_3=-8$可转换为$-x_1+2x_2+x_3=8$.