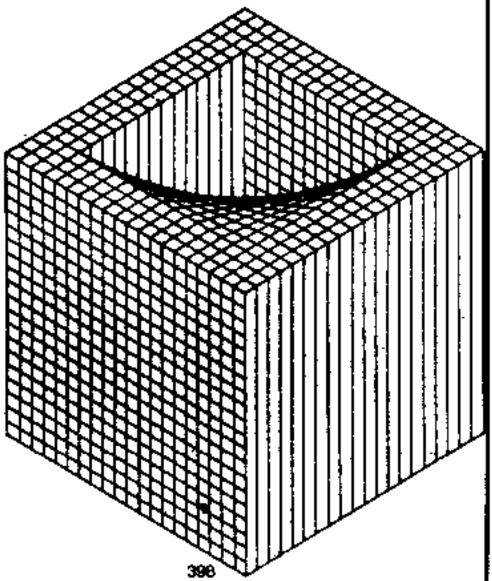
宋清岳　王龙波

主　编



JINGJI YINGYONG SHUXUE JICHU

经济应用数学基础

JINGJI YINGYONG SHUXUE JICHU

经济应用数学基础

JINGJI YINGYONG SHUXUE JICHU

经济应用数学基础

JINGJI YINGYONG SHUXUE JICHU

经济应用数学基础

石油大学出版社

经济应用数学基础

主　编　宋清岳　王龙波
副主编　贾　白　雷文庆　李振杰
王继林　王淑霞　王新宇
隋　松

石油大学出版社

鲁新登字10号

经济应用数学基础
宋清岳　王龙波　主编
*
石油大学出版社出版
（山东省东营市）
新华书店发行
山东冶金地质勘查局印刷所印刷
*
开本850×1168　1/32　8.875印张　230千字
1995年7月第1版　1995年7月第1次印刷
印数1—5000册

ISBN 7-5636-0713-7/O.33
定价：9.80元

前　言

随着经济的发展与管理工作的现代化，数学在经济领域的应用越来越广泛。为适应新形势下干部培训工作的要求，我们编写了这本《经济应用数学基础》。本书是介绍经济数学的通俗读物，凡具有一般初等数学知识的同志都能读懂。书中对一些重要理论，着重分析概念、基本思路和基本方法，不过分强调严格的论证，旨在培养读者分析问题、解决问题和逻辑思维的能力。书中每节后都配有一定数量的习题，题目难易搭配合理，便于读者通过习题的练习，进一步理解基本理论，熟悉计算公式，掌握计算方法，巩固所学知识。本书特别适合成人高等学校财经类专业作为教学用书，也可供广大经济干部作为业余读物。

本书是由所有参编人员在总结多年教学实践经验的基础上共同编写的。山东省青年管理干部学院副教授宋清岳同志对全书进行了审阅和修改工作。

在编写本书的过程中，我们参考了一些数学专著、文章和教材，借鉴了一些同志的科研成果；同时，也得到有关领导机关和数学界同仁的大力支持与帮助，在此深表感谢。

由于水平所限，书中难免有不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

1995 年 4 月

目　　录

第一章　微积分初步

第一节　集　合

一、集合

1. 集合的概念

集合是数学中一个重要的、基本的概念，它在现代数学中起着非常重要的作用。

一般地说，集合是一定事物组成的全体，组成集合的事物称为集合的元素。

下面举几个集合的例子：

例 1　从 1 到 10 的所有自然数。

例 2　1992 年 12 月 25 日出生在济南市的人。

例 3　某班级的全体同学。

例 4　全体偶数。

由有限个元素组成的集合，称为有限集，如例 1，例 2，例 3；由无限多个元素组成的集合，称为无限集，如例 4；不包含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$。例如，由 $x^2+1=0$ 的实数根组成的集合就是空集。

一般地，我们用大写的英文字母 A、B、C……等表示集合，用小写的英文字母 a、b、c……等表示集合的元素。如果 a 是 A 的元素，则记做 $a\in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是 A 的元素，则记作 $a\notin A$，读作 a 不属于 A。例如，设 N 为自然数集，则 $1\in N$，$\frac{1}{5}\notin N$

等。

2. 集合的表示方法

集合的表示方法通常有三种，即列举法、描述法和文氏图法。

(1)列举法：就是把集合中的元素一一列举出来，并写在大括号“{}”内(元素与元素之间用逗号隔开)。例如，由 $x^2-5x+6=0$ 的根所组成的集合 A，可表示为 $A=\{2,3\}$ 等。

(2)描述法：就是把集合中的元素所具有的共同特征写在大括号“{}”内。通常的写法是 $\{x/x$ 所具有的特征$\}$。例如，由全体偶数构成的集合 B，可表示为 $B=\{x/x=2n, n$ 为整数$\}$ 等。

(3)文氏图法：就是用平面上的一条封闭的曲线把集合的全部元素圈起来。例如，某班的全体同学，可以用图 1-1 表示：

图 1-1

3. 全集

由所研究的所有事物组成的集合称为全集，记为 I。全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下就可能不是全集。例如，要检查某工厂产品的优劣，则全厂产品为全集；如只检查某车间产品的优劣，则该车间产品为全集。

4. 子集

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即若 $a\in A$，则 $a\in B$，则称 A 为 B 的子集。记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含子 B，或 B 包含 A。如面 1-2。

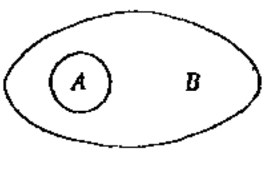


图 1-2

两个集合 A 与 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

关于子集有下列结论：

(1)任何一个集合都是它自身的一个子集。

(2)空集$\varnothing$是任何一个集合的子集。

(3)如果一个集合含有 m 个元素，则这个集合的全部子集数为 2^m。

5.集合的运算

(1)集合的补

如果 A 是全集 I 的一个子集，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 的补集，A 的补集记作 $\overline{A}$，读作 A 补。如图 1-3。

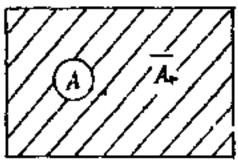


图 1-3

$$\overline{A}=\{x\mid x\in I \text{ 但 } x\notin A\}$$

显然，$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{I}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=I$。

(2)集合的交

如果 A 与 B 是全集 I 的任意两个子集，由同时属于 A 与 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，读作 A 与 B 的交。如图 1-4。

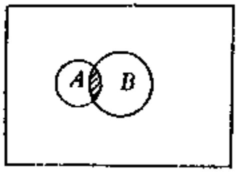


图 1-4

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{，且 } x \in B\}$$

显然，$A \cap A=A$，$A \cap \overline{A}=\varnothing$，$A \cap \varnothing=\varnothing$，$A \cap I=A$。

(3)集合的并

如果 A 与 B 是全集 I 的任意两个子集，由 A 和 B 的所有元素组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$，读作 A 与 B 的并。如图 1-5。

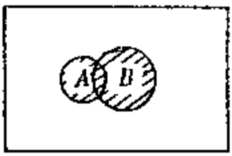


图 1-5

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

显然，$A \cup A=A$，$A \cup \overline{A}=I$，$A \cup \varnothing=A$，$A \cup I=I$。

(4)集合的差

如果 A 与 B 是全集 I 的任意两个子集，由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合，叫做 A 与 B 的差集，记作 $A-B$，读作 A 与 B 的差。如图 1-6。

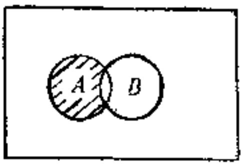


图 1-6

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}$$

显然，$(A-B)\cap B=\varnothing$，$(A-B)\cup A=A$。

例 5　设全集$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

$$B=\{2,4,5,8\}$$

则　$\overline{A}=\{6,7,8\}$

$$A\cap\overline{B}=\{1,3\}$$

$$\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,3,6,7,8\}$$

$$A-B=\{1,3\}$$

二、实数集

1. 实数集

人类对实数的认识并不是一次完成的。首先认识的是自然数，然后是有理数(即正负整数、正负分数以及零)。有理数是可以表示成形式为$\frac{p}{q}$的数，其中 p，q 都是整数，且 $q\neq0$，有理数也可用有限小数或无限循环小数表示。以后人类又进一步认识了无理数。无理数是无限不循环小数，例如$\sqrt{2}$、π 等都是无理数。有理数与无理数统称为实数。全体实数所成的集合称为实数集，记为 R。

2. 实数的重要性质

(1)实数和直线上的点有着一一对应的关系，并称这条直线为实数轴。由此可知，实数充满数轴而没有空隙，这就是所谓实数的连续性。

(2)实数是有序的，即有大小的顺序。设有任意两个实数 a，b，则 a，b 必满足下述三个关系之一：

$$a>b,\quad a=b,\quad a<b$$

(3)对任意两个实数施行加、减、乘、除(除数不为 0)运算后，仍得实数，就是说实数对加、减、乘、除(除数不为 0)四则运算是封

闭的。

(4)任意两个不相等的实数之间既有有理数，也有无理数，这就是所谓的实数的稠密性。

3. 实数的绝对值

实数 x 的绝对值记为 $|x|$，定义为：

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

$|x|$ 表示数轴上的点 x 到原点 O 的距离。

绝对值及其运算有如下一些性质：

(1) $|x|=|-x|\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时，才有 $|x|=0$

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

(3)若 $a>0$，则有

$$\{x \mid |x|<a\}=\{x \mid -a<x<a\}$$

(4)若 $b>0$，则有

$$\{x \mid |x|>b\}=\{x \mid x<-b\}\cup\{x \mid x>b\}$$

(5) $|x|-|y|\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$

(6) $|xy|=|x|\cdot|y|$

(7) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\quad(y\neq 0)$

三、区间与邻域

1. 区间

区间是特殊的实数集 R 的子集。微积分中集常用到以下几种区间(a 与 b 均为实数，且 $a<b$)：

(1)有限区间

①开区间　$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$

②闭区间　$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$

③半开半闭区间　$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$

$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$

有限区间的长是区间右端点 b 与左端点 a 的差,即 $b-a$。

(2)无限区间

①$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$

$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$

②$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$

$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}$

③$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\in R\}=R$

例如:用区间表示 $0<|x-1|\leqslant 1$ 的解集为:

$[0,1)\cup(1,2]$,区间的长度为 2。

2.邻域

实数集合$\{x \mid |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$,在数轴上是一个以点 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$,称为点 x_0 的 δ 邻域。点 x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径。如图 1-7。

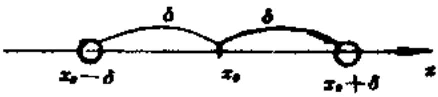


图 1-7

例如$|x+2|<\frac{1}{3}$,即为以点 $x_0=-2$ 为中心,以$\frac{1}{3}$为半径的邻域,也就是开区间$(-\frac{7}{3},-\frac{5}{3})$。

在微积分中还常常用到集合

$$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$$

这是在点 x_0 的 δ 邻域内去掉点 x_0,其余的点所组成的集合,即集合$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$,称为以 x_0 为中心,半径为 δ 的去心邻域。如图 1-8。

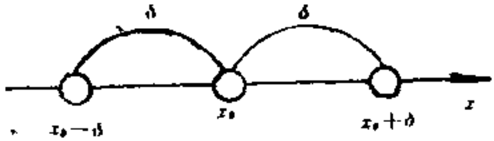


图 1-8

例如 $0<|x-1|<3$，即为以点 $x_0=1$ 为中心，半径为 3 的去心邻域，也就是集合 $(-2,1)\cup(1,4)$。

习题 1-1

1. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x \mid |x-2|\leqslant 5$ 的整数$\}$；

(2) $\{x \mid x\leqslant 20$ 且 $x=3n+2$，n 是自然数$\}$；

(3) $\{(a,b) \mid a+b=16$ 且 a、b 均为自然数$\}$。

2. 用区间表示适合下列不等式的所有 x 的集合：

(1) $|x|\leqslant 1$　(2) $|x+2|\leqslant 1$　(3) $|x-a|<q$（a 为常数，$q>0$）

(4) $|x|\geqslant 3$　(5) $|x+1|>2$

3. 写出集合 $A=\{1,3,5,7\}$ 的一切子集。

4. 如果 A 表示某单位会英语的人的集合，B 表示会日语的人的集合，那么，$\overline{A}$，$\overline{B}$，$A-B$，$\overline{A\cup B}$，$\overline{A\cap B}$ 各表示什么样人的集合？

5. 设 $A=\{1,2,5\}$，$B=\{1,3,5\}$，$C=\{2,3,\}$，求 $A\cup B$，$(A\cup B)\cap C$，$A\cup B\cup C$，$A\cap B\cap C$，$A-B$。

6. 设全集 $I=R$，集合 $A=\{x \mid x>2\}$，$B=\{x \mid 0<x\leqslant 2\}$，求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cap B$，$\overline{B}\cap A$。

7. 下列集合中（　　）是空集。

a. $\{0,1,2\}\cap\{0,3,4\}$　　b. $\{1,2,3\}-\{1,2,3,4\}$

c. $\{(x,y) \mid y=x$ 且 $y=2x\}$　d. $\{x \mid |x|<1$ 且 $x\geqslant 0\}$

8. 设集合 $A=\{a_1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,3,b_2\}$，则当 a_1，b_2 的值取（　　）时，有 $A\cap B=\{1,3\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$。

a. $a_1=6, b_2=4$　　　b. $a_1=6, b_2=5$

c. $a_1=1, b_2=2$　　　d. $a_1=1, b_2=6$

9. 设 A 是一切整数的集合，B 是一切不等于零的有理数的集合，A 是不是 B 的子集？

10. 设 A 与 B 是任意两个集合，下列各式是否成立？

(1)$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

(2)$A-B=A\cap\overline{B}$

11. 设 A 是含有 m 个元素的集合，A 中含有 k 个元素的子集共有多少个？

第二节　函　数

一、函数概念

1. 变量

我们在观察各种自然现象或研究实际问题时，会遇到许多的量。这些量一般可分为两种。一种是在我们所考察的过程中保持不变的量，这种量称为常量。还有一种是在这一过程中会起变化的量，称为变量。例如：自由落体的下降时间和下降距离是变量，而落体的质量在这一过程中可以看为常量。一般地，常量用字母 a、b、c……表示，变量用字母 x、y、z……表示。

2. 函数概念

在同一理象所碰到的各种变量中，通常并不都是独立变化的，它们之间存在着依赖关系，例如：自由落体下降时间和下降距离之间存在着依赖关系 $S=\frac{1}{2}gt^2$。

定义　设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 在它的变化范围内所取的每一个值，根据一定的对应规律可

确定变量 y 的唯一的一个值，那么，我们就说变量 y 是变量 x 的函数，记为：

$$y=f(x)$$

其中 x 叫做自变量，它的所有能够取值的范围叫做函数的定义域；y 随 x 的变化而变化，叫做因变量，因变量 y 的取值范围叫做函数的值域。如果自变量 x 取一定值 x_0 时，因变量 y 也对应地取一值 $y_0=f(x_0)$，称 y_0 是函数在 $x=x_0$ 时的函数值，这时我们就说函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 点有定义。x 与 y 之间的对应法则叫做函数的对应规律，即用符号 f 所表示的规律。

显然，不是任意两个变量之间的关系都是函数关系。例如：$y>x$ 按这个对应规律，每一个 x 值有无穷多个 y 值与之对应。而函数定义中的对应规律要求每一个 x 值只有一个确定的 y 值与之对应。因此不符合函数定义，所以 $y>x$ 不是函数关系。

由函数的定义，我们知道定义域和对应规律是确定函数的两大因素。例如：$y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$不是相同的函数关系，因为它们各自的定义域不同；$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$也不是相同的函数关系，而为它们各自的对应规律不同。

3. 函数的表示法

常用的函数表示法有三种：解析法、列表法和图象法。

(1)解析法

若函数的对应规律是用数学式子给出的，这种表示函做的方法称为解析法(或公式法)。微积分中所涉及的函数大多用解析法给出。

微积分中还经常微到这样的情形，一个函数在其定义域的不同部分用不同的解析式表示，这种函数叫做分段函数。如：

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x\in(-\infty,0)\\ 0, & x=0\\ x^2+1, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

就是一个分段表示的函数。当 $x\in(-\infty,0)$时，求函数值 $f(x)$用式子 $f(x)=x-1$ 计算；当 $x=0$ 时，则有 $f(0)=0$；当 $x\in(0,+\infty)$时，$f(x)$用式子 $f(x)=x^2+1$ 计算。

应当注意的是，分段表示的函数是用几个解析式合起来表示一个函数，不能理解为几个函数。

大多数函数它的因变量是用自变量表达式表示出来的，称为显函数。例如，$y=x^2$，$y=\sin x$ 等。而有些函数，它的因变量与自变量的对应规律是用一个方程 $F(x,y)=0$ 表示的，称为隐函数。如：$xy=1$，$x^2+y^2=a^2$ 等。

(2)列表法

在实际应用中，常把所考察函数的自变量的许多值(通常按由小到大的顺序)与它们所对应的函数值列成一表格，如此表示函数的方法称为列表法。例如：列车时刻表，三角函数表，对数表等等，都是用列表法表示的函数。

(3)图象法

这种方法是在平面直角坐标系中把两个变量的对应规律用一条曲线表达出来，在工业企业管理中常被采用。这种方法比较直观，能使所讨论的问题一目了然。

4. 函数符号 $f(x)$的使用

$f(x)$表示将对应规律 f 施用于 x，如果把 $f(x)$括号中的 x 转换成定义域内的某个具体数值或表示数值的字母以及某个数学式子，则表示将规则 f 施用于那个具体数值或表示数值的字母以及那个数学式子。

例如：若 $f(x)=x^3$

则 $f(2)=2^3=8$

$f(a)=a^3$

$f(x-1)=(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$