教与学方法丛书

# 数学方法论

## ——问题解决的理论

王子兴 著

中南大学出版社

2)

▸▸ 教与学方法丛书 ◂◂

# 数学方法论

## ——问题解决的理论

王子兴　著

中南大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

数学方法论——问题解决的理论/王子兴著. —长沙：中南大学出版社，1997(2002.3 重印)

ISBN 7-81020-998-4

Ⅰ.数... Ⅱ.王... Ⅲ.数学方法—方法论 Ⅳ.01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 008443 号

**数学方法论**

——问题解决的理论

王子兴 著

□责任编辑 刘石年

□出版发行 中南大学出版社

社址：长沙市麓山南路 邮编：410083

发行科电话：0731-8876770 传真：0731-8710482

电子邮件：csucbs @ public. cs. hn. cn

□经 销 湖南省新华书店

□印 装 中南大学湘雅印刷厂

□开 本 850×1168 1/32 □印张 11.375 □字数 292 千字

□版 次 2002 年 5 月第 2 版 □2003 年 6 月第 3 次印刷

□书 号 ISBN 7-81061-619-6/O·035

□定 价 20.00 元

图书出现印装问题，请与经销商调换

谨以此书献给——生我养我含辛茹苦一生的父母

# 数学方法论——问题解决的理论

## 内 容 简 介

数学方法论是数学教育学的一个分支。本书是把数学方法论作为问题解决的理论基础这一视角去构架的。书中认真研究和讨论了下述九个典型的专题：数学方法论与数学教育、MM 方法、化归方法、公理化方法与结构方法、合情推理、数学研究中的心理学方法、悖论、现代数学基础研究中的三个主要学派、数学家华罗庚成功的一些因素。

本书可作为高等师范院校数学与应用数学专业本科（或专科）生及硕士生的教材、在职中学数学教师继续教育的教材，也可以作为理工科大、专科学生的选修课教材。本书对于[redacted]高广大青年学生学习数学的兴趣、解决问题的能力极具指导意义。此外，本书还可以供数学爱好者及科技工作者阅读参考。

# 再版说明

本书第1版于1997年7月问世，1998年7月进行了第2次印刷。从1998年～2001年，新华书店总店北京发行所编的《高等院校理工类教学用书汇编》的目录中均有本书。其间，许多高等师范院校数学与应用数学专业将本书作为《数学方法论》课程的教材，根据出版社反馈到的信息：反映良好，颇为畅销。作者还曾不断收到各地读者的来信，或是鼓励，或是托购此书。

为了满足读者对本书的不断需求，作者在1997年版的基础上，对全书进行了一次全面修订，增加了约10万字的内容：补充了20世纪末数学领域研究的重大进展之一——费尔玛大定理的证明以及公理化方法的近代发展——结构方法；增补和更换了许多新的例题，包括最新高考题和数学竞赛题；为了提高学生学习数学的兴趣，增添了附录：论数学家华罗庚成功的一些因素。

数学家成长规律的一般分析，属于宏观的数学方法论，本书附录的内容就是这方面的课题。青年读者将从对数学家华罗庚成功的一些社会因素和内在因素的分析中得到有益的启迪。本书论述的MM方法、化归方法、公理化方法与结构方法，数学发现的方法——合情推理、数学研究中的心理学方法——直觉思维、灵感、想象则属于微观的数学方法论。严格地说，悖论的研究不属于数学方法论的范围。本书中的悖论和现代数学基础研究中的三个主要学派两章是作为数学哲学思想介绍的。

希望本书修订再版后，能继续受到广大青年学生和数学爱好者的钟爱，在数学教与学的实践中起到良好的促进作用，则作者幸甚！

王子兴

2001年12月1日于旧金山（San Francisco）

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 前　言

自20世纪80年代中期以来，全国绝大多数高等师范院校数学系陆续开设了《数学方法论》这门课程。作者已为八届高等师范院校数学系学生讲授这门课程，深感它不但对指导数学科学研究有启迪，而且对指导数学教学与改革有裨益。因此，作者认为，这门课程对有志于从事数学教育事业的大学生来说是必须学习的，对提高其他理工科大学生的文化素质也是有益的。事实上，我国这门课程的开拓者——著名数学家徐利治教授便首先在理工科大学为本科高年级学 生和研究生讲授这门课程。他对于数学方法论的研究成果闪烁着数学战略家的智慧之光，无疑深深地熏陶了我国许多数学工作者，但它毕竟是一门新开设的课程，还没有建立起完善的教材体系，还有许多理论问题需要探讨、研究。本书是作者近十年来从事数学方法论教学与科研工作的一个总结，是在作者授课讲义的基础上形成的。

本书试图从数学教育学中问题解决的角度进行构架。作者认为，数学教育学的理论包括下述四个部分：数学课程论、数学教学论（包括教与学两个方面）、数学教育评估理论、数学方法论。在作者主编的《数学教育学导论》（广西师范大学出版社1996年出版）一书中已包括了上述四个部分的前三个部分，但没有包括数学方法论这部分内容。而从数学问题解决的角度看，数学方法论确实是数学教育学的一个分支。因此，作者撰写本书的目的之一，是想以此作为《数学教育学导论》的续论。为此，在本书第1章中还对数学方法论与数学教育的关系作了专门论述。这种构

架是本书的一大特色。

《数学教育学导论》为湖南省普通高等教育第一批“九五”重点教材立项图书。根据该项重点教材的撰写计划，本书属于它的续论，其内容是它的一部分。

在数学教育中，问题解决的理论实际上是从数学教育的角度出发去研究数学问题解决的方法论问题，这就是本书要论述的数学方法论。它主要包括下述内容：一，如何综合地应用已有的数学知识、思想和方法解决实际问题，它涉及到各种基本的数学方法，但考虑到本书篇幅不宜过大，便只论述了最重要的三种：MM方法、化归方法和公理化方法；二，数学思维的方法，它包括数学中逻辑思维方法和数学启发法，以及数学中的心理学方法，由于前者已在《数学教育学导论》中论述，所以本书只论述后者；三，数学发现与创造的方法，如合情推理、美学方法等。此外，让大学生读者了解一些数学哲学思想也是必要的，本书最后两章便是这方面的内容。

在撰写本书的过程中，参阅了许多资料，笔者对本书参阅的有关文献的作者或单位表示崇高的敬意与谢忱！

在本书出版过程中，中南大学出版社刘石年教授给予了热情的支持和帮助。刘石年教授还审阅了书稿。作者在此向他表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，论述不全或不当之处在所难免，敬请各位专家、读者批评赐教。

王子兴

1997年元月于湘潭市文庙

# 目录


**第 1 章　数学方法论与数学教育** …… (1)

1.1　从数学文化的角度　(1)

1.2　从数学问题解决的角度　(19)

**第 2 章　MM 方法** …… (29)

2.1　数学模型概述　(30)

2.2　MM 方法应用举例　(47)

2.3　MM 方法在问题解决中的作用和意义　(58)

**第 3 章　化归方法** …… (75)

3.1　从费尔玛大定理的解决谈起　(75)

3.2　化归方法概述　(82)

3.3　化归方法在问题解决中的作用和意义　(94)

**第 4 章　公理化方法与结构方法** …… (142)

4.1　公理化方法概述　(142)

4.2　公理化方法的发展　(149)

4.3　公理化方法在问题解决中的作用和意义　(160)

4.4　公理化方法的近代发展——结构方法　(164)

**第 5 章　数学发现的方法——合情推理** …… (178)

5.1　归纳推理　(179)

5.2　类比推理　(204)

# 目录


第 6 章　数学研究中的心理学方法…… (221)

6.1　直觉思维　(221)

6.2　数学直觉与数学美　(237)

6.3　灵感　(254)

6.4　想象　(262)

第 7 章　悖论…… (271)

7.1　什么是悖论　(271)

7.2　悖论与数学的“基础危机”　(278)

7.3　消除悖论的努力　(284)

7.4　研究悖论的意义　(287)

第 8 章　现代数学基础研究中的三个主要学派

…… (289)

8.1　逻辑派的数学哲学思想　(289)

8.2　直觉派的数学哲学思想　(300)

8.3　形式派的数学哲学思想　(311)

附录　论数学家华罗庚成功的一些因素…… (326)

主要参考文献…… (350)

# 第 1 章　数学方法论与数学教育

从问题解决的角度看，数学方法论是数学教育学的一个分支。因此，本书在对数学方法论的主要内容展开研究之前，有必要试就数学方法论与数学教育的关系作一探讨。

## 1.1　从数学文化的角度

### 1.1.1　数学方法论是一种数学文化

1)什么是数学方法论

数学是研究客观世界的数量关系和空间形式的科学，是辩证思维的辅助工具和表现形式。运用数学这个工具来进行科学研究的方法叫数学方法。运用数学方法进行科学研究，就是运用数学所提供的概念、符号、技巧和规则，对研究对象进行量和结构的分析推演，从而找出一种运用数学形式表达事物的特征和规律的方法。在科学技术的发展过程中，数学始终是一种不可缺少的认识世界和改造世界的工具。数学在各门科学中被应用的水平标志着科学发展的水平。

任何一门数学分支的建立和发展，都要使用数学方法，但一般并不以数学方法本身作为研究对象。而数学方法论却是以数学方法本身作为研究对象之一的一门学问。具体地说，数学方法论的研究内容包括：

(1)数学观、数学的对象、数学的特点等数学认识论问题

数学观是人们对数学的本质、思想、方法的认识。这种认识是数学的元理论，特别是哲学的内容，是人们的哲学观点和思想方法

的一部分。

数学的对象是我们认识活动的客体。数学的对象决定着数学理论的内容、数学方法的应用和数学与其他科学的联系。数学对象的特点还决定着数学认识中主体在数学中的地位，决定着数学认识形式，即数学科学的特点及其在整个科学体系中的地位。数学的对象问题是数学认识论中最重要、最早受到人们重视的课题之一，人们对此表述了各种各样的见解。

每一位数学家都知道自己是在从事数学研究工作，然而对于“数学是什么”却有着许多不同的看法，有时相差甚远。这就是由于数学观不同所致，也是由于对数学的对象的不同见解所致。由于对于“数学是什么”作出了不同的回答，甚至形成了本世纪初逻辑主义、直觉主义、形式主义三个不同的学派，并爆发了一场大论战。

数学的特点主要是指作为数学主要认识形式理论的特殊性。这主要是指：在科学的抽象思维方面，具有抽象的多层次性和抽象思维的相对封闭性；在理论的严格性方面，具有理论体系的严谨性和使人们创造性思维严格化的特点；在应用方面具有为其他科学提供表述语言、抽象思维模式和计算工具的特点；在美学方面，表现出独特的美学特点。此外，数学结论还具有逻辑的必然性和量的确定性的特点。爱因斯坦（A. Einstein，1879～1955）曾这样描述数学[1]：“为什么数学比其他一切科学受到特殊的尊重，一个理由是，它的命题是绝对可靠和无可争辩的，而其他一切科学的命题在某种程度上都是可争辩的，并且经常处于会被新发现的事实推翻的危险之中。数学给予精密的自然科学以某种程度的可靠性，没有数学，这些科学是达不到这种可靠性的。”

顺便指出，关于数学的特点，较多的表述是：高度的抽象性、体系的严谨性和应用的广泛性。这是我国学者从50年代以来借鉴前苏联学者的有关论著（如《数学的内容方法和意义》这本名著中就有这样的提法）逐渐总结出来的表述。数学特征的“三性”有其

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

正确合理的成分，曾使我们对数学学科的认识有所加深，但它毕竟不能完全刻画数学的所有特点。本书不采用这种提法。

(2)数学发展的规律与模式

这也是数学认识论问题。由于数学的发展在很大程度上是由其内部因素决定的，因此，数学具有自己特殊的发展规律，例如，抽象化与具体化的辩证统一，一般化与特殊化的辩证统一，多样化与一体化的辩证统一，证明与反驳的辩证统一，数学传统的不断变革与数学知识连续性的辩证统一，数学理论的相对确定性与不完备性的辩证统一，等等。又由于数学发展要依赖于外部环境提供必要的动力和调节因素，因此，数学系统具有开放性。

一般来说，我们可以把数学发展归纳为五种模式：

①直接经验式：实际问题→数学问题→数学方法→实际应用。古代大多数数学论著是这种模式的结晶，如《九章算术》等。

②直观原型式：实际问题→数学问题→数学方法→数学理论体系。微积分和 17、18 世纪所创立的新的数学分支及其理论是这种模式。

③构造模型式：数学问题→数学思想→理论体系。例如，解析几何的产生属于这种模式。

④演绎推理式：数学理论体系→新的概念和方法→实际应用。例如，布尔代数、非标准分析、突变理论和模糊数学均是这种模式。

⑤理性思维式：数学本身的问题→新的数学思想和方法→理论体系。例如，非欧几何、伽罗华群、四色问题、希尔伯特 23 个问题的解决均是这种模式。

(3)数学发展的动力

这仍然是数学认识论问题。这一般要从下述三个方面讨论：数学发展的外部条件、数学发展的内部动力、数学家对数学发展的影响。

(4)数学的精神、思想和方法

所谓“数学精神”有：应用化的精神；扩张化、一般化的精神；组

织化、系统化的精神；致力于发明发现的精神；统一建设的精神；严密化的精神；“思想的经济化”的精神等。

通过精神活动而产生的数学思想，如《几何原本》和《九章算术》所代表的两大数学思想源泉、康托的“数学的本质在于思考的充分自由”的思想、变量思想、“不定义的术语组”和“不证明的命题组”的思想、非欧几何思想、群论思想、集合思想、极限思想、超限数思想，等等。

数学思想，是人们对数学科学研究的本质及规律的深刻认识。这种认识的主体，是人类历史上过去、现在以及将来的有名与无名的数学家；而认识的客体，则包括数学科学的对象及其特性，研究途径与方法的特点，研究成就的精神文化价值及对物质世界的实际作用，内部各种成果或结论之间的互相关联和相互支持的关系等。数学思想指的是认识活动的结果。

我们可以将数学思想按其演变的线索分成为：常量数学→变量数学→随机数学→模糊数学等四种数学思想，每种数学思想之间不仅发生了质的变化，而且标志着数学研究对象和方法的重大变化。一般说，常量数学思想时期是从公元前 6 世纪到公元 17 世纪，数学研究的对象是不变的数量关系和固定的空间形式，数与形是分开研究的。研究数的学科是算术与代数，算术是研究离散固定的数，代数研究方程的固定解，几何研究平面和空间固定的图形。常量数学思想是对现实世界固定的数与形关系的抽象，是孤立、静止地研究现实世界的数量关系。变量数学思想时期是从 17 世纪到 19 世纪 20 年代。数学研究的对象是变量。变量数学思想是用运动、发展和联系的辩证观点来分析和把握对象的数与形统一关系，其主要标志是解析几何和微积分。解析几何在数学概念思维领域里实现了数与形关系的沟通，微积分使人类思维进入无限小分析领域，使人类视野由有限发展到无限，由静止发展到运动，微积分为人们描述宇宙运动提供了简明而精确的数学工具，成为自然科学与技术发展中精确表述它们的规律和解决它们的问题

的有力武器。随机数学思想以概率论为其标志。概率论使数学研究由确定性领域进入非确定性领域，它标志着直接以不确定性现象为研究对象并提供把握“大势所趋”的途径，为偶然性和必然性之间的转化提供了数学刻画手段，使确定性和不确定性实现直接的统一。模糊数学是 1965 年由美国应用数学家、自动控制专家查德(L. A. Zedeh)创造的，它标志着数学由研究精确领域发展到模糊领域。模糊数学思想是吸取人脑某些对模糊现象进行识别和判断的特点而创造出来的，它为思维科学的发展提供了有效的数学工具。这不仅对人工智能和自动化生产有重大意义，而且为数学本身的发展带来了深刻的变化。

为了实现数学思想而产生的数学方法，有如常用的几种基本数学方法：模型方法、公理化方法、结构方法、构造方法、几何变换方法、化归方法；又如，数学思维方法：数学中的逻辑思维方法——科学抽象、归纳、类比、假说、演绎；数学中的心理学方法——想象、直觉、灵感等。

数学方法，可以认为是认识数学客体过程中的某种有规律性的程序和手段，是理论用于实践的中介，各种方法都体现一定的数学思想，但与作为认识活动的结果的数学思想含义并不相同。然而，常见的一种现象是，一种数学内容从某一侧面可视为数学思想，而从另一侧面却又可视为数学方法。有一些著名的数学家，他们在获得重要成果的同时，既创造了奇妙的数学方法，又提出了令人耳目一新的数学思想。

(5)数学中的发明、发现与创新法则

这些法则反映在实验归纳法、类比推理法、美学方法等方面。

此外，数学方法论还研究和讨论数学人才成长的规律等数学教育方面的课题。

综上，可以认为，数学方法论主要是研究和讨论数学观、数学的对象、数学的特点、数学的发展规律与模式、数学发展的动力等数学认识论问题，以及数学的精神、思想和方法，数学中的发现、发

明与创新等法则的一门学问。

数学方法论研究和讨论的内容可概括为两个方面：数学的哲学基础(有关数学认识论的问题)和数学的方法论基础。按徐利治教授的说法，前者属于“宏观的数学方法论”；后者属于“微观的数学方法论”。数学的哲学基础在西方属于“数学哲学”，在前苏联则属于“自然科学的哲学问题”或“数学的哲学问题”。无论是数学的哲学基础还是数学的方法论基础，都属于“数学基础”这门学科研究和讨论的内容。此外，“数学基础”这门学科还研究和讨论数学的逻辑基础——集合论和数理逻辑。数学基础的分类如图 1-1 所示。

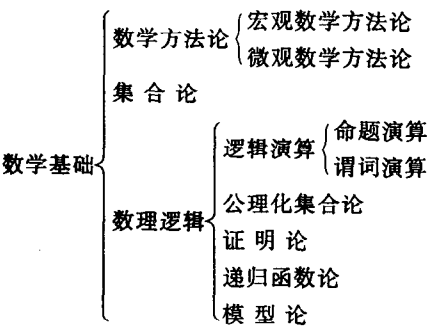


**图 1-1 数学基础分类图示**

数学基础是数学的一个大分支。从这种分类观点出发，可以认为数学方法论是数学的一个小分支，即数学方法论是数学的一个分科。

2)什么是数学文化

广义地说，文化是指一切非自然的，由人类所创造的物质财富和精神财富的总和。数学对象(这也包括了数学方法论的对象)并非自然世界的真实存在，而是抽象思维的产物，是一种人为的约定的逻辑建构系统。因此，从这种意义上说，数学是一种文化。

狭义地说，文化仅是指人类所创造的精神财富，则数学与文

学、艺术、科学、宗教一样是人类文化有机的组成部分。

由于数学系统的开放性，故可将数学文化看作是人类文化系统的子文化，从而数学文化就应具有人类文化的诸多特征及共性。又由于数学毕竟具有自己特殊的发展规律，故又可将数学看成是一个相对独立的文化系统，因而作为数学文化最主要的特征是其具有与一般人类文化不同的特殊性及个性，它表现在：

(1)数学对象的逻辑建构性

数学以抽象的形式，追求高度精确、可靠的知识。

数学抽象便是一种包括了理想化、精确化、模式化和分离化的数学逻辑建构活动。作为主观思维创造的数学对象，就是通过这种逻辑建构活动而成为一种宏观独立存在的数学世界。

(2)独特的数学语言

在现代文明社会中，数学家构成了一个特殊的群体——数学共同体。在数学共同体中，数学家必须运用数学共同体一致接受的概念和符号体系——数学语言去从事相对独立的量化模式的逻辑建构活动，并以此为直接对象去从事客观世界量性规律性的研究。数学语言是全人类共同使用并可以传授给机器人的一种交流手段。数学语言的特点是形式化、精确、逻辑严谨和应用广泛。

(3)独特的发展模式

这就是我们前面所指出的五种发展模式。数学是在感性认识与理性认识、归纳与演绎的辩证运动中实现自己的无限发展的。数学的发展带有明显的文化传统的痕迹，例如从宏观上看，中、西数学就具有明显的东、西方文化传统的特征；数学的发展具有很强的累积特性，即与其他知识部门相比，重大的数学理论总是在继承和发展原有理论的基础上建立起来的，它们不仅不会推翻原有的理论，而且总是包容原先的理论；数学的发展是在对宇宙世界和人类社会的探索中追求最大限度的一般性模式特别是一般性算法的倾向。

(4)独特的价值判断标准

数学认识论、数学真理观，使得数学不仅与文学、艺术有很大的差别，而且与科学（自然科学与社会科学）也有很大的不同。

（5）强调数学具体成就、精神、思想和方法对人类精神创造领域（如文学、哲学、艺术、教育、宗教）的影响。

例如，在哲学上，非欧几何的建立丰富和发展了哲学本体论、认识论和方法论。①对本体论的发展：非欧几何的建立使人们从过去单一空间形式的认识发展为空间多样性的认识；使人们从物质决定空间形式进一步认识到空间形式对于物质运动的反作用。②对认识论的发展：非欧几何的建立显示了理性思维的巨大作用，使人们认识到区分感性直感与科学抽象的重要性，同时是对狭隘经验主义和唯心论先验论的沉重打击；此外它还发展了人们对真理的相对性和对实践标准的认识。③对方法论的发展：从欧氏几何到非欧几何体现了自然科学理论体系从特殊到一般的发展形式，提供了对应原理的重要科学依据，并且促进了公理化方法的发展和完善。

这种影响还可以绘画为例，著名版画家 M. C. 埃舍尔就运用递归的数学思想创作了好些版画，如有一幅取名为《鱼和鳞》的版画，一条大鱼的鱼鳞看上去像一条条小鱼，而一条条小鱼的鱼鳞又像更小的鱼……这幅画富有情趣，很有启迪。

关于数学文化对人类精神生活影响最突出之处，齐民友教授在《数学与文化》一书中认为：其一，它追求一种完全确定、完全可靠的知识；其二，它不断追求最简单的、最深层次的、超出人类感官所及的宇宙的根本；其三，它不仅研究宇宙的规律，而且也研究它自己。齐民友教授还认为：数学作为文化的一部分，其最根本的特征是表达了一种探索精神；其永恒的主题是“认识宇宙，也认识人类自己”。他断言：“一种没有相当发达的数学的文化是注定要衰落的，一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的。”“没有现代的数学就不会有现代的文化。没有现代数学的文化是注定要衰落的。”

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com