高等工程专科教育系列教材

应用数学基础

（上册）

郑州工业高等专科学校　王建武
湖北汽车工业学院　杨国雄
主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等工程专科教育系列教材

应用数学基础

上册

主　编　王建武　杨国雄
副主编　陈大学　李小平　严钦容
参　编　赵家学　周建华
主　审　马福斌　张忠义

机械工业出版社

本书由机械工业高等工程专科教育教材建设委员会组织编写。依据教育部颁发的教学要求组织全书内容，分上、下两册。其内容主要有一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、级数、微分方程、行列式、矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、二次型、概率与数理统计的基本知识。每章附有习题，在书末附有习题答案。

本书适用于工科专科学校，以及夜大、函大、电大的师生，也可作职业教育的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础/王建武，杨国雄主编．—北京：机械工业出版社，2004.3

高等工程专科教育系列教材

ISBN 7-111-07129-8

Ⅰ.应… Ⅱ.①王…②杨… Ⅲ.应用数学-高等教育：成人教育-教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第14793号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

责任编辑：宋学敏 版式设计：张世琴 责任校对：申春香

封面设计：姚 毅 责任印制：路 琳

北京蓝海印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行

2004年4月第1版第2次印刷

787mm×1092mm 1/32 · 27.375印张 · [illegible]千字

定价：36.00元（上、下册）

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

前　言

《应用数学基础》是高等工程专科教育系列教材之一，为高等专科教育的重要基础课。全书分上、下两册；上册介绍微积分；下册介绍线性代数、概率论和数理统计。在教材的编写过程中，编者努力贯彻基础理论教学以应用为目的，以必须够用为度的原则，讲清概念，强化应用。

本教材力求做到：

一、用直观的几何例题和实际工作例子引出概念，减少论证和推理，以介绍数学思想方法和运算方法为重点。

二、为学习工程类各专业打下良好的数学基础，注重对学生获取新知识的能力的培养。

三、加强数学建模教学内容。将工程问题化为数学问题的思想贯串各章，增强工程意识，培养学生解决实际问题的能力。

四、吸取几年来高等工程专科数学教学改革的经验，结合专科学生特点，努力使内容重点突出，深入浅出，通俗易懂，便于自学。

本书由郑州工业高等专科学校王建武副教授、湖北汽车工业学院杨国雄副教授任主编。上册由湘潭机电高等专科学校陈大学、南京机械高等专科学校李小平讲师，湖北汽车工业学院严钦容副教授任副主编；下册由郑州工业高等专科学校林恒强讲师、湘潭机电高等专科学校刘洁纯讲师任副主编。

本书第一篇第一章、第三篇第八章由王建武编写；第一

篇第二、三、十章由陈大学编写；第一篇第四章、第二篇第一、二章由杨国雄编写；第一篇第五、七章由李小平编写；第一篇第八、九章由严钦容编写；第一篇第六、十一章由赵家学、周建华编写；第二篇第三、四、五章；第三篇第一章由林恒强编写；第三篇二、三章由刘刚编写；第三篇四、五、六、七章由刘洁纯编写。全书由王建武统稿。

本书由河南财经学院马福斌副教授，河南农业大学张忠义教授任主审。他们对全书做了认真细致地审阅，提出了许多宝贵意见。

郑州工业高等专科学校成教处、湘潭机电高等专科学校成教处为本书的出版给予大力支持，在此一并表示谢意。

由于编写时间的仓促，编者的水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请读者和同行批评指正。

编　者

目　录

第一篇　微积分基础

第一章　函数、极限与连续

在各种实践活动中，常常遇到一些变化的量，且它们之间又有相互联系。函数就是研究变量间的相互关系。微积分以函数作为研究的主要对象，而极限是微积分研究函数的重要手段。本章从研究函数开始，进一步学习极限概念，用极限方法研究函数的连续性，从而为微积分的学习奠定基础。

第一节　函　　数

函数的概念对于读过中学的人并不陌生。这里再重述一下。

一、函数的定义

定义 1　设 x，y 是两个变量，D 是一个非空的实数集合，f 是一个对应规则，若对每一个 $x \in D$，变量 y 按照规则 f 有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y = f(x)$，$x \in D$。x 称为自变量，y 称为因变量。

与 x_0 相对应的 y 的值记为 y_0，或 $f(x_0)$，$y|_{x=x_0}$ 称 $f(x_0)$ 为 $x = x_0$ 时函数 $y = f(x)$ 的函数值。x 的变化范围

称为函数的定义域，记为 $D(f)$。函数值的全体组成的集合称为值域，记为 $Z(f)$。

如果函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时 y 有唯一确定的值 y_0 与之对应，称函数在点 $x=x_0$ 处有定义或有意义。因此，函数的定义域就是使函数 $f(x)$ 有定义的 x 值的全体组成的集合。定义域常用区间表示。满足不等式 $a<x<b$ 的实数集合记为 (a, b)，称为开区间；满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数集合记为 $[a, b]$，称为闭区间；类似的有半开半闭区间 $[a, b)$、$(a, b]$；a、b 称为区间端点。$b-a$ 称为区间的长度。除此之外，满足不等式 $x\geqslant a$ 的集合记为 $[a, +\infty)$，满足 $x<b$ 的集合记为 $(-\infty, b)$，而 $(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数集合。满足不等式 $|x-x_0|<\delta(\delta>0)$ 的实数集合，在数轴上是一个以 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，称为点 x_0 的 δ 邻域。x_0 称为邻域中心，δ 称为邻域的半径，而满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的实数集合表示为 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ 是 x_0 的去心邻域。

研究函数时，必须把握两个要素：一是对应规律；二是定义域。对应规律可用 f、F、g、h、φ 等表示，函数也就用 $f(x)$、$F(x)$、$g(x)$、$h(x)$、$\varphi(x)$ 等表示。这些仅表示 y 与 x 存在着函数关系。具体到某函数，则应将具体的关系表示出来。如 $y=f(x)=\sin x$，此时 f 表示确定的规则 $f(\quad)=\sin(\quad)$。

在没有具体规定时，函数 $y=f(x)$ 的定义域是指使函数有意义的 x 的值的全体。例如，$y=x^2$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$；$y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$。然而针对具体问题，也会对其定义域作出规定或限制。例如，

用 y 表示正方形的面积，x 表示边长，边长与面积之间建立一个函数关系 $y=x^2$，此时函数的定义域为 $(0,\ +\infty)$。

两个函数只有在对应规则和定义域都一样时才是相同的，下面举几个例子：

例 1 $y=\arcsin(2+x^2)$ 能否构成函数关系？

解：按照给定规则，对于任何实数 x 都没有与之对应的 y 值。函数的定义域不能是空集，因此 y 与 x 不构成函数关系。

例 2 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$ 是否为相同函数？

解：这两个函数的定义域均为 $(-\infty,\ +\infty)$。但对 $y=\sqrt{x^2}$。$y\geqslant0$；而 $y=x$，当 $x\geqslant0$ 时，$y\geqslant0$，当 $x<0$ 时，$y<0$。两个函数的对应规则不同，所以它们不是相同的函数关系。

二、函数的表示法

表示函数一般有三种方法，即列表法、公式法和图象法。

例 3 98 年 8 月份 1～10 日某市的最高温度情况如表 1-1-1 所示。

表 1-1-1

日　期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
温度/℃	38	37	36	38	35	36	34	32	36	37

尽管我们还不能用一个公式来计算每天的最高气温，但日期和温度之间确实是一个函数关系，它用一个表格表示出来。

在本书中，主要研究用公式法表示的函数并辅以图形，

以便更直观、形象地说明问题。

例 4 牛顿万有引力定律指出，质量为 m_1、m_2，相距 r 的两质点间引力 $F = f(r) = k\dfrac{m_1m_2}{r^2}$，记 $c = km_1m_2$，则 $F = f(r) = \dfrac{c}{r^2}$，$(0 < r < +\infty)$。

例 5 初速度为零的物体从高空自由落下。若不计空气阻力，则下落的高度是时间 t 的函数：$h = \dfrac{1}{2}gt^2$，（$0<t<T$，T 为着地时的时间）。

一般地，有 $y = f(x) = x^{\mu}$ $(\mu \neq 0)$，称为幂函数(图 1-1-1)。

例 6 某国家 1980～1986 年人口情况如表 1-1-2 所示。

表 1-1-2 人口统计表

年　　份	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
人数/百万	67.38	69.13	70.93	72.77	74.66	76.60	78.59

如果按这种情况下去，试预测今后人口的变化。

解：将每年人口除以上年人口会近似得

$$\frac{1981\text{ 年人口}}{1980\text{ 年人口}} = \frac{69.13}{67.38} \approx 1.026$$

$$\frac{1982\text{ 年人口}}{1981\text{ 年人口}} = \frac{70.93}{69.13} \approx 1.026$$

$$\frac{1983\text{ 年人口}}{1982\text{ 年人口}} = \frac{72.77}{70.93} \approx 1.026$$

$$\cdots$$

$$\frac{1986\text{ 年人口}}{1985\text{ 年人口}} = \frac{78.59}{70.60} \approx 1.026\text{。}$$

于是有理由得出公式

$$y = f(t) = 67.38 \times (1.026)^t$$

t 表示年数。

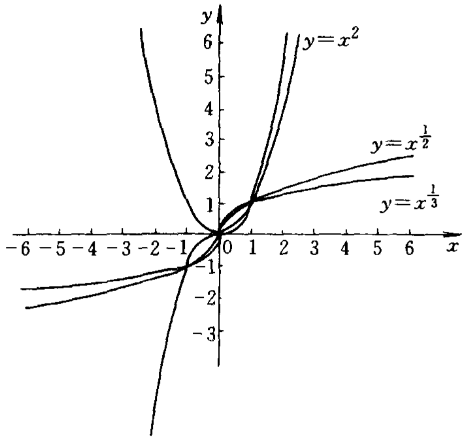

图 1-1-1

一般地，称 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$ $x\in(-\infty,\ +\infty)$ 为指数函数（图 1-1-2）。

如果对现象中的两个变量 x 与 y，每一相等间隔的 x 值，y 值的比均为常数，则 y 与 x 之间的函数关系可认为是指数函数。银行利息的计算；放射性化学物质的衰减都是时间 t 的指数函数（图 1-1-2）。

另一类函数是三角函数：$y=\cos x$，$y=\sin x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 等，它们的定义域、图形和性质，在中学已学，不再赘述。在研究机械振动、振荡电路和周期性变化的问题常会用到三角函数。

例 7 设长途汽车站规定旅客可免费携带 10kg 的行李。不超过 50kg 时，超过 10kg 的部分以 0.3 元/kg 收费，超过 50kg 时，所带行李按 0.5 元/kg 收费。求收取行李费与行李质量之间的关系（限定最多可带 100kg）。

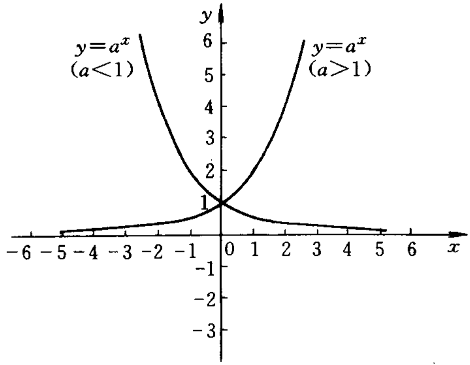

图 1-1-2

解：设收费为 y（元），旅客拖运行李为 $x$kg。则得

$$y=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 10\\ 0.3(x-10) & 10<x\leqslant 50\\ 0.5x & 50<x\leqslant 100\end{cases}$$

这个函数在其定义域的不同范围内用不同的表达式表示，称为分段函数（图 1-1-3）。

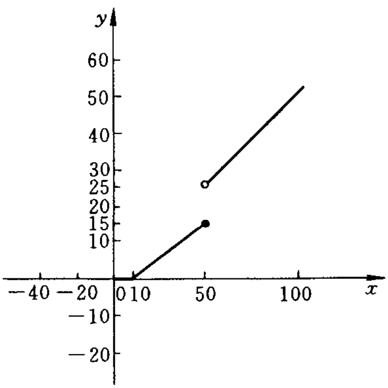

图 1-1-3

三、函数的几种特性

在研究函数时，常常要考察以其下几个方面的性质，从而更有利于揭示所研究问题的本质。

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义。

(1) 有界性　若存在正数 M，使对 I 内的一

切 x，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界。

例如，函数 $y=\cos x$，在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内 $|\cos x|\leqslant 1$，所以，$y=\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为有界函数。而 $y=\tan x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的，在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 内是有界的。

(2) 单调性　若对于 I 内任意两点 $x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内单调增加（或减少）。单调增加（减少）的函数，其图象随 x 的增加而上升（下降）。

(3) 奇偶性　若对区间 $I=(-a,a)(a>0)$ 内的一切 x 都有

$f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数；

$f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数。

偶函数的图象关于 y 轴对称；奇函数的图象关于原点 $(0, 0)$ 对称。

(4) 周期性　若 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，通常称最小正周期 T 为函数的周期。

例如，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$A$ 为函数的振幅，周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$，φ 为初相。

四、反函数

一物体作速度为 v_0 的直线运动，则路程 y 可表示为时间 x 的函数 $y=f(x)=v_0x(x>0)$，但是对每一个路程 y 的值也可以由 $x=\frac{y}{v_0}$ 求出时间来，称 $x=\frac{y}{v_0}$ 是 $y=v_0x$ 的反函数（或两者互为反函数），记为 $x=f^{-1}(y)$。以 y 为自

变量，x 为因变量。

若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $Z(f)$ 则 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域为 $Z(f)$，值域为 $D(f)$。

考虑习惯上用 x 表示自变量，因此将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$，这时说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数。如 $y=v_0x$ 与 $y=\frac{x}{v_0}$ 是互为反函数。

并不是所有的函数都有反函数。如果对 $Z(f)$ 中的每一个 y，$D(f)$ 中有唯一的 x 与之对应，且满足 $y=f(x)$ 时，才有反函数。有一个简单方法来判断。如果 $y=f(x)$ 的图象与任何水平直线 $y=c$ 至多有一个交点，则它有反函数 $y=f^{-1}(x)$。两个互为反函数的函数，其图象关于直线 $y=x$ 对称。

在学过的函数中，$y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ 是 $y=x^3$ 的反函数；$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$（$x>0$），是 $y=x^2$（$x>0$）的反函数；对数函数 $y=\log_a x$（$x>0$，$a>0$，$a\neq1$）是指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）的反函数；同样反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，分别是 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$，$y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$y=\cot x$，$x\in(0,\pi)$ 的反函数。

五、初等函数

1. 基本初等函数

下面六类函数为基本初等函数：

常数函数　$y=C$（C 为常数）