

高等工程专科教育系列教材

应用数学基础

(上册)

郑州工业高等专科学校
湖北汽车工业学院

王建武
杨国雄

主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等工程专科教育系列教材

应用数学基础

上 册

主 编	王建武	杨国雄	
副主编	陈大学	李小平	严钦容
参 编	赵家学	周建华	
主 审	马福斌	张忠义	

机 械 工 业 出 版 社

本书由机械工业高等工程专科教育教材建设委员会组织编写。依据教育部颁发的教学要求组织全书内容,分上、下两册。其内容主要有一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、级数、微分方程、行列式、矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、二次型、概率与数理统计的基本知识。每章附有习题,在书末附有习题答案。

本书适用于工科专科学校,以及夜大、函大、电大的师生,也可作职业教育的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础/王建武,杨国雄主编. —北京:机械工业出版社, 2004.3

高等工程专科教育系列教材

ISBN 7-111-07129-8

I. 应… II. ①王…②杨… III. 应用数学-高等教育: 成人教育-教材 IV. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 14793 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号, 邮政编码 100037)

责任编辑: 宋学敏, 版式设计: 张世琴, 责任校对: 申春香

封面设计: 姚毅, 责任印制: 路琳

北京蓝海印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行

2004 年 4 月第 1 版第 2 次印刷

787mm×1092mm 1/32 27.375 印张 1501 千字

定价: 36.00 元(上、下册)

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换
本社购书热线电话 (010) 68993821、68379646
封面无防伪标均为盗版

前 言

《应用数学基础》是高等工程专科教育系列教材之一，为高等专科教育的重要基础课。全书分上、下两册；上册介绍微积分；下册介绍线性代数、概率论和数理统计。在教材的编写过程中，编者努力贯彻基础理论教学以应用为目的，以必须够用为度的原则，讲清概念，强化应用。

本教材力求做到：

一、用直观的几何例题和实际工作例子引出概念，减少论证和推理，以介绍数学思想方法和运算方法为重点。

二、为学习工程类各专业打下良好的数学基础，注重对学生获取新知识的能力的培养。

三、加强数学建模教学内容。将工程问题化为数学问题的思想贯串各章，增强工程意识，培养学生解决实际问题的能力。

四、吸取几年来高等工程专科数学教学改革的经验，结合专科学生特点，努力使内容重点突出，深入浅出，通俗易懂，便于自学。

本书由郑州工业高等专科学校王建武副教授、湖北汽车工业学院杨国雄副教授任主编。上册由湘潭机电高等专科学校陈大学、南京机械高等专科学校李小平讲师，湖北汽车工业学院严钦容副教授任副主编；下册由郑州工业高等专科学校林恒强讲师、湘潭机电高等专科学校刘洁纯讲师任副主编。

本书第一篇第一章、第三篇第八章由王建武编写；第一

篇第二、三、十章由陈大学编写；第一篇第四章、第二篇第一、二章由杨国雄编写；第一篇第五、七章由李小平编写；第一篇第八、九章由严钦容编写；第一篇第六、十一章由赵家学、周建华编写；第二篇第三、四、五章；第三篇第一章由林恒强编写；第三篇二、三章由刘刚编写；第三篇四、五、六、七章由刘洁纯编写。全书由王建武统稿。

本书由河南财经学院马福斌副教授，河南农业大学张忠义教授任主审。他们对全书做了认真细致地审阅，提出了许多宝贵意见。

郑州工业高等专科学校成教处、湘潭机电高等专科学校成教处为本书的出版给予大力支持，在此一并表示谢意。

由于编写时间的仓促，编者的水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请读者和同行批评指正。

编 者

目 录

前言

第一篇 微积分基础

第一章 函数、极限与连续	1
第一节 函数	1
第二节 函数的极限	15
第三节 无穷小与无穷大	21
第四节 函数极限的四则运算	24
第五节 函数的连续性	28
第六节 两个重要极限	37
第七节 无穷小的比较	41
小 结	45
习题 1-1	46
第二章 导数与微分	54
第一节 导数的概念	54
第二节 求导法则	61
第三节 高阶导数	75
第四节 微分	81
小 结	89
习题 1-2	90
第三章 中值定理与导数的应用	94
第一节 中值定理	94

VI

第二节	罗必达 (L'Hospital) 法则	100
第三节	函数的单调性与极值	106
第四节	曲线的凹凸、拐点及渐近线	116
第五节	函数图形的描绘	119
* 第六节	导数在经济中的简单应用	122
* 第七节	曲率	127
第八节	方程的近似解	133
小 结		136
习题 1-3		137
第四章	不定积分	141
第一节	不定积分的概念、性质	141
第二节	换元积分法	147
第三节	分部积分法	154
* 第四节	有理函数的积分举例	157
第五节	积分表的使用方法	160
小 结		162
习题 1-4		164
第五章	定积分及其应用	167
第一节	定积分的概念与性质	167
第二节	微积分基本公式	178
第三节	定积分换元法与分部积分法	184
第四节	广义积分	192
* 第五节	定积分的近似计算	198
第六节	定积分的微元法	204
第七节	定积分的几何应用	206
第八节	定积分在物理方面的应用	218
小 结		224
习题 1-5		225
第六章	常微分方程	233

第一节	微分方程的基本概念	233
第二节	一阶微分方程	235
第三节	一阶微分方程的应用	242
第四节	可降阶的高阶微分方程	250
第五节	二阶线性微分方程解的结构	255
第六节	二阶常系数线性齐次微分方程	258
第七节	二阶常系数线性非齐次微分方程	262
第八节	二阶常系数线性微分方程应用举例	268
小 结		276
习题 1-6		279
第七章	向量代数与空间解析几何	286
第一节	空间直角坐标系与向量基本知识	286
第二节	向量的数量积和向量积	295
第三节	平面、直线及其方程	303
第四节	曲面、曲线及其方程	316
小 结		326
习题 1-7		327
第八章	多元函数微分学	332
第一节	多元函数的基本概念	332
第二节	偏导数	341
第三节	全微分	349
第四节	多元复合函数与隐函数的求导法则	355
* 第五节	方向导数与梯度	362
第六节	偏导数的应用	369
小 结		384
习题 1-8		385
第九章	重积分	389
第一节	二重积分的概念和性质	389
第二节	二重积分的计算	396

第三节 二重积分的应用	411
* 第四节 三重积分	420
小 结	428
习题 1-9	429
第十章 曲线积分	432
第一节 对弧长的曲线积分	432
第二节 对坐标的曲线积分	438
第三节 格林公式及其应用	446
小 结	453
习题 1-10	453
第十一章 无穷级数	456
第一节 常数项级数的概念与性质	456
第二节 常数项级数的审敛法	461
第三节 幂级数	471
第四节 函数展开成幂级数	479
* 第五节 以 2π 为周期的函数展开成傅立叶级数	496
* 第六节 以 2τ 为周期的函数展开成傅立叶级数	510
小 结	518
习题 1-11	523
附录	527
附录 A 常用初等数学公式	527
附录 B 简易积分表	529
习题参考答案	537

第一篇 微积分基础

第一章 函数、极限与连续

在各种实践活动中，常常遇到一些变化的量，且它们之间又有相互联系。函数就是研究变量间的相互关系。微积分以函数作为研究的主要对象，而极限是微积分研究函数的重要手段。本章从研究函数开始，进一步学习极限概念，用极限方法研究函数的连续性，从而为微积分的学习奠定基础。

第一节 函 数

函数的概念对于读过中学的人并不陌生。这里再重述一下。

一、函数的定义

定义 1 设 x, y 是两个变量， D 是一个非空的实数集合， f 是一个对应规则，若对每一个 $x \in D$ ，变量 y 按照规则 f 有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y = f(x)$ ， $x \in D$ 。 x 称为自变量， y 称为因变量。

与 x_0 相对应的 y 的值记为 y_0 ，或 $f(x_0)$ ， $y|_{x=x_0}$ 称 $f(x_0)$ 为 $x = x_0$ 时函数 $y = f(x)$ 的函数值。 x 的变化范围

称为函数的定义域，记为 $D(f)$ 。函数值的全体组成的集合称为值域，记为 $Z(f)$ 。

如果函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 时 y 有唯一确定的值 y_0 与之对应，称函数在点 $x = x_0$ 处有定义或有意义。因此，函数的定义域就是使函数 $f(x)$ 有定义的 x 值的全体组成的集合。定义域常用区间表示。满足不等式 $a < x < b$ 的实数集合记为 (a, b) ，称为开区间；满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的实数集合记为 $[a, b]$ ，称为闭区间；类似的有半开半闭区间 $[a, b)$ 、 $(a, b]$ ； a 、 b 称为区间端点。 $b - a$ 称为区间的长度。除此之外，满足不等式 $x \geq a$ 的集合记为 $[a, +\infty)$ ，满足 $x < b$ 的集合记为 $(-\infty, b)$ ，而 $(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数集合。满足不等式 $|x - x_0| < \delta (\delta > 0)$ 的实数集合，在数轴上是一个以 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ，称为点 x_0 的 δ 邻域。 x_0 称为邻域中心， δ 称为邻域的半径，而满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的实数集合表示为 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 是 x_0 的去心邻域。

研究函数时，必须把握两个要素：一是对应规律；二是定义域。对应规律可用 f 、 F 、 g 、 h 、 φ 等表示，函数也就用 $f(x)$ 、 $F(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 、 $\varphi(x)$ 等表示。这些仅表示 y 与 x 存在着函数关系。具体到某函数，则应将具体的关系表示出来。如 $y = f(x) = \sin x$ ，此时 f 表示确定的规则 $f(\quad) = \sin(\quad)$ 。

在没有具体规定时，函数 $y = f(x)$ 的定义域是指使函数有意义的 x 的值的全体。例如， $y = x^2$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ ； $y = \frac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 。然而针对具体问题，也会对其定义域作出规定或限制。例如，

用 y 表示正方形的面积, x 表示边长, 边长与面积之间建立一个函数关系 $y = x^2$, 此时函数的定义域为 $(0, +\infty)$ 。

两个函数只有在对应规则和定义域都一样时才是相同的, 下面举几个例子:

例 1 $y = \arcsin(2 + x^2)$ 能否构成函数关系?

解: 按照给定规则, 对于任何实数 x 都没有与之对应的 y 值。函数的定义域不能是空集, 因此 y 与 x 不构成函数关系。

例 2 $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = x$ 是否为相同函数?

解: 这两个函数的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$ 。但对 $y = \sqrt{x^2}$, $y \geq 0$; 而 $y = x$, 当 $x \geq 0$ 时, $y \geq 0$, 当 $x < 0$ 时, $y < 0$ 。两个函数的对应规则不同, 所以它们不是相同的函数关系。

二、函数的表示法

表示函数一般有三种方法, 即列表法、公式法和图象法。

例 3 98 年 8 月份 1~10 日某市的最高温度情况如表 1-1-1 所示。

表 1-1-1

日 期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
温度/℃	38	37	36	38	35	36	34	32	36	37

尽管我们还不能用一个公式来计算每天的最高气温, 但日期和温度之间确实是一个函数关系, 它用一个表格表示出来。

在本书中, 主要研究用公式法表示的函数并辅以图形,

以便更直观、形象地说明问题。

例 4 牛顿万有引力定律指出, 质量为 m_1 、 m_2 , 相距 r 的两质点间引力 $F = f(r) = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$, 记 $c = km_1 m_2$, 则 $F = f(r) = \frac{c}{r^2}$, ($0 < r < +\infty$)。

例 5 初速度为零的物体从高空自由落下。若不计空气阻力, 则下落的高度是时间 t 的函数: $h = \frac{1}{2}gt^2$, ($0 < t < T$, T 为着地时的时间)。

一般地, 有 $y = f(x) = x^\mu$ ($\mu \neq 0$), 称为幂函数(图 1-1-1)。

例 6 某国家 1980~1986 年人口情况如表 1-1-2 所示。

表 1-1-2 人口统计表

年 份	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
人数/百万	67.38	69.13	70.93	72.77	74.66	76.60	78.59

如果按这种情况下去, 试预测今后人口的变化。

解: 将每年人口除以上年人口会近似得

$$\frac{1981 \text{ 年人口}}{1980 \text{ 年人口}} = \frac{69.13}{67.38} \approx 1.026$$

$$\frac{1982 \text{ 年人口}}{1981 \text{ 年人口}} = \frac{70.93}{69.13} \approx 1.026$$

$$\frac{1983 \text{ 年人口}}{1982 \text{ 年人口}} = \frac{72.77}{70.93} \approx 1.026$$

...

$$\frac{1986 \text{ 年人口}}{1985 \text{ 年人口}} = \frac{78.59}{76.60} \approx 1.026。$$

于是有理由得出公式

$$y = f(t) = 67.38 \times (1.026)^t$$

t 表示年数。

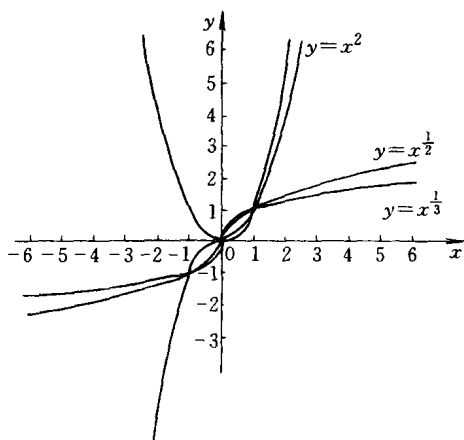


图 1-1-1

一般地，称 $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) $x \in (-\infty, +\infty)$ 为指数函数 (图 1-1-2)。

如果对现象中的两个变量 x 与 y ，每一相等间隔的 x 值， y 值的比均为常数，则 y 与 x 之间的函数关系可认为是指数函数。银行利息的计算；放射性化学物质的衰减都是时间 t 的指数函数 (图 1-1-2)。

另一类函数是三角函数： $y = \cos x$ ， $y = \sin x$ ， $y = \tan x$ ， $y = \cot x$ 等，它们的定义域、图形和性质，在中学已学，不再赘述。在研究机械振动、振荡电路和周期性变化的问题常会用到三角函数。

例 7 设长途汽车站规定旅客可免费携带 10kg 的行李。不超过 50kg 时，超过 10kg 的部分以 0.3 元/kg 收费，超过 50kg 时，所带行李按 0.5 元/kg 收费。求收取行李费与行李质量之间的关系 (限定最多可带 100kg)。

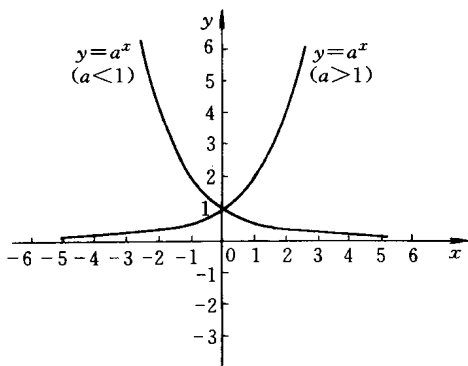


图 1-1-2

解：设收费为 y (元)，旅客拖运行李为 x kg。则得

$$y = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 10 \\ 0.3(x - 10) & 10 < x \leq 50 \\ 0.5x & 50 < x \leq 100 \end{cases}$$

这个函数在其定义域的不同范围内用不同的表达式表示，称为分段函数（图 1-1-3）。

三、函数的几种特性

在研究函数时，常常要考察以其下几个方面的性质，从而更有利于揭示所研究问题的本质。

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义。

(1) 有界性 若存在正数 M ，使对 I 内的一

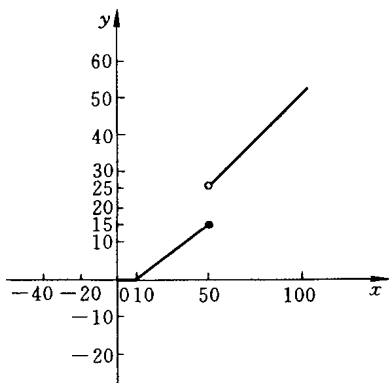


图 1-1-3

切 x ，都有 $|f(x)| \leq M$ ，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界。

例如，函数 $y = \cos x$ ，在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内 $|\cos x| \leq 1$ ，所以， $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为有界函数。而 $y = \tan x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内是无界的，在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 内是有界的。

(2) 单调性 若对于 I 内任意两点 $x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$)，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内单调增加 (或减少)。单调增加 (减少) 的函数，其图象随 x 的增加而上升 (下降)。

(3) 奇偶性 若对区间 $I = (-a, a) (a > 0)$ 内的一切 x 都有

$f(-x) = f(x)$ ，则称 $f(x)$ 为偶函数；

$f(-x) = -f(x)$ ，则称 $f(x)$ 为奇函数。

偶函数的图象关于 y 轴对称；奇函数的图象关于原点 $(0, 0)$ 对称。

(4) 周期性 若 $f(x+T) = f(x)$ ，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，通常称最小正周期 T 为函数的周期。

例如， $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ， A 为函数的振幅，周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$ ， φ 为初相。

四、反函数

一物体作速度为 v_0 的直线运动，则路程 y 可表示为时间 x 的函数 $y = f(x) = v_0 x (x > 0)$ ，但是对每一个路程 y 的值也可以由 $x = \frac{y}{v_0}$ 求出时间来，称 $x = \frac{y}{v_0}$ 是 $y = v_0 x$ 的反函数 (或两者互为反函数)，记为 $x = f^{-1}(y)$ 。以 y 为自

变量, x 为因变量。

若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $D(f)$, 值域为 $Z(f)$ 则 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域为 $Z(f)$, 值域为 $D(f)$ 。

考虑习惯上用 x 表示自变量, 因此将 $x = f^{-1}(y)$ 改写为 $y = f^{-1}(x)$, 这时说 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数。如 $y = v_0 x$ 与 $y = \frac{x}{v_0}$ 是互为反函数。

并不是所有的函数都有反函数。如果对 $Z(f)$ 中的每一个 y , $D(f)$ 中有唯一的 x 与之对应, 且满足 $y = f(x)$ 时, 才有反函数。有一个简单方法来判断。如果 $y = f(x)$ 的图象与任何水平直线 $y = c$ 至多有一个交点, 则它有反函数 $y = f^{-1}(x)$ 。两个互为反函数的函数, 其图象关于直线 $y = x$ 对称。

在学过的函数中, $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ 是 $y = x^3$ 的反函数; $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ($x > 0$), 是 $y = x^2$ ($x > 0$) 的反函数; 对数函数 $y = \log_a x$ ($x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$) 是指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) 的反函数; 同样反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 分别是 $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$, $y = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y = \cot x$, $x \in (0, \pi)$ 的反函数。

五、初等函数

1. 基本初等函数

下面六类函数为基本初等函数:

常数函数 $y = C$ (C 为常数)