名誉主编　卢嘉锡
主　　编　楚　庄

周沛耕　讲

怎样学好高中数学

科学出版社　龍門書局

怎样学好高中数学

《金钥匙丛书》

周沛耕 讲

怎样学好高中数学

科学出版社
龍門書局
1996

（京）新登字 306 号

《金钥匙丛书》

周沛耕　讲

怎样学好高中数学

责任编辑　尚久方　杜小杨

科学出版社
龙门书局　出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国人民解放军第一二〇二工厂印刷

科学出版社总发行　　各地新华书店经销

*

1996 年 1 月第　一　版　　开本：850×1168　1/32

1996 年 5 月第三次印刷　　印张：12

印数：31 001—61 000　　字数：312 000

ISBN 7-80111-052-8/G・17

定价：14.40 元

寄語華華學子：博學之、審問之、慎思之、明辨之、篤行之。

書贈金鑰匙叢書

一九九五年秋月 盧嘉錫

《金钥匙丛书》序

“金钥匙”源于格林童话，是能打开宝库的贵重的钥匙。金钥匙的贵重，不在于钥匙本身的金的价值，而是在于它能开启宝库的大门，引导人们得到取之不尽的宝藏。“金钥匙”常喻指获取知识、解决问题的能力和方法，指开启心扉、开发智力的教育方法。叶圣陶在谈到教学的目标时曾说：“对于学生来说，能够得到一把开启智慧之门的钥匙，养成一些良好的学习习惯，练就几路真正有用的本领，那才是最大的实益，终身受用的好修养。”我们这一套中小学教学参考书取名为《金钥匙丛书》，其宗旨就不是为各科教学另外增补填充物和添加剂，而是企求帮助学生增强学习能力，改进学习方法，或者也用借喻的说法，是为各科教学提供催化剂和发酵剂，帮助学生更好地吸收、消化。

在中小学特别是基础教育阶段，学校教学要使学生掌握基础知识、形成基本技能，即所谓“双基”，这无疑是十分正确、十分重要的，这是学校教学的中心任务和首要任务。但我们以为，在学生掌握基础知识、形成基本能力的过程中培养学习兴趣、形成学习习惯、发展学习能力，是同样（如果不说是更为）重要的。或者说，“双基”教学不只是教给学生知识和技能，更重要的是在教学过程中培养学习的兴趣、习惯、能力。用借喻的说法，供给食物、保证营养是重要的，但旺盛的食欲、良好的饮食习惯和健全的消化吸收功能更为重要，“那才是最大的实益，终身受用的好修养”。这是关系到教学思想乃至教育思想的大问题，值得多说几句。

关于学习兴趣。两千多年前的孔子就说过“知之者不如好之者，好之者不如乐之者”。“好”和“乐”就是愿意学、喜欢学，就是学习兴趣。对还没有明确学习目的的儿童来说，这点尤其重要，“乐”是主动性、积极性的起点。随着学习以及思想的发展，兴趣就可能

上升为志趣和志向。“吾十有五而志于学”,由“乐”上升为“志”,学习就有了更高的自觉性和目的性。爱因斯坦所说的“在学校里和生活中,工作的最重要的动机是工作中的乐趣,是工作获得结果时的乐趣,以及对这种结果的社会价值的认识”,不妨理解为由自发的、感性的“乐趣”出发,上升为自觉的、理性的“认识”过程,也就是由“乐”到“志”的过程。这是我们基础教育阶段教学工作应该充分尊重并且着意引导的带规律性的教学和教育过程。

关于学习习惯。帮助学生形成良好习惯,是学校教育的重要任务。叶圣陶认为:“从小学老师到大学教授,他们的任务就是帮助学生养成良好习惯,帮助学生养成政治方面文化科学方面的良好习惯。”习惯,就是把认识和知识落实转化为实践,更从实践中巩固和加深认识和知识,再转为更高的实践。知识和习惯的关系,也就是知与行的关系。我国古代《礼记》中所说的“博学之、审问之、慎思之、明辨之、笃行之”,把学问思辨归结到“行”上,现代教育家陶知行改名为陶行知,也都说明“行”对于“知”的重要。习惯,是经过重复、练习而巩固下来的稳定持久的条件反射和自然需要。培养良好正确的学习习惯,也是各科教学的重要任务。以语言和写作教学为例,读懂读通若干篇范文以及必要的字词语法、修辞知识固然重要,但同等重要的是培养勤读勤查、使用工具书的习惯,写读书笔记的习惯,作文要“修辞立诚”、写自己真实思想感受的习惯,作文要“上口入耳”、写好自己念、自己修改的习惯,以及不仅在课堂上而且在生活中正确使用语言文字的习惯等等。语文教学如果只是要求背熟多少范文和语法规则而忽略了良好正确的学习习惯的形成,那无论从教还是学两方面说都是不完全、不巩固、不成功的。

关于学习能力。学习能力,简单说就是举一反三的能力,触类旁通的能力,由已知推未知的能力。课堂教学,甚至整个学校阶段的教学,涉及的只不过是人类已有知识的一小部分。学校教学传授基础知识和基本技能,是所谓打基础阶段。基础固然要坚实,但基础只不过是准备,为学生在课堂之外和出校门后的继续构筑作准备。以数学学科为例,要求学生掌握数的基本概念、基本定律、基本

运算，为此要演算一定数量的例题。掌握课本中列出的概念、定律、运算固然重要，但更重要的是通过这些教学活动培养学生抽象演绎的能力，为掌握课本以外的更多更高更深的概念、定律和计算作准备。如果仅仅死记硬背多少概念、定律和计算题而不是以此为手段发展思维能力，那从教和学两方面说也都是不完全、不成功的。

上述学习兴趣、习惯和能力三个方面是互促互补、互为因果的。成功的教学，不在于教师的授予和学生的接受，而在于教师发挥主导作用，调动学生学习的主动性和积极性。教学的最高境界，是教其自学，培养学生自学的兴趣、自学的习惯、自学的能力；正如叶圣陶所说的“教育的最终目的在学生能自学自励，出了学校，担任了工作，一直能自学自励，一辈子做主动有为的人。”

《金钥匙丛书》由教学经验丰富的特级教师执笔，以现行的最新教学大纲和教材为基础，注重思路开拓，注重能力培养。对课文知识归纳总结，融会贯通，解析重点、难点。对学生，是学法指导；对教师，是教法参考。《金钥匙丛书》是提倡素质教育的教学参考书。

楚庄

1995 年 8 月

作 者 简 介

毕业于北京大学数学力学系，从教近 30 年. 北大附中特级教师. 同时受聘于清华大学附中（国家教委托办的）理科试验班、中国人民大学附中数学试验班、国家外经贸部直属子弟中学试验班多所学校. 曾被授予“全国优秀教师”、“北京市人民教师”称号. 享受政府特殊津贴.

以激发学生的创造性为主要教学风格，注重培养学生的数学素质和能力，课堂教学生动、轻松，适于各种层次的学生. 亲手培养的学生中有北京市高考理科第一名，有首次代表我国参加世界数学竞赛的选手，有获得美国、俄罗斯数学邀请赛金牌的选手，更有 6 名学生在各届世界数学竞赛中获得金牌、银牌，为国争了光.

任北京市中小学教师高级职称评审委员会委员，北京市中学生数学集训队主教练，中国数学会奥林匹克委员会主持的国家数学集训队教练.

主要著作有《初等数学概论》、《组合数学基础》、《谈学习策略》、《小学生智力开发与数学竞赛训练》等.

前　言

高中数学并不仅仅是告诉学生一些概念、定理、公式、法则以及各种各样的"规定"，而是要让学生学到科学的思想方法，提高分析和解决与数量、图形位置、逻辑推理相关的实际问题的能力．高中数学不应当仅仅是为高等数学打基础，也不应受制于高考应试．当学生充分吸吮了初等数学的营养，真正学好了高中数学后，就会感到作为大学基础课的高等数学并不神秘，更会在重新审视高考试题时觉得平淡无奇．

本书的目的是帮助学生深刻理解概念、公式和法则，引导他们总结自己的经验和教训，让他们更好地把握整个高中数学的知识结构、能力要求及蕴含在各章中的数学思想．基于这种考虑，本书只设章，不设节．各章内容都不包括教科书上可随时查到的概念、公式、定理等基本知识．在精心选择的例题中，着重分析和总结．

每个正在高中学习数学的学生，他们有同样的教材，有大体相同的上课时间，用的是大致一样的练习册，可以说所处的环境基本是相同的．但是学习效果可能有很大差异，这会让许多很用功但是成绩还不理想的学生、他们的家长和老师担忧．这本书正是为他们所写．

周沛耕

1995年8月

目　录

第一章　函数　函数的图象

初学函数的读者可能对诸如集合、映射、逆映射、象、原象、对应法则、函数、函数的值、区间、定义域、值域、奇偶性、单调性、周期性等许多陌生而又抽象的概念一时理解不深，但是必须在学习函数的全过程中始终把握一条主线，这条主线就是：

掌握函数的概念，认识基本函数的性质，运用函数的性质解决问题.

1. 如何掌握函数的概念

由数集 A 按法则 f 到数集 B 的映射就形成定义域为 A、值域为 B、对应法则为 f 的函数. 若用 x 表示集合 A 中的任何一个元素，按法则 f 得到的 x 的象为 y，则 $y\in B$，且这样的 y 是唯一的. 这种记号下，函数可记为

$$y=f(x),\ x\in A,\ y\in B.$$

应当说明：

(1)x 是 A 中任意一个元素. x 不能是集合 A 外的元素. A 是非空数集.

(2)f 是预先给定的由 A 到 B 的对应法则的代表符号. 具体说，f 可以是 $3x+2$，也可以是 $\lg x$，还可以是 $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 等. 法则 f 的基本特征有两条. 第一，f 对 A 中任意一个元素都可“加工”；第二，把 A 中任意元素 x 按 f 的“指令”进行“加工”后，“产出”的值是 B 中唯一的元素.

(3)若 $x_0\in A$，经过法则 f 的“加工”所得的象是 $f(x_0)$. $f(x_0)$称为 x_0 点处的函数值，$f(x_0)\in B$.

(4)任取 $x\in A$，得到 $f(x)$，如果 $f(x)\in A$，又可以对 $f(x)$

这个数按法则 f 进行“加工”，所得的象是 $f(f(x))$. 如果 $f(f(x))\in A$，还可对 $f(f(x))$ 这个数按法则 f 继续“加工”. 这就叫做复合函数运算.

(5)定义域和对应法则可确定值域，所以当定义域和对应法则都给定时，才确定了一个函数. 换句话说，当且仅当定义域与对应法则分别相同的两个函数才称为相等的(或同一个)函数. 但是定义域与值域分别相同的两个函数不一定是同一个函数.

(6)对应法则不能脱离集合 A，B 而单独存在. 也就是说，只有先给出 A，B 后，才能考虑由 $A\longrightarrow B$ 的对应法则.

(7)给定定义域后，函数 $y=f(x)$，$x\in A$ 的性质由法则 f 确定. 例如，对于函数 $y=f(x)$，$x\in A$：

对任意 x_1，$x_2\in A$，且 $x_1>x_2$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$时，该函数是增函数；

对任意 $x\in A$，当 $-x\in A$，且 $f(x)=f(-x)$时，该函数是偶函数；

对任意 $x\in A$，当 $x+T\in A$(T 为常数)，且 $f(x)=f(x+T)$时，则函数 $y=f(x)$是以 T 为周期的函数；

对任意 $x\in A$，如果存在常数 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$，则该函数是有界函数等.

(8)函数 $y=f(x)$，$x\in A$ 的图象是在直角坐标平面内点集 $\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in A\}$的图形. 函数的图象既能直观地表现出函数的变化状况，又能形象地表达函数的性质. 应当明确，函数的性质是由函数自身(由定义)决定的，并不是由函数的图象中发现的. 即使不画出函数的图象，该函数的性质也客观存在. 但是由于图象的直观性，我们也常常先画出函数的图象，再由图象发现函数的性质. 我们主张研究函数时，要利用函数的图象，用数形结合的方法，但是图形仅起说明、示意、形象表达等作用，不能离开数与式的分析仅凭图形进行判断与推理.

csc x
sec x
ctg x
tg x
cos x
sin x

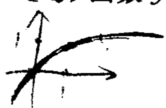
2. 熟练掌握基本初等函数的性质

$y=x^a$　$y=a^x$　$\log_a x=y$

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数是五类基本初等函数. 它们是研究其他初等函数的基础.

(1)幂函数

形如 $y=x^{\alpha}$ 的函数是幂函数，初等数学范围内限于 α 为有理数，给定 α 的具体数值后，就得到具体的幂函数. 幂函数的性质、图象随 α 而变. 考虑一切 $\alpha\in Q$，函数 $y=x^{\alpha}$ 形成幂函数族. 幂函数族的共同性质是：



图象过(1，1)点；

图象不过第四象限；

幂函数族中每个幂函数定义域的交集是$(0，+\infty)$；

在$(0，+\infty)$上，$\alpha>0$ 时，函数 $y=x^{\alpha}$ 递增；$\alpha<0$ 时，函数 α 递减；$\alpha=0$ 时，$y=1$，是常值.

$\alpha>0$ 时，函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象过原点，$\alpha\leqslant 0$ 时，函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象不过原点，除原点外，任何幂函数的图象不再与坐标轴相交.

定义域为 R 或$(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$的幂函数都具有奇偶性；定义域为$[0，+\infty)$或$(0，+\infty)$的幂函数都没有奇偶性.

由于幂指数 α 的不同，幂函数可以分为四类(设 $\alpha=\frac{p}{q}$，其中 $p，q\in Z，q\neq 0，p，q$ 互质)：

p 为偶数时，函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 是偶函数；

q 为偶数时，函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 无奇偶性. 当 $\frac{p}{q}>0$ 时，定义域为$[0，+\infty)$，当 $\frac{p}{q}<0$ 时，定义域为$(0，+\infty)$；

$p，q$ 同为奇数时，函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 是奇函数；

p 是奇数时，函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 都有反函数.

(2)指数函数

形如 $y=a^x$ 的函数是指数函数. 其中 a 叫做底数，$a>0$，

$a\neq1$，a 为常数.

指数函数的定义域为 R，值域为 R^+；

$a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 是增函数，$0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 是减函数；

指数函数的图象过(0，1)点；

在$(0,+\infty)$上，对同一个 x 值，a 越大 a^x 越大，在$(-\infty,0)$上，a 越大，a^x 越小.

指数函数都有反函数.

(3)对数函数

形如 $y=\log_a x$ 的函数是对数函数，其中 a 叫对数函数的底数，$a>0$，$a\neq1$，a 为常数.

对数函数的定义域为 R^+，值域为 R；

$a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 是增函数，$0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 是减函数；

对数函数的图象过(1，0)点；

在$(1,+\infty)$上，当 $a_1>a_2>1$ 时，$\log_{a_2}x>\log_{a_1}x>0$；当 $1>a_1>a_2>0$ 时，$\log_{a_1}x<\log_{a_2}x<0$；在(0，1)上，当 $a_1>a_2>1$ 时，$\log_{a_2}x<\log_{a_1}x<0$；当 $1>a_1>a_2>0$ 时，$\log_{a_1}x>\log_{a_2}x>0$.

对于$(0,1)\cup(1,+\infty)$中的任何一个 a，函数 $y=a^x$ 与函数 $y=\log_a x$ 互为反函数.

(4)三角函数

基本初等函数中主要的三角函数包括：

正弦函数 $y=\sin x$，$x\in R$. 其图象称为正弦曲线，值域为$[-1,1]$，它是奇函数，是以 2π 为最小正周期的周期函数. 对每一个 $k\in Z$，区间$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$是正弦函数的增区间，$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$是正弦函数的减区间；当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$时，正弦函数取最大值 1，当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in Z)$时，正弦函数取最小值 -1；对每一个整数 k，直线 $y=k\pi+\frac{\pi}{2}$是正弦曲线的一

条对称轴.

余弦函数 $y=\cos x$，$x\in R$. 其图象称为余弦曲线. 值域为 $[-1, 1]$，它是偶函数，是以 2π 为最小正周期的周期函数. 对每一个 $k\in Z$，区间 $[2k\pi, 2k\pi+\pi]$ 是余弦函数的减区间，$[2k\pi-\pi, 2k\pi]$ 是余弦函数的增区间；当 $x=2k\pi(k\in Z)$ 时，余弦函数取最大值 1，当 $x=2k\pi+\pi(k\in Z)$ 时，余弦函数取最小值 -1；对每一个整数 k，直线 $x=k\pi$ 是余弦函数的一条对称轴.

正切函数 $y=\operatorname{tg}x$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$. 其图象称为正切曲线，值域为 R. 它是奇函数，是以 π 为最小正周期的周期函数. 对每一个 $k\in Z$，区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 是正切函数的增区间.

余切函数 $y=\operatorname{ctg}x$，$x\neq k\pi(k\in Z)$，其图象称为余切曲线，值域为 R. 它是奇函数，是以 π 为最小正周期的周期函数，对每一个 $k\in Z$，区间 $(k\pi, k\pi+\pi)$ 是余切函数的减区间.

(3)反三角函数

反三角函数包括：

反正弦函数 $y=\arcsin x$，$x\in[-1, 1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，它是奇函数，增函数；

反余弦函数 $y=\arccos x$，$x\in[-1, 1]$，值域为 $[0, \pi]$，它是减函数；

反正切函数 $y=\operatorname{arctg}x$，$x\in R$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，它是奇函数，增函数；

反余切函数 $y=\operatorname{arcctg}x$，$x\in R$，值域为 $(0, \pi)$，它是减函数.

函数 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 与函数 $y=\arcsin x$，$x\in[-1, 1]$ 互为反函数，当 $x\in[-1, 1]$ 时，$\arcsin x$ 表示 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内的一个角，这个角的正弦值是 x.

函数 $y=\cos x$，$x\in[0, \pi]$ 与函数 $y=\arccos x$，$x\in[-1, 1]$ 互为反函数. 当 $x\in[-1, 1]$ 时，$\arccos x$ 表示 $[0, \pi]$ 内的一个角，

这个角的余弦值是 x.

函数 $y=\mathrm{tg}x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$与函数 $y=\mathrm{arctg}x$，$x\in R$ 互为反函数，对任何 $x\in R$，$\mathrm{arctg}x$ 表示$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内的一个角，这个角的正切值是 x.

函数 $y=\mathrm{ctg}x$，$x\in(0,\pi)$与函数 $y=\mathrm{arcctg}x$，$x\in R$ 互为反函数，对任何 $x\in R$，$\mathrm{arcctg}x$ 表示$(0,\pi)$内的一个角，这个角的余切值是 x.

四种反三角函数都是有界函数，都是单调函数.

四种主要的三角函数都是周期函数.

三角函数，反三角函数间有许多恒等式，例如同角三角函数关系式，诱导公式，两角和与差的三角函数关系式，倍角公式，半角公式，和与积互化式，万能置换式等，又如反三角函数中的

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\qquad(x\in[-1,1]);$$

$$\mathrm{arctg}x+\mathrm{arcctg}x=\frac{\pi}{2}\qquad(x\in R);$$

$$\arccos(-x)+\arccos x=\pi\qquad(x\in[-1,1]);$$

$$\arcsin x+\arcsin(-x)=0\qquad(x\in[-1,1]);$$

$$\mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}(-x)=0\qquad(x\in R);$$

$$\mathrm{arcctg}x+\mathrm{arcctg}(-x)=\pi\qquad(x\in R);$$

$$\arcsin\sin x=x\qquad\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)\text{等.}$$

再比如

$$\sin\arccos x=\sqrt{1-x^2}\qquad(x\in[-1,1]);$$

$$\mathrm{tg}\arcsin x=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(x\in(-1,1));$$

$$\cos\mathrm{arctg}x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\qquad(x\in R);$$

$$\mathrm{ctg}\,\mathrm{arctg}x=\frac{1}{x}\qquad(x\neq 0),\cdots$$