高等学校经济数学系列教材

概率论与数理统计

张建华　王健　邢金刚　编著

南开大学出版社

高等学校经济数学系列教材

概率论与数理统计

张建华　王健　邢金刚　编著

南开大学出版社
天　津

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 张建华，王健，刑金刚编著.
天津：南开大学出版社，2005.1
(高等学校经济数学系列教材)
ISBN 7-310-02236-X

Ⅰ.概... Ⅱ.①张...②王...③邢... Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材
Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 117448 号

版权所有 侵权必究

南开大学出版社出版发行
出版人:肖占鹏
地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071
营销部电话:(022)23508339 23500755
营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200
*
河北省迁安市鑫丰印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
2005 年 1 月第 1 版 2005 年 1 月第 1 次印刷
880×1230 毫米 32 开本 10.375 印张 296 千字
定价:18.00 元

如遇图书印装质量问题，请与本社营销部联系调换，电话:(022)23507125

前　　言

“高等学校经济数学系列教材”共分三册：《微积分》，《线性代数》，《概率论与数理统计》．这套教材是根据教育部颁发的《经济数学基础》教学大纲编写的．在编写中，我们吸取了南开大学一些教师的意见，这些教师多年来在经济数学第一线从事教学工作，具有丰富的教学经验．从教材的内容，编排的顺序到习题的难易程度，他们都给予了非常有益的指导．这次再版，我们在初版的基础上对部分章节进行了重写，调整了部分习题，修正了初版中的疏漏和排版的错误，并且增编了第三册《概率论与数理统计》，形成了适合经济类和管理类专业的一套比较完整的基础数学教材．这套教材也可作为三类和四类教学的考研或 MBA 入学考试参考书．

第一册《微积分》讲述了微积分的基本概念和方法，阐述了应用这些基本理论解决实际问题的分析思想，并适时地给出一些用微积分理论解决一些简单的经济问题的实例．另外，书中配有足够数量的习题，其中不仅有大量的基本练习题，也注意选编了一些具有综合性的考研试题．每章的题目都给出了简单的答案和提示．在编写中力求由浅入深，逐步展开，方便教学．

《微积分》的第一章至第六章和第十一章由刘桂茹编写，第七章至第十章由孙永华编写．

第二册《线性代数》讲述了线性代数的基本概念、基本理论和基本方法．在讲解重要定义、定理和法则时，穿插了较多计算方面的例题．为了便于学生复习以及思考和练习，我们在每节之后编写了一定数量的习题．另外还编选了一些有综合性的补充习题，以供经济类和管理类各专业的本科生考研或 MBA 入学考试参考．

《线性代数》的第一章和第五章由贾兰香编写，第二、三和四章由张建华编写．

第三册《概率论与数理统计》由概率论和数理统计两大部分组成．概率论部分（第一章至第五章）作为基础知识，集中讲述了概率论中必要的基本概念和基本理论．数理统计部分（第六章至第十章）讲述用于管理和经济的统计学的最基本内容，着重讲述了统计推断的原理和方法，第六章至第八章是数理统计的基本内容．在叙述上，尽可能采用学生易于接受的方式．对命题或论断，略去繁琐的推导，多数只作直观说明．为了学生更好地理解和掌握所介绍的基本原理和方法，教材中选编了相当数量的典型例题和经济应用例题．我们在每章后配有一定数量的习题，便于学生复习．

《概率论与数理统计》的第一章和第五章由邢金刚编写，第二章至第四章由王健编写，第六章至第十章由张建华编写．

在此，我们再次感谢编写组全体成员的精诚合作及南开大学出版社和周才思同志的大力支持．

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　事件的概率

概率论是研究随机现象规律性的数学学科，本章重点介绍概率论中的两个基本概念：随机事件和随机事件的概率，它们是学习概率论和数理统计的基础.

§1.1　随机现象和随机事件

一、随机现象与随机试验

在自然界和人类社会生活中，若从其结果是否能够准确预言的角度来考虑，存在着两类不同的现象：确定性现象和随机现象．例如，水在标准大气压下于100℃沸腾；向上抛掷一枚硬币必然会落地等．这种在一定条件下必然会发生(或必然不发生)的现象，称为**确定性现象**.

另一类现象则不同，例如，在相同的条件下，将一枚质地均匀的硬币向上抛，其结果可能是正面(有币值的一面)朝上，也可能是反面朝上，而在每次抛掷以前，无法确定会出现何种结果；从含有不合格品的某种产品中，任意抽一件检验，其检验结果可能是合格品，也可能是不合格品，事先无法准确知道．这类现象的共同特点是：在一定的条件下，一系列的试验(或观察)会得到各种不同的结果．也就是说，就某一次的试验(或观察)而言，它可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验(或观察)之前不能事先确定．但是，人们从长期的观察和实践中发现，在大量重复试验(或观察)中，这类现象的结果却呈现出某种规律性．例如，大量重复抛掷一枚硬币，出现正面朝上的次数，与反面朝上的次数大致都是抛掷总次数的一半；在含有不合格品的某种产品中，进行有放回的重复抽取，“抽到合格品”的次数

与抽取总次数之比却呈现出某种稳定性．这种在个别试验(或观察)中呈现不确定的结果，而在大量重复试验(或观察)中，其结果呈现某种规律性的现象称为**随机现象**；而这种规律性称为**统计规律性**．

显然，为了获得随机现象的统计规律性，必须在相同的条件下，大量重复地做试验，在概率统计中，我们把这类试验称为**随机试验**，简称为试验，用字母 E 来表示．一般地，一个随机试验要满足以下条件：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，而究竟会出现哪一个结果，在试验以前不能确定；

(3) 事先知道试验可能出现的全部结果．

例 1　下面试验都是随机试验：

E_1：向上抛掷一枚硬币，观察其落地时出现正面朝上或反面朝上的情况；

E_2：掷一枚均匀对称的骰子，观察向上一面出现的点数；

E_3：在一批灯泡中任意抽取一只，观察其使用寿命(单位：小时)；

E_4：观察某交通道口上午 7:30 至 8:30 的汽车流量(单位：辆)；

E_5：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度．

通过上述例子我们可以知道，随机试验是产生随机现象的过程，二者是并存的，我们就是通过随机试验来研究随机现象的．

二、样本空间

正如我们在随机试验满足的条件中所指明的，一个随机试验将要出现的结果在试验以前是不能确定的，但该试验所有可能的结果在试验以前是已知的．我们把随机试验 E 所有可能的结果组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**，用 Ω 来表示．样本空间中的元素，也就是随机试验 E 的每一个可能的结果，称为**样本点**，一般用 ω 来表示．

例 2　给出例 1 中各随机试验的样本空间．

解　E_1：试验所有可能出现的结果为“正面朝上”或“反面朝上”，则样本空间 Ω_1 为：

$$\Omega_1 = \{正面朝上，反面朝上\};$$

E_2: 试验所有可能出现的结果是骰子的每一面的点数，有 6 种：1，2，3，4，5，6，所以，其样本空间为：

$$\Omega_2 = \{1，2，3，4，5，6\};$$

E_3: 试验所有可能出现的结果，可以是非负实数中的任意一个，因此，它的样本空间为：

$$\Omega_3 = [0，\infty);$$

E_4: 试验所有可能出现的结果是非负整数中的任意一个，其样本空间为：

$$\Omega_4 = \{0，1，2，\cdots\};$$

E_5: $\Omega_5 = \{(x，y) \mid T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区的温度不会低于 T_0，也不会高于 T_1.

注意，样本空间中的元素即样本点是由试验的目的所确定的，不同的试验目的，其样本空间也不一样．例如，E_6: 将一枚均匀的硬币抛掷两次，观察两次出现正面、反面的情况；E_7: 将一枚均匀的硬币抛掷两次，观察出现正面的次数．尽管上述 E_6 和 E_7 都是将一枚均匀的硬币抛掷两次，但其试验目的不同，其样本空间也不一样．对于 E_6 来讲，所有可能的结果有 4 个：两次都出现正面；两次都出现反面；第一次出现正面，第二次出现反面；第一次出现反面，第二次出现正面．分别用“正正”、“反反”、“正反”、“反正”表示，所以，其样本空间有 4 个元素，$\Omega_6 = \{(正正)，(反反)，(正反)，(反正)\}$．而对于 E_7，所有可能的结果只有 3 个：出现 0 次，1 次和 2 次，因此，它的样本空间有 3 个元素，$\Omega_7 = \{0，1，2\}$.

此外，从上面样本空间的例子中我们可以看到，样本空间可以是数集，也可以不是数集；样本空间可以是有限集，也可以是无限集.

三、随机事件

当我们研究随机现象时，通常关心的不仅是某个样本点在试验后是否出现，更关心的是满足某些条件的样本点在试验后是否出现．例如，在例 1 的抛掷一枚骰子 E_2 的试验中，我们会关心抛出的点数是否

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

为奇数，这是由 3 个样本点 1，3，5 所组成的集合．同样，在上述 E_6 的试验中，如果讨论“两次出现的面相同”的情形，则是由两个样本点“正正”和“反反”所组成的集合．上述两个集合都是其相应的样本空间的子集．我们称样本空间的子集为**随机事件**，简称事件．随机事件通常用大写拉丁字母 A，B，C，…表示．所以，上述两个随机事件就可以表示为：A={抛出的点数是奇数}={1，3，5}，B={两次出现的面相同}={(正正)，(反反)}．显然，一个样本空间可以有很多的随机事件．

此外，我们称仅含一个样本点的随机事件为**基本事件**．

在试验后，如果出现了随机事件 A 所包含的某个样本点，那么我们称**事件 A 发生**；否则，就称**事件 A 不发生**．例如，在事件 A={抛出的点数是奇数}中，当且仅当抛出的点数是 1，3，5 中的任何一个时，事件 A 发生．同样，事件 B={两次出现的面相同}在一次试验中可能发生，也可能不发生．如果试验的结果是(正正)或(反反)，那么我们就可以认为随机事件 B 发生了．

根据定义，随机事件是样本空间的子集．而样本空间 Ω 又是其本身的一个子集，因而 Ω 也是一个随机事件．由于样本空间 Ω 包含所有的样本点，每次试验后必有 Ω 中的一个样本点出现，即 Ω 必然发生，因而称 Ω 为**必然事件**．又因空集 $\varnothing$ 总是样本空间 Ω 的一个子集，所以 $\varnothing$ 也是一个随机事件．由于 $\varnothing$ 不包含任何一个样本点，因此，每次试验后 $\varnothing$ 必定不发生．我们称 $\varnothing$ 为**不可能事件**．

本质上，必然事件和不可能事件已无随机性可言，但为了数学处理上的方便，仍把 Ω 和 $\varnothing$ 当作两个特殊的随机事件．

例 3　设袋中有三个白球(编号为 1，2，3)和两个黑球(编号为 4，5)，现从中不放回地连续任取两个球，试用集合的形式写出下列随机事件．

(1) 第一次取出的是黑球；

(2) 第二次取出的是黑球；

(3) 两次取出的都是黑球．

解　用 (i, j) 表示第一次取出 i 号球，第二次取出 j 号球 $(i, j=1,$

2，3，4，5；$i \neq j$）.

所以，其样本空间为

$$\Omega = \{(i, j) \mid i, j=1, 2, 3, 4, 5;\ i \neq j\},$$

共有 20 个样本点，它们分别是：

$$\begin{array}{lllll}(1, 2), & (1, 3), & (1, 4), & (1, 5), & (2, 1), \\ (2, 3), & (2, 4), & (2, 5), & (3, 1), & (3, 2), \\ (3, 4), & (3, 5), & (4, 1), & (4, 2), & (4, 3), \\ (4, 5), & (5, 1), & (5, 2), & (5, 3), & (5, 4).\end{array}$$

设 A = {第一次取出的是黑球}，B = {第二次取出的是黑球}，C = {两次取出的都是黑球}，则事件 A, B, C 都可以用样本点的集合表示：

$$A = \{(i, j) \mid i = 4, 5, j = 1, 2, 3, 4, 5;\ i \neq j\};$$

$$B = \{(i, j) \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, j = 4, 5;\ i \neq j\};$$

$$C = \{(i, j) \mid i, j = 4, 5;\ i \neq j\}.$$

显然，它们都是样本空间 Ω 的子集，当且仅当某子集中的某一个样本点出现(即某一个基本事件发生)时，相应的随机事件发生.

§1.2 事件的关系和运算

一、事件的关系和运算

在一个样本空间中，可以有许多随机事件. 我们希望通过对较简单事件的分析，去了解较复杂的事件. 所以，需要研究同一随机试验的各种事件之间的关系和运算.

由于随机事件实际上是样本空间中的某一个子集，因此，事件之间的关系和运算同集合论中集合之间的关系和运算是一致的. 下面我们介绍事件之间的相互关系和运算.

1. 事件的包含　如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，即属于事件 A 的每一个样本点一定也属于事件 B，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 显然，事件 $A \subset B$ 的

含义与集合论中的含义是一致的.

显而易见，对任何事件A，有$\varnothing \subset A \subset \Omega$.

2. 事件的相等　若事件A包含事件B,同时事件B也包含事件A,则称事件A与事件B**相等**,即事件A与事件B所包含的样本点完全相同，记作$A=B$.

3. 事件的和(并)　“事件A与事件B至少有一个发生”的事件，称为事件A与事件B的**和(并)**. 它是由属于A或B的所有样本点构成的集合，记作$A\cup B$，或$A+B$. 事件$A+B$发生意味着：或A发生，或B发生，或A与B都发生.

一般地，事件的和可以推广到多个事件的情形.

设A_1，A_2，…，A_n为n个事件，用$A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$表示“事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$中至少有一个发生”这一事件.

4. 事件的积(交)　“事件A与事件B同时发生”的事件称为事件A与事件B的**积(交)**. 它是由既属于A又属于B的所有公共样本点构成的集合，记作$A\cap B$或AB.

一般地，事件的积可以推广到多个事件的情形.

设A_1, A_2, …, A_n为n个事件，用$A_1A_2\cdots A_n$表示“事件A_1, A_2, …, A_n同时发生”这一事件.

5. 事件的差　“事件A发生而事件B不发生”的事件称为事件A与事件B的**差**. 它是由属于A但不属于B的样本点构成的集合，记作$A-B$.

6. 互不相容(或互斥)事件　如果事件A与事件B不能同时发生，即$AB=\varnothing$，称事件A与事件B**互不相容(或互斥)**. 互不相容事件A与事件B没有公共的样本点.

7. 对立事件(逆事件)　对事件A，事件“A不发生”称为A的**对立事件(逆事件)**. 它是由样本空间Ω中所有不属于A的样本点组成的集合，记作$\overline{A}$. 显然，事件A与$\overline{A}$满足下列关系：

$$A+\overline{A}=\Omega,\ A\overline{A}=\varnothing \tag{1.1}$$

由于 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，因此，称 A 与 $\overline{A}$ 互为对立事件. 同时，由定义可知，两个对立事件一定是互不相容事件；但两个互不相容事件却不一定是对立事件.

8. 完备事件组　若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing\,(i\neq j)$，且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，则称 A_1，A_2，…，A_n 构成一个**完备事件组**，也称 A_1，A_2，…，A_n 为样本空间 Ω 的一个划分.

显然，一个随机试验的所有的基本事件构成了一个完备事件组；同样，对于任何一个随机事件 A，A 与 $\overline{A}$ 也构成一个完备事件组.

上述事件的各种关系和运算可直观地用图 1.1 所示的文氏图表示.

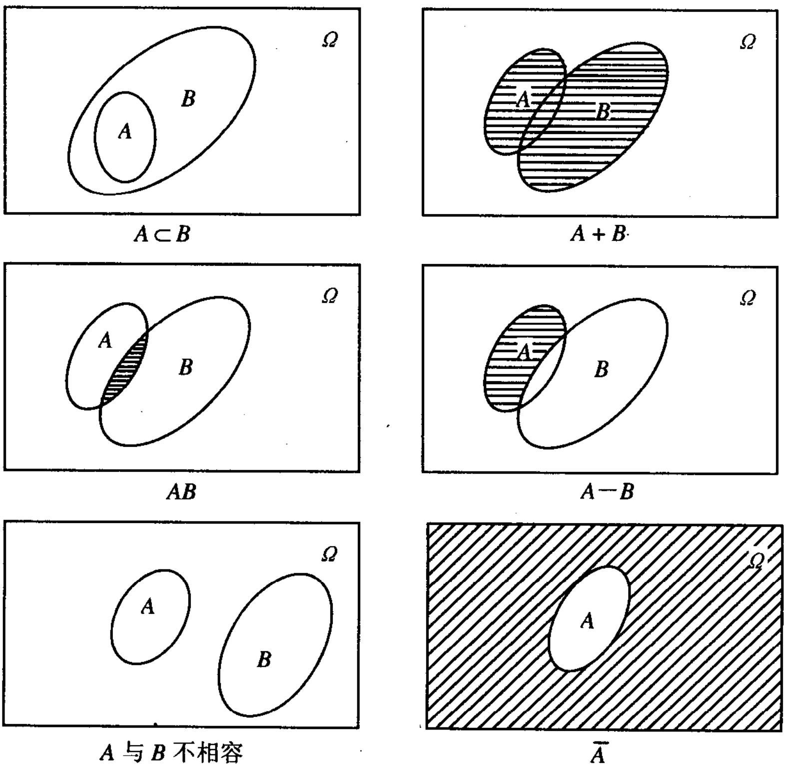

图 1.1　文氏图

由于事件的关系与运算和集合的关系与运算完全一致，现将集合论的有关结论与事件的关系和运算的对应情况列于表 1.1 中。

表 1.1　集合论中的有关结论与事件的关系和运算的对应

符号	集合论	概率论
	全集	样本空间、必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
Ω	元素	样本点(基本事件)
A	子集 A	事件 A
$A\subset B$	A 是 B 的子集	事件 A 发生必有事件 B 发生
$A=B$	集合 A 与 B 相等	事件 A 与 B 相等
$A+B$	集合 A 与 B 并集	事件 A 与 B 中至少有一个发生
AB	集合 A 与 B 交集	事件 A 与 B 同时发生
$A-B$	集合 A 与 B 差集	时间 A 发生但 B 不发生
$\overline{A}$	集合 A 的补集	事件 A 的对立事件
$AB=\varnothing$	集合 A 与 B 不相交	事件 A 与 B 互不相容(互斥)

二、事件的运算律

与集合论中集合的运算一样，事件之间的运算满足下述规律：

(1) 交换律：$A+B=B+A$，$AB=BA$；　(1.2)

(2) 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$；　(1.3)

(3) 分配律：$(A+B)C=(AC)+(BC)$，$(A-B)C=(AC)-(BC)$；　(1.4)

(4) 德摩根(De Morgan)法则：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.　(1.5)

这些规律都可以推广到任意多个事件的情形.

例 1　设 A，B，C 为三个事件，试利用它们表示下列事件：

(1) A 发生而 B，C 都不发生；　(2) 三个事件都不发生；

(3) 三个事件至少一个发生；　(4) 三个事件至多两个发生；

(5) 三个事件恰有一个发生.

解 (1) $A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B+C)$； (2) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A+B+C}$；

(3) $A+B+C$ 或 $ABC+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$；

(4) $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$；

(5) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$.

例 2 设某人向靶子射击三次，用 A_i 表示事件“第 i 次射击击中靶子”，$i=1,2,3$. 试用语言描述下列事件：(1) $\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}$；(2) $\overline{A_1+A_2}$；(3) $A_1A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2A_3$.

解 (1) 三次射击中至少有一次没有击中靶子；

(2) 前两次射击都没有击中靶子；

(3) 恰好连续两次击中靶子.

例 3 设 A，B 为任意两个事件，证明 $(A-B)\cup B=A\cup B$.

证明 $(A-B)\cup B=(A\cap\overline{B})\cup B=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)=(A\cup B)$，$\Omega=A\cup B$.

§1.3 随机事件的概率

当我们多次做某一随机试验时，常常会发现不同随机事件发生的可能性是不一样的. 例如，“掷骰子出现奇点数”的可能性就大于“掷骰子出现幺点”的可能性. 这样，我们就可以用一个数值来表示上述事件发生的可能性大小，这个数值的大小就称为事件发生的**概率**. 简言之，事件的概率就是事件发生的可能性大小的数量描述.

下面我们介绍概率论发展早期的三种概率定义，并讨论其相应的计算公式和性质.

一、概率的统计定义

定义 1.1 设在 n 次重复试验中，事件 A 出现了 n_A 次，则称比值 $\dfrac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**，记作 $f_n(A)$.

由频率的定义，不难证明频率具有下列性质：

(1) 非负性：对任何事件 A，$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com