刘坤林 总策划

W & W Education 水木艾迪 组 编

考研数学应试导引与进阶

微积分 上

◆清华大学考研辅导班指定教材◆

2005

全国硕士研究生入学统一考试

应试导引与进阶丛书（2005版）

刘坤林 谭泽光 莫骄 主编

清华大学出版社

全国硕士研究生入学统一考试应试导引与进阶丛书(2005 版)

考研数学应试导引与进阶
——微积分(上)

刘坤林　谭泽光　莫　骄　主编

清华大学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是作者根据2005年最新考试大纲，结合多年的教学经验和考研辅导经验精心编写而成。主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、原函数与不定积分、定积分、常微分方程等，每部分均按照“知识综述与导引”、“问题集粹”、“模拟与自测题”等内容进行编排。

本书针对的主要对象是参加研究生入学考试的理工类与经济类考生，同时可作为大学本科和专科学生的教学辅导用书。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学应试导引与进阶——微积分(上)/刘坤林，谭泽光，莫骄主编．—北京：清华大学出版社，2004.7

(全国硕士研究生入学统一考试应试导引与进阶丛书：2005版)

ISBN 7-302-08850-0

Ⅰ.考…　Ⅱ.①刘…　②谭…　③莫…　Ⅲ.微积分－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第057394号

出 版 者：清华大学出版社　　地　　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969

组稿编辑：陈仕云
文稿编辑：鲁秀敏
封面设计：秦　铭
版式设计：郑铁文
印 刷 者：北京昌平环球印刷厂
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×260　印张：17.5　字数：387千字
版　　次：2004年7月第1版　2004年7月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-302-08850-0/O・367
印　　数：1～5000
定　　价：24.00元

丛书编委会

总策划 刘坤林

编　委 谭泽光　俞正光　刘坤林　葛余博　张慎德
胡天赐　舒　文　孔祥云　许建平

编委会成员简介

刘坤林

清华大学数学科学系教授，清华大学考研辅导班领军人物，全国考研数学辅导资深专家．清华大学考研辅导班主讲，清华大学 MPA 辅导班主讲．先后七次获国家及省市部级科学技术进步奖．把握教学方向非常准确，教学用题代表性极强，屡屡命中考研真题．主编《大学数学——概念、方法与技巧》、《高等数学典型题题典——考研数学应试能力进阶》等教材．讲课特点：富有启发性，对概念的阐述生动形象，精辟准确，得到同学们的高度评价．

谭泽光

清华大学数学科学系教授，多次获国家及省市级科技进步奖．专注考研数学辅导 10 多年，考研数学辅导资深专家，多次任北京地区考研数学阅卷质量检查专家组组长．任《高校应用数学学报》编委，1997 年开始担任国家工科基础课基地负责人．全国高校一类课程负责人，讲课风格热情幽默，重点突出，技巧性强，生动精辟．主编《微积分》(清华大学 21 世纪换代公共基础平台课教材)，并著有《大学数学——概念、方法与技巧》．学员评价听谭老师的课“是一种享受，收获很大．”

俞正光

清华大学数学科学系教授，北京市一类课程负责人，长期担任清华大学考研辅导班线性代数主讲．对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学要求有专门的深入研究，考研数学辅导资深专家，主编《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》、《全国工程硕士研究生入学考试大纲及考前辅导教材》等各类考研数学辅导教材．讲课风格深入浅出，条理规范，重点突出准确．

葛余博

清华大学数学科学系教授．在随机过程及其应用方面的科研工作多次获奖，长期担任概率与数理统计、随机过程等课程的主讲教学工作，在教学研究和实践中积累了大量可贵经验．清华大学考研辅导班概率统计主讲，对全国硕士研究生入学考试大纲与教学要求有专门的深入研究，讲课风格：擅长抓住概念实质、融会贯通，启发式教学，利于熟练掌握并灵活运用知识，条理规范，重点突出准确，多次命中考研真题，受到同学一致欢迎．

张慎德

清华大学人文学院教授,长期从事马克思主义哲学的教学与研究,多次参加研究生入学政治考试的命题和阅卷工作.对全国硕士研究生入学考试大纲与考查要求有专门的深入研究.授课思路清晰、概念明确、条理性强,善于启发和指导学员结合各种类型问题理解基本原理,提高分析和解决实际问题的能力,受到学员一致好评.

舒　文

清华大学人文学院副教授,硕士生导师.异军突起的考研辅导专家,长期从事毛泽东思想教学与研究,脱俗于乏味政治教学的典范,多次参加政治课辅导教材的编写.辅导中贯彻少而精的原则,针对大纲的要求,着重培养考生应用基本原理分析解决问题的能力.讲课幽默风趣,深入浅出,概念准确,重点突出,对考点把握率高,深受同学们的欢迎.

胡天赐

清华大学人文学院教授,长期从事政治经济学的教学与研究,北京地区考研政治阅卷组成员.多次参加政治课辅导教材的编写,连续主讲研究生入学政治课考试中的政治经济学辅导.授课深入浅出,条理清晰,概念准确,重点突出,深受同学欢迎.

孔祥云

清华大学人文学院教授,长期从事政治经济学和邓小平理论的教学与研究,多次参加政治课辅导教材的编写,长期进行各类研究生入学政治课考试中的邓小平理论辅导,北京地区考研政治阅卷组成员.讲课热情投入,富有感召性,重点突出,针对性强,条理清晰,深受同学欢迎.

许建平

清华大学外语系教授,硕士生导师,英语考试命题、阅卷专家,长期从事研究生英语教学,对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学要求有专门的深入研究,北京地区考研阅卷组质量检查专家组成员.长期担任清华大学考研辅导班主讲,主编有《清华考研英语应试教程》等教材.讲课特点:条理清楚,信息量大而准确,重点突出,阐述清晰,普遍受到同学欢迎.

编者的话

全国硕士研究生入学统一考试是一种选拔性考试，不同于等级考试（如英语四级、六级考试）. 命题工作人员的任务是结合对基本知识点的理解与不同知识点的交叉运用能力，在试题中设置不同深度的“陷阱”，以求把庞大的考试队伍从能力水平上区分出档次，进而实现国家选拔人才的目的. 作为一名考生的任务则是：在全面准确理解知识系统的前提下，努力提高识破命题陷阱的能力，力争在考场上以居高临下的知识洞察力与良好的应试状态一举成功.

学习数学需要培养悟性，应试考研数学需要一定的数学知识洞察力，就像一个习练气功的学员，需要一个师父带他进入状态，学会套路. 所谓悟性或洞察力，是指对数学基本概念的深入理解与准确把握，而这种理解与把握，首先要求对基本概念与基本知识点的理解要做到把握其准确性与完整性，进一步才是掌握知识的系统性、交叉性与灵活性. 没有对基本概念与基本知识点理解的准确性与完整性，就谈不上掌握知识的系统性与交叉灵活运用的能力，当然更谈不上解题的思路与技巧.

本套《全国硕士研究生入学统一考试应试导引与进阶丛书》（以下简称《导引与进阶丛书》）的宗旨是：“为考生面对考试造就一种居高临下的知识洞察力和感觉良好的临场状态.”这也就是清华大学考研辅导班一直遵循的教学宗旨.

我们一贯强调，首先注重知识的基础性、系统性与完整性. 在考试中，完全基础性题目一般占 60 分以上（满分 150 分），并且，基本知识点在综合题目中也占有重要的分量，基础性知识点的失误往往导致对一个综合题目的切入点错误，最后造成的是全局性错误. 以一种加权的估计来分析，基本知识点在全部试卷中所占的比重可高达 120 分，以数学为例，微积分中的所谓基本知识点包括初等函数的初等性质，极限存在的命题形式及命题属性（充分的？必要的？还是充要的？），极限的保序性及运算法则，函数在一点连续的定义，闭区间上连续函数的性质，构造导数定义的标准极限模式及其变形，一阶线性微分方程解的公式，常系数线性微分方程解的结构，多元函数的极限、连续与可微性的定义及其相互关系，各类积分的背景与性质等. 线性代数中的基本知识点包括：行列式、逆矩阵与伴随矩阵的计算及它们之间的相互关系，齐次与非齐次线性微分方程解的结构，矩阵的初等变换与秩的概念，向量组的线性相关与无关，向量组的秩与线性方程组解的结构之间的关系，特征值与特征向量的概念，线性变换、正交变换及二次型的标准化等. 概率统计中的基本知识点包括：随机事件的运算，五个古典概率的基本公式，独立性的概念，分布率，分布密度与分布函数的性质及其相互之间关系. 复合随机函数的概念，数字特征的定义、背景与基本运算公式，简单随机样本及其数字特征等.

在考试中，考生出现的大量错误是由于对基本概念与知识点理解的不准确或不完整，甚至是对基本知识点理解的扭曲所造成的.

例如，许多学生都会背出一个结论：一个函数的导数大于零时，该函数单调增加，而函数的导数小于零时，该函数单调减少. 但他们却忘记或忽略了这一结论描述的是一个函数的

全局性质，即该结论的前提是在一个区间上考虑问题．事实上只由一点处的导数正负号，不能决定函数的增减性．由函数在一点的导数值正负号只能决定函数的局部性质：函数在该点的值与该点两侧近旁某邻域内的函数值有大小的比较关系结论，即下述性质（可用导数定义与极限的保序性进行证明）：

“设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>(0)$，则存在 $\delta>0$，使得对任意的 $x\in(0,\delta)$，有 $f(x)>f(0)$，对任意的 $x\in(-\delta,0)$，有 $f(x)<f(0)$.”

再比如，极限运算法则是所有学过微积分的人所熟悉的内容．考虑命题：

“若在某一趋向下，两个函数都有极限，则这两个函数的和与差都有极限”，

这一命题的属性是：前者是后者的充分条件，当前者不成立时，后者结论不一定没有．在考试中，大量考生在极限运算法则这个频繁考点上犯错误．原因就是他们对这类基本概念与基础知识点的理解不准确或不完整，甚至是对基本知识点的理解有所扭曲．

《导引与进阶丛书》以最简洁的篇幅梳理数学三个学科中的若干基本知识点，以及不同知识点之间的内在联系，配合适量典型的基本题型与知识交叉运用题型，引导读者与考生高效率做到对基本概念与基础知识点理解的准确性、完整性，并逐渐过渡到掌握知识的系统性与交叉运用能力的训练．对基本题目涉及的方法与技巧多做总结与分析，对综合题目中知识点交叉的模式要有具体的了解与熟悉，直到具有敏感性．这样的训练会使你遇到个别难题时容易找到切入点与思路．

本套教材每个章节均按如下格式进行编排：

知识综述与导引　依据国家考研大纲中要求的重点，对知识模块给予简短综述，突出重点，详解难点，指出读者与考生容易忽略的薄弱环节与存在的弱点，必要时给出识破命题陷阱的重要提示．

问题集粹　以学生提问的方式，由编者设计覆盖基本知识点与概念交叉运用能力的若干问题，配以解答与导引，同时针对此类问题，配合若干典型例题，力图使读者牢固掌握对相应知识点与相关题型的处理能力．

模拟与自测题　每一章后，以典型练习题方式留给读者用以训练发挥的空间，强调教学双向互动过程．在书后给出答案与提示．(做题时请不要先看答案与提示)

书中所有例题与练习题，都是经过编者精心研究与讨论，进而设计与编排所成．这一工作是基于作者在清华大学与清华大学考研辅导班的多年教学经验积累，以及对国家考试要求与试题类型深入研究的结果，具有重要的典型性与代表性．对于这些例题与练习题，读者可视自身情况选读或选做，但应注意两点：一是立足于独立思考与亲自动手练习，二是应将每一个题目作为一类问题，以达到触类旁通，以一当十，以不变应万变的目的，相信你自己会造就出属于你自己的居高临下的知识洞察力，在考场上去面对你并不陌生的试卷．

“天行健，君子应自强不息；地行坤，君子以厚德载物”（出自《易经》——中国十三经之一）．国学大师梁启超先生于 1925 年从中摘出“自强不息，厚德载物”八个字作为清华大学校训，一直延续至今．“自强不息”，无需再释．“厚德载物”乃以丰厚道德追求业务精益求精．多年来，清华大学的教师以此作为他（她）们对待工作的行为准则，尤其是对待学生．

参与本书编写的老师，均为清华大学在职教师，他（她）们是一个教学与研究成绩卓著的教授群体，长期担任清华大学考研辅导班主讲，突出特点是具有双向了解：最了解国家考

试大纲与命题走向，最了解考生的状况与需求，有许多教材与专著出版，广大考生给了他（她）们很高的评价．同时，他（她）们也愿做广大考生和学生的良师益友．基于长期丰富的教学研究与授课经验的积累，通过对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学进行长期专门的深入研究，倾心编写出这套《导引与进阶丛书》，真诚希望这套教材能为广大考生考试成功奉献一份智慧，为在读大学生的学习提供一份帮助．

《导引与进阶丛书》的读者包括参加全国硕士研究生入学统一考试的考生，包括数学试卷一、二、三、四全体应试者以及大学本科在读学生，也可作为成人自考学员的参考书．

应特别指出的是，不少人认为，经济类考生只学经济类高等数学就够了．其实这是误导．试卷三、四的历年题目表明，除个别题目有一点经济术语之外，绝大部分题目的题型与难度都与试卷一、二相当，与试卷一、二共用部分题目，也是历年常有之事．那些少量含有经济术语的题目不会成为答卷障碍，少量涉及一些经济术语的题目，如最大利润、最小成本等，不过是一般理工科数学教学中的普通例题而已，一个考生如果有较好的理工科数学基础，应答试卷三、四，将不会遇到任何困难．

教学成功的基础是教学双向互动，本教材贯穿了这一宗旨．我们对读者的建议是：在自己归纳已学知识的基础上，有选择地阅读并理解书内各章的“知识综述与导引”，包括例题分析与解答．对每章后的模拟与自测题，要立足于独立思考，动手练习，只在特别需要时，再去参考书后的答案与提示，如果你真正做到了与本教材之间的双向互动，那么成功肯定属于你．

北京水木艾迪教育研究发展有限公司与清华大学出版社的编辑们为本套教材的策划与出版做了大量有益的工作．清华大学数学科学系主管教学的李津教授，以及许多老师对本教材的编写工作给予了真诚的鼓励与支持，在此向他们真诚致谢．

限于作者水平和时间，对书内的疏漏与不当之处，敬请读者批评指正，以便重印和再版时予以改正．

编　者

2004年4月22日于清华大学

目　录

第 1 讲　预备知识与序列极限

知识综述与导引

1.1　预 备 知 识

数学的学习与数学问题的处理，要求我们必须具备一定的预备知识，包括数学符号的规范化使用，常用基本不等式的类型，函数的初等性质与初等函数的基本性态(定义域与值域，曲线的走向与关键点的坐标值，以及 $x \to \pm\infty$ 时的极限状态等)，命题表述及其逻辑属性等．概括地说，就是要培养与训练自己具备一定的数学素质．这种素质，无论对掌握数学的知识系统，还是对处理一个具体题目，或是对应试能力的全面提高，都具有潜移默化的影响．比如，数学符号的规范化使用与命题(或数学定义)的等价描述，将有助于思维的敏捷清晰及卷面表达的规范整齐(这将给阅卷人良好的第一印象)．再比如，基本不等式的灵活运用可诱发解题的重要思路，而对函数初等性质与初等函数基本性态的熟悉会导致对大多数题目的一个正确切入点，这一切入点若有错误(往往由对初等函数的基本性态理解错误或失误而导致这类切入点的错误)，则会进一步导致一个题目在解答上的全局性错误，这类错误引起的损失远远超过一个局部计算错误带来的损失．因此，对本节列出的预备知识应给予足够的重视．

1.1.1　基本不等式

1°　绝对值不等式：对任意实数 x，有 $|x| \geqslant 0$，且

$$0 \leqslant |x| + x \leqslant 2|x|. \tag{1.1}$$

2°　三角不等式：对任意实数 x 与 y 均有

$$0 \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|, \tag{1.2}$$

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y| \leqslant |x| + |y|. \tag{1.3}$$

3°　平均值不等式：对任意实数 x, y 均有不等式

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) \geqslant xy,$$

特别当 $x>0, y>0$ 时有

$$\frac{1}{2}(x+y) \geqslant \sqrt{xy}. \tag{1.4}$$

更一般地，若 $x_i > 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{1/n}. \tag{1.5}$$

4°　对 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$，有不等式

$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x. \tag{1.6}$$

5° 若 $m>n>0, k>0$,则有

$$\frac{n}{m}<\frac{n+k}{m+k}. \tag{1.7}$$

1.1.2 邻域

设 $x_0 \in \mathbf{R}$(实数集),称点集

$$N(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

为 x_0 的(一维)δ 邻域,其中 $\delta>0$. 而称点集

$$N^*(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

为 x_0 的去心 δ 邻域.

对多维情形,设 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$,其邻域与去心邻域分别定义为

$$N(\boldsymbol{x}_0,\delta)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)<\delta\},$$

$$N^*(\boldsymbol{x}_0,\delta)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid 0<\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)<\delta\},$$

其中 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)=\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2\right]^{1/2}$,称为两点 $\boldsymbol{x}_0$ 与 $\boldsymbol{x}$ 的距离,x_i 与 x_{i0} 分别为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}_0$ 的分量.

1.1.3 两条重要公理与命题的逻辑类型

对实数点集,有一系列公理. 在学习微积分或准备硕士研究生入学考试的复习中,有两条公理应予以注意,在一些场合它非常有用.

公理 1° 比较公理 对于任意实数 x 与 y 的比较关系,在 $x>y, x<y, x=y$ 三者中有且仅有一款成立.

2° 无穷有界实数点集 E 必有最小的上界与最大的下界.

所谓实数点集 E 有界是指 E 既有上界,又有下界,比如,对任意 $x\in E$,若 $\exists M\in\mathbf{R}$,使 $x\leqslant M$,则称 E 有上界,同时称 M 为 E 的上界. 类似可给出下界的描述.

公理 1° 常常成为处理不等式或等式证明的理论根据. 作为逻辑思维的练习,读者可考虑下述命题的正确性:

1° 对于数学常量 A(可以是一个表达式),若对任意的正数 ε 均有 $|A|<\varepsilon$,则必有 $A=0$.

2° 对于数学常量 A(可以是一个表达式),$|A|=0$ 的充分必要条件(可以说是二者互为等价命题)是 $A=0$.

关于命题的逻辑类型有以下四种:

1° 若 A,则 B(称 A 为 B 的充分条件,或 B 为 A 的必要条件).

2° 若 B,则 A(1°的逆命题).

3° 若 A 非,则 B 非(1°的否命题).

4° 若 B 非,则 A 非(1°的逆否命题).

其中,1°称为原命题,原命题总是与其逆否命题同时为真,在学习数学中的命题时,应从命题的

叙述中立即判断出该命题的逻辑类型:是充分的,还是必要的?或是充分必要的(等价条件)?另外,任何一款数学定义均必构成充分必要条件,因此在应用定义时,可双向应用.

1.1.4　函数及其初等性质

函数 $y=f(x)$(一家为单值函数)的常用表达记号为 $f:X\to Y\subset\mathbf{R}$,其中 $X\subset\mathbf{R}$.

复合函数是指,对 $X,Y,U\subset\mathbf{R}$,满足

$$f:U\Rightarrow Y,\text{即 } y=f(u),$$
$$g:X\Rightarrow U,\text{即 } u=g(x).$$

$u=g(x)$的值域 U 为 $y=f(u)$定义域 U^* 的子集(非真子集),即 $U\subseteq U^*$,在特定情况下有 $U=U^*$.

反函数:$y=f(x)$的反函数常记为 $x=f^{-1}(y)$或 $y=f^{-1}(x)=g(x)$,前者变量记号未换,而后者则换了变量记号,即 $y=f(x)$的反函数为 $g(x)$,此时有 $f(g(x))=x$,或 $g(f(x))=x$.

另外,互为反函数的一对函数,在换了记号的前提下,它们的两条曲线有对称轴 $y=x$,并且它们的定义域与值域具有对偶性,即 $y=f(x)$的定义域 X 为其反函数 $y=g(x)$的值域,反之亦然.

以下是函数的初等性质.

(1)单调性

对任意两点 $x_1,x_2\in[a,b]$.当 $x_1<x_2$ 时,若恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上为单调增函数(非严格).若取消不等式中的等号,该函数为严格单调.若所论不等式反号,则称之为单调减函数.

判断方法包括初等方法(减法或除法,当用除法判断增减性时,前提是 $y=f(x)$恒取定号,即恒大于零或恒小于零)与解析方法(利用导数的正负号判断增减性,这是拉格朗日中值定理导致的方法).

(2)周期性

对任意实数 $x\in X$,若 $\exists\, T_1>0$ 使得 $f(x+T_1)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$在 X 上为周期函数.一般讲,最小周期 $T=\min\left\{T_i \,\middle|\, i=1,2,\cdots\right\}$称为函数的周期.

周期性是函数的一种特定性质,在积分运算中有特殊的作用,并且,以周期函数 $u=u(x)$为中间变量的连续函数 $y=f(u)=f(u(x))$亦为周期函数,例如 $y=e^{\sin x}$的周期为 2π.

(3)奇偶性与对称性

$\forall x\in(-a,a)(a>0)$或$(-\infty,+\infty)$,若满足 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$为偶函数;而当满足 $f(-x)=-f(x)$时,则称 $y=f(x)$为奇函数.

对两个具有奇偶性的函数之积,其奇偶性有确定的结论;以偶函数 $u=u(x)$为中间变量的连续复合函数 $y=f(u(x))$仍为偶函数;偶函数没有反函数(在对称区间上);对连续奇函数 $y=f(x)$,必有 $f(0)=0$;并且,它以奇函数 $u=u(x)$为中间变量的复合函数 $y=f(u(x))$仍为奇函数.

一元函数的奇偶性在对称区间$[-a,a]$上的积分具有特定结果,并且,这种性质在多元函数的积分中亦有重要的应用,这便是对称区域上多元函数的对称性.例如,在单位圆围成的区域 $D=$

$\left\{(x,y)\in R^2 \middle| x^2+y^2\leqslant 1\right\}$上,函数 $z=\dfrac{1}{1+e^{xy}}$在子区域 $D_1=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\right\}$与子区域 $D_2=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant 1,x\leqslant 0,y\leqslant 0\right\}$上具有对应相等的取值. 在子区域 $D_3=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\leqslant 0\right\}$与子区域 $D_4=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant 1,x\leqslant 0,y\geqslant 0\right\}$上具有对应相等的函数值. 由此可判定二重积分

$$\iint_D \frac{1}{1+e^{xy}}d\sigma = 2\iint_{D_1} \frac{1}{1+e^{xy}}d\sigma + 2\iint_{D_4} \frac{1}{1+e^{xy}}d\sigma.$$

以上对称性在二重积分、三重积分、曲线、曲面积分中均可得到重要应用.

更加广义的对称性有如下结果.

若 $y=f(x)$的图形有对称轴 $x=a$,则对任意实数必有

$$f(a-x)=f(a+x),$$
$$f(t)=f(2a-t),t=a-x.$$

若 $y=f(x)$的图形有对称中心$(a,0)$,则对任意实数必有

$$f(a-x)=-f(a+x),$$
$$f(t)=-f(2a-t),t=a-x.$$

对以上两种情形,分别令 $\varphi(x)=f(a-x)$,则 $\varphi(x)$分别具有奇偶性(前者 $\varphi(x)$为偶函数,后者 $\varphi(x)$为奇函数). 这类性质在分析与计算积分问题时也有重要用途.

(4)有界性

常用函数有界的描述有以下三种.

1° 在区间上有界:若 $\forall x\in[a.b]$(或(a,b)),均有 $M>0$,使$|f(x)|\leqslant M$,则称 $y=f(x)$在$[a,b]$上有界.

2° 在 x_0 附近有界(或 $x\to x_0$ 时有界):若存在 x_0 的一个邻域 $N(x_0,\delta)$及常数$M>0$,使对任意 $x\in N(x_0,\delta)$满足$|f(x)|\leqslant M$,则称 $y=f(x)$在x_0 附近有界.

3° $x\to\infty$时有界:若存在 $x_1>0$ 及常数 $M>0$,使当$|x|>x_1$ 时恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称 $y=f(x)$在$x\to\infty$时有界(注:$x\to\infty$包括 $x\to+\infty$与 $x\to-\infty$).

掌握有界性的描述方法是重要的基础训练.

1.2 序列极限

极限的概念与方法是分析与处理微积分的方法与工具,是全局性的基础.

本节内容的重点是对极限定义与概念的理解,极限的性质及运算规则的应用.

1.2.1 定义与等价性描述(有限极限,无穷小量,无穷大量)

考虑序列$\left\{a_n \middle| n=1,2,\cdots\right\}$,若$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$及常数$A$,使当 $n>N$ 时,恒有$|a_n-A|<\varepsilon$,则称序列 a_n 以A 为极限$(n\to\infty)$,记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. 特别地,当 $A=0$ 时,称 a_n 为$n\to\infty$时的无穷小量.

还可有如下等价性描述:

1° $\forall \varepsilon>0, \exists N$ 与常数 A,使当 $a_n \in \left\{a_n \middle| n>N\right\}$ 时,恒有 $a_n \in N(A,\varepsilon)$.

2° $a_n = A + \alpha_n$,其中 $\alpha_n \to 0 (n\to\infty)$.

当如上的常数 A 不存在时,称 $\{a_n\}$ 没有极限.

特别提示　对任何极限等式 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 的理解应包括两层含义:首先极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在,其次才是该极限值等于 A.任何一个极限等式与其他数学等式的差别即在于此.

若对任意(任意大)$M>0, \exists N$,使当 $n>N$ 时,恒有 $|a_n|>M$,则称 a_n 为无穷大量($n\to\infty$),记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

在某些具体情形下,应注意区别正负无穷大量.

1.2.2　运算性质

当极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ 均存在时,有下列等式成立.

1° $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = cA$,$c$ 为常数.

2° $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$.

3° $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$.

4° $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}, B\neq 0, b_n \neq 0$.

特别提示　以上运算性质均为充分条件的命题,当 a_n, b_n 极限不存在时,运算结论为不定,需对具体问题进行具体分析.极限运算性质在应用中的错误是常见错误,应特别注意.

1.2.3　解析性质

1° 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A>0$,则 $\exists N$,使当 $n>N$ 时,恒有 $a_n>0$(保序性,亦称为保号性).

2° 若 $\exists N$,使当 $n>N$ 时,$a_n \geqslant 0$(或 $a_n>0$),且极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 存在,则有 $A\geqslant 0$(保序性,亦称为保号性).

3° 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 存在,则 $\{a_n\}$ 有界(有界性).

4° 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,则常数 A 惟一(惟一性).

特别提示　在上述性质中,保序性在许多场合下都有重要应用,建议读者练习利用极限定义证明保序性.惟一性常用于求极限(见例 1.2).

1.2.4　极限存在的三个准则

(1)单调有界准则

若 $\{a_n\}$ 单调增加(减少)且有上界(下界),则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

(2)夹逼准则

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$,且对 $\{c_n\}$ $\exists N$ 使当 $n>N$ 时,满足 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$,则 $\{c_n\}$ 的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

(3)无穷小量与有界序列乘积准则

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\{b_n\}$ 有界,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ 存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

特别提示 在极限运算中,无穷大量不可以参与四则运算,常用方法是将无穷大量化为无穷小量,而无穷小量可以进行运算.

1° 有限个无穷小量的和与积仍为无穷小量.

2° 无穷大量的倒数(分母不能为零)为无穷小量.

3° 无穷小量的比(分式)为不定型(见第2讲).

4° 涉及到序列的复合极限形式,可用复合极限准则(见第2讲).

5° 应熟悉无穷小量(或无穷大量)的比较与排序,并记住若干结论,在适当场合可直接引用,如:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,a>0, \tag{1.8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1, \tag{1.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0, \tag{1.10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{a^{n}}=0,\alpha>0,a>1, \tag{1.11}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n}}{n!}=0, \tag{1.12}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n}}=0. \tag{1.13}$$

常用的无穷大量由低阶到高阶排序有

$$\mathrm{e}_n^{\lambda} n(\lambda\geqslant 1),n^{\alpha}(\alpha>0),a^{n}(a>1),n!,n^{n}.$$

此外,还有重要极限(由单调有界准则证明)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)n=\mathrm{e}. \tag{1.14}$$

问题集粹

问题 1.1

如何意识到应用基本不等式?

解答与导引 对不等式的证明,极限的存在性讨论,级数的收敛性讨论,广义积分收敛性判断,积分式的估值(包括定积分与重积分、曲线曲面积分)等类型问题,都应根据问题自身的特点及相关初等函数的类型,联想到是否可有相应的基本不等式可以引用,成功的引用往往需要对基本不等式进行适当变形,尤其是对变量记号及复合函数表达式的灵活运用,将是成功引用基本不等式的关键.

例 1.1 设 $x\in(1,\mathrm{e})$,则正确的是(　　).

(A) $\sin(\ln x)<\ln x$　　(B) $\sin(\ln x)>\ln x$

(C) $\sin(\ln x)\leqslant\ln x$　　(D) (A)、(B)、(C)均不对

解 当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时,$0<\ln x<1<\frac{\pi}{2}$,因此应选(A). [解毕]

注 不等式(1.6)中的等号仅在 $x=0$ 时成立.