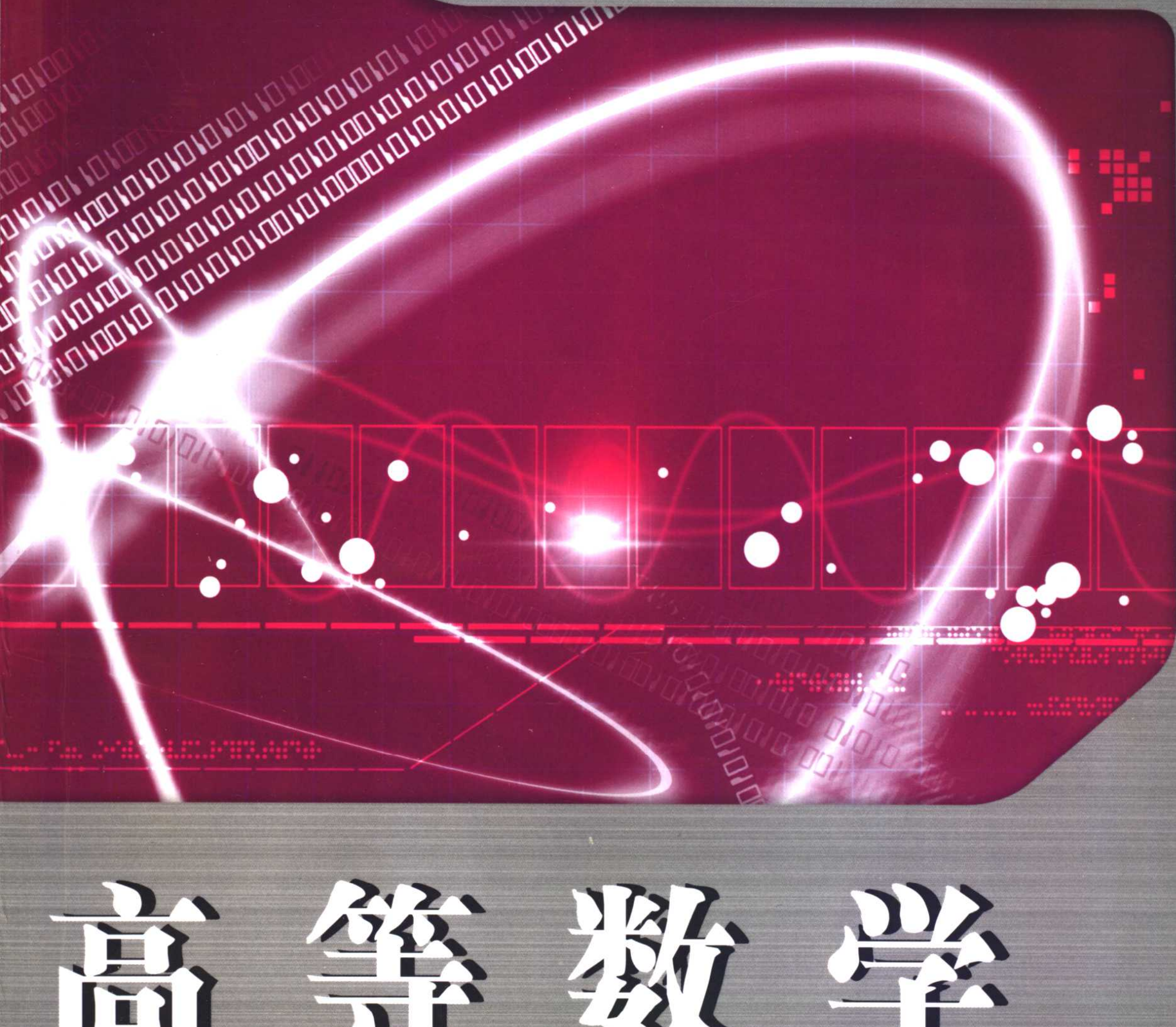
21世纪高职高专基础课教材系列



高等数学

西安欧亚学院高等数学教研室　编著

同济大学出版社

21世纪高职高专基础课教材系列

高等数学

西安欧亚学院高等数学教研室　编著

同济大学出版社

内容简介

本书根据教育部制订的"高职高专数学教学基本要求"，由从事多年高职高专高等数学教学工作的一线教师执笔编写. 全书系统讲解高职高专高等数学的基础知识和基本方法，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理及其导数的应用，不定积分，定积分，微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分与无穷级数. 本书共分 10 章，每章又分若干节，每节配有练习题，每章后有总复习题，书末附有参考答案及积分表等附录内容。

本书理论系统，举例丰富，讲解透彻，难度适宜，适合作为高职高专各专业的高等数学课程的教材使用，也适合同等于高职高专及以下层次学校的专业选用为教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/西安欧亚学院高等数学教研室编著.
—上海：同济大学出版社，2005.8
(21 世纪高职高专基础课教材系列)
ISBN 7-5608-3080-3

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 西…　Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 064723 号

21 世纪高职高专基础课教材系列
高等数学
西安欧亚学院高等数学教研室　编著
责任编辑　曹　建　责任校对　杨江淮　封面设计　潘向蓁

出版发行	**同济大学出版社**
	(上海市四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021—65985622)
经　销	**全国各地新华书店**
印　刷	**苏州望电印刷有限公司印刷**
开　本	787mm×960mm　1/16
印　张	25
字　数	500 000
印　数	1—4 100
版　次	2005 年 8 月第 1 版　　2005 年 8 月第 1 次印刷
书　号	ISBN 7—5608—3080—3/O·279
定　价	37.00 元

前　言

本教材是根据教育部制订的“高职高专数学教学基本要求”,在认真总结西安欧亚学院等几所学校几年来高职高专有关专业的高等数学课程教学经验的基础上,经过编者认真讨论编写而成.全书共分10章,主要内容包括:函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理及其导数的应用,不定积分,定积分,常微分方程,向量代数与空间解析几何简介,多元函数微分学,重积分及无穷级数.

本书在编写过程中,充分考虑了高职高专教育改革发展的新形势和高职高专培养应用型人才的实际需要,在内容上力求突出其基础性、应用性与工具性,充分体现“以专业应用为目的,以够用为度”的原则.本书对难度大的基础理论,只给出定理,不追求严格证明,适度注意数学自身的系统性与逻辑性,重点突出基本概念、基本计算和基本知识,致力于培养学生的逻辑思维能力和分析、解决实际问题的能力;对每个概念都给出了产生的实际背景,每节后面都配有练习题,每章最后都配有习题,书末附有练习题和习题答案.本教材可供高职高专有关专业使用.对于书中带有“*”号的章节,各学校可根据专业教学需要选用.

本书由张文新教授主编,董铁铮教授、程红萍老师副主编.西安欧亚学院副院长钟忠銮教授对本书的编写给予了大力支持和亲切指导,并提出了许多具体要求和宝贵意见.张新锋同志编制了全部练习题与习题.本书能顺利出版,承蒙西安欧亚学院领导、同济大学出版社的大力支持,在此一并表示感谢.

由于我们的水平有限,书中难免有不妥甚至错误之处,欢迎读者指正.

编　者

2005年5月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，在自然科学、工程技术及社会与经济研究中有着广泛的应用；极限理论在高等数学中占有重要的地位. 本章将在中学代数关于函数知识的基础上进一步介绍函数的概念，研究极限及其基本计算方法，并讨论函数的连续性.

第一节　预备知识

在预备知识中，主要介绍实数与数轴，实数的绝对值. 在本书中，除特别声明外，数都是指实数，凡超出实数范围则认为没有意义.

一、实数与数轴

实数分有理数和无理数两大类，有理数包括零、正负整数和正负分数，换句话说，有理数一定能够写成比值$\dfrac{p}{q}$的形式，其中 p 和 q 为整数，且 $q \neq 0$；除了有理数以外，还有另一类不能写成比值形式的数，这类数就是无理数，例如$\sqrt{2}$，圆周率 π 等都是无理数.

以上还说明，有理数可表示为整数或有限小数或无限循环小数，而无理数只能表示成无限不循环小数.

实数有如下一些主要性质：

（1）实数是有序的，即任意两个实数，必须满足下列三个条件之一：$a<b$，$a=b$，$a>b$.

（2）实数对加、减、乘、除（除数不为零）运算是封闭的，即对任意两个实数施行这四种运算仍得实数.

（3）全体实数组成的集合叫实数集，记作 **R**. 实数集 **R** 具有稠密性，即任意两个不相等的实数之间既存在有理数，也存在无理数.

（4）一条直线规定了原点、方向和单位长度之后就是数轴（图 1-1），数轴上每个点都惟一地对应一个实数，反之，每一个实数都惟一地对应数轴上一个点. 也就是说，实数与数轴上的点存在一一对应关系.

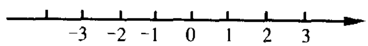


图 1-1

数轴上表示有理数的点称为有理点，且任何两个不同的有理点之间存在有理点. 数轴上表示无理数的点称为无理点. 今后，我们对数和点将不加区别，把“数 x_0”和“点 x_0”看成是一回事.

二、实数的绝对值

定义 1　实数 x 的绝对值记为 $|x|$，定义

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{当 } x>0,\\ 0, & \text{当 } x=0,\\ -x, & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义是点 x 到原点的距离. 根据实数绝对值的定义，$|x|\geqslant 0$，且只有 $x=0$ 时，$|x|=0$. 对于任意两个实数 x 和 y

$$|x-y|=\begin{cases}x-y, & \text{当 } x>y,\\ 0, & \text{当 } x=y,\\ y-x, & \text{当 } x<y.\end{cases}$$

$|x-y|$ 的几何意义是点 x 到点 y 的距离.

根据实数绝对值的定义，绝对值有如下性质：

(1) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

(2) $|x|<k$ 等价于 $-k<x<k$　$(k>0)$.

(3) $|x|>k$ 等价于 $x>k$ 或 $x<-k$　$(k>0)$.

(4) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$.

(5) $|x|-|y|\leqslant |x-y|$.

(6) $|xy|=|x||y|$，一般地 $|x_1x_2\cdots x_n|=|x_1||x_2|\cdots|x_n|$.

(7) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$　$(y\neq 0)$.

下面给出性质(4)和(5)的证明，其余留给读者自己证明. 先证性质(4).

由绝对值性质(1)可知

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|,$$

$$-|y|\leqslant y\leqslant |y|.$$

两式相加得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|,$$

由性质(2)得

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|.$$

显然

$$|x_1+x_2+x_3|\leqslant|x_1+x_2|+|x_3|\leqslant|x_1|+|x_2|+|x_3|.$$

一般地有

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_3|.$$

再证明性质(5)

由于$|x|=|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|$,移项后得

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|.$$

练习 1.1

1. 去掉下列绝对值的符号.

(1) $3-|x-1|$;　　(2) $|9-x^2|$.

2. 解下列绝对值不等式(x_0 为常数,$a>0,\delta>0$).

(1) $|3x-5|\geqslant 10$;　　(2) $|ax-x_0|<\delta$.

3. 用区间表示下列不等式的解集.

(1) $x^2-15x+56\leqslant 0$;　　(2) $a^2<x^2<b^2\quad(0<a<b)$.

第二节　函数的概念

一、常量和变量

在研究自然现象和社会现象中要遇到许多不同的量,尽管这些量多种多样,但大体可分为两类:一类是在某一问题的讨论中始终相对保持不变的量,这些量称为**常量**;另一类是可以变化的量称其为**变量**.

常量和变量的划分是相对的,也就是说,一个量是常量还是变量不是绝对的,它与所考察的具体过程有关.同一个量,在某一过程中是常量,而在另一过程中可能就是变量,反之亦然.例如,自由落体运动中的重力加速度 g,在地面附近可以看作常量,而在高空落下的全过程中它是变量.如果把变量看作在某一过程中任意取值的量,那么常量就是变量的特例.

在数学中,通常用英文字母表示量.a,b,c 等用于表示常量,x,y,z,t,u 等用于表示变量.如果把量取值为数,在数轴上表示为一个点,常量在数轴上表示为一定点;变量在数轴上则表示为一个动点,且这个动点随着变量的不同取值不断改变它在数轴上的位置.

二、区间和邻域

1. 区　间

区间是一类实数集合，设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，则称实数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为开区间，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

类似地，闭区间和半开闭区间的定义和记号为：

闭区间　$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开闭区间　$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 或 $(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$.

以上区间都称有限区间，a，b 称为区间的端点，数 $b-a$ 称为区间的长度，在数轴上，这些区间都可以用长度为有限的线段来表示，如图 1-2 所示（图中，实心点表示区间包括该端点，空心点表示区间不包括该端点）.

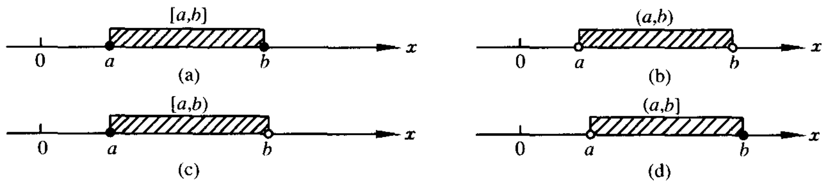


图 1-2

还有一类区间称为无限区间，它们的定义和记号为：

$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\},\quad (a,+\infty)=\{x \mid x>a\},$$

$$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\},\quad (-\infty,b)=\{x \mid x<b\}.$$

其中，记号 $+\infty$，读作“正无穷大”；记号 $-\infty$，读作“负无穷大”.

这些区间都可用半射线来表示，如图 1-3 所示.

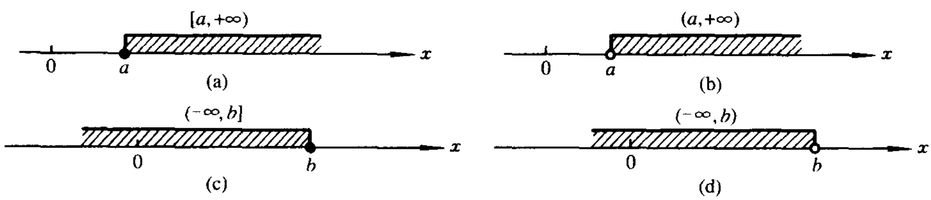


图 1-3

无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 在数轴上对应于整个数轴.

2. 邻　域

定义 2　**设** a **和** δ **是两个实数,且** $\delta>0$**,数集** $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ **称为点** a **的** δ**-邻域(图 1-4),记作** $U(a,\delta)$**,点** a **称为邻域的中心,**δ **称为邻域的半径,即**

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

如果把邻域的中心 a 去掉,数集 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 称点 a 的空心 δ-邻域(图 1-5 所示),记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\} \quad (\text{注意},0<|x-a|\text{表示了 } x\neq a.)$$

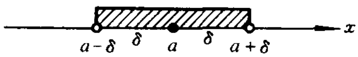


图 1-4

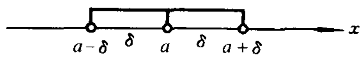


图 1-5

三、函数的概念

先看一个例子,设正方形的边长为 x,面积为 S,则 S 随 x 的变化而变化,两者依赖关系可表示成

$$S=x^2.$$

当变量 x 在区间 $(0,+\infty)$ 内取任一值时,变量 S 按着确定的对应法则 $S=x^2$,总有惟一确定的数值与它对应,则称 S 是 x 的函数.

抛开例中变量的实际含义,抽象出变量之间的依赖关系这一实质,得到如下函数的定义.

定义 1　**设** x,y **是两个变量,**D **是给定的数集. 若对于** x **在** D **内每取一个数值,变量** y **按照一定的对应法则** f**,总有确定的数值与它对应,则称** y **是** x **的函数,记作** $y=f(x)$**.**

其中数集 D 为函数 $f(x)$ 的**定义域**,记作 D_f,即 $D_f=D$. x 为**自变量**,y 为**因变量**.

当 x 在 D_f 内取定某个数值 x_0 时,对应的 y 取到的数值 y_0 称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值,记作

$$y_0=f(x_0).$$

当 x 在定义域 D_f 内取遍每一个值,对应的函数值的全体组成的数值,称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**,记作 R_f,即

$$R_f=\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}.$$

关于函数概念有如下几点说明.

(1) 对应法则 f 和定义域 D_f 是确定一个函数的两个重要因素. 也是判定两个函数是否为相同函数的依据. 如果两个函数的对应法则相同,定义域相同,那么这两个函数就是相同的函数,而与自变量和因变量用什么符号表示无关.

例如函数 $y=\sqrt{x}$ 与 $s=\sqrt{t}$,虽然变量表示的符号不同,但对应法则和定义域却相同,这两个函数表示同一个函数.

(2) 函数定义域的确定:如果函数是由数学表达式表达的,那么定义域是使函数表达式有意义(成立)的 x 的取值范围,并称为自然定义域. 但如果函数有实际意义,则需要根据实际问题确定定义域.

如函数 $y=x^2$ 的自然定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$. 如果这一函数表示正方形面积 y 与边长 x 的关系,则它的定义域为 $D_f=(0,+\infty)$.

(3) 函数定义中,没有指明有几个确定的 y 值与 x 值对应. 如果对每一个 $x\in D_f$,总有惟一确定的 y 值与 x 对应,称函数为单值函数,如果有两个或两个以上确定的 y 值与 x 对应,则称函数为多值函数.

例如,方程 $x^2+y^2=1$,当 x 在闭区间$[-1,1]$上除端点 $x=\pm 1$ 外,每取一个数值,由对应法则 $x^2+y^2=1$,y 总有两个确定的数值与 x 对应,所以,方程 $x^2+y^2=1$ 确定了 y 是 x 的多值函数. 如果限定 $y>0$ 或 $y<0$,就会得到两个单值函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 或 $y=\quad\sqrt{1-x^2}$,称为多值函数的两个单值支.

本课程所讨论的函数,除特别说明外,都是指单值函数.

(4) 表示函数主要有**图形法**、**表格法**、**公式法**三种方法. 例如,用图形表示某人从甲地到乙地行驶的路程与时间的关系. 用表格统计某单位各部门捐款的情况. 用公式表示圆的面积与半径的关系等. 图形法和表格法直观、简明,但有时不便于作抽象研究. 公式法的优点是适宜理论上的推导、论证,但有时比较抽象,不易理解. 因此研究函数时,往往将公式表达与图形表示相结合.

例 1 求函数 $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$的定义域.

解 要使函数有意义,x 应满足以下不等式

$$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ x-3\neq 0,\\ 5-x>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\geqslant 2,\\ x\neq 3,\\ x<5,\end{cases}$$

取其公共部分，函数的定义域为$[2,3)$，$(3,5)$.

例 2 确定函数表达式.

(1) 设 $f(x)=x^2+3x-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}$，求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

(2) 设 $f(x-1)=\frac{x+3}{(x+1)^2}$，求 $f(x)$.

解 (1) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+3\cdot\frac{1}{x}-x^2+2x=\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-x^2+2x$.

(2) 令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，即

$$f(t)=\frac{(t+1)+3}{[(t+1)+1]^2}=\frac{t+4}{(t+2)^2},$$

所以
$$f(x)=\frac{x+4}{(x+2)^2}.$$

例 3 求函数 $y=\frac{1}{x+1}$的定义域.

解 要使函数有意义，x 应满足

$$x+1\neq 0,$$

即
$$x\neq -1,$$

故函数定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

例 4 已知符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$求定义域 D_f，值域 R_f，并画它的图形.

解 符号函数表达式的特点是当自变量 x 在不同的取值范围内变化时，其对应法则用不同的表达式表示，但它仍表示一个函数，称这样的函数为分段函数，分段函数要分段求值，分段作图，要根据 x 的具体取值范围，选取相应的表达式表示函数. 显然符号函数是分段函数. $D_f=(-\infty,+\infty)$，$R_f=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-6 所示. “$x=0$”是函数的“分段点”，且图形在 $x=0$ 处断开，所以函数在 $x=0$ 处可能发生性质的变化.

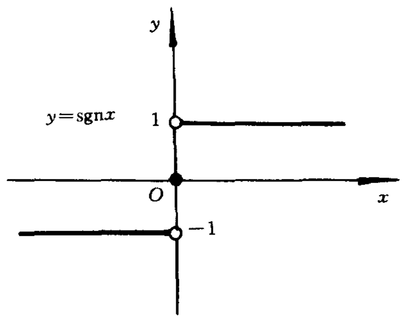


图 1-6

对任何 $x\in D_f=R$,有 $|x|=x\cdot \operatorname{sgn}x$. 由这一公式,自然会理解符号函数名字的由来.

四、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 上有定义. 如果存在某一正数 M,使得对于任意 $x\in I$,都有不等式

$$|f(x)|\leqslant M.$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界**. 如果这样的 M 不存在,则称 $f(x)$ 在 I 上**无界**.

特别要强调的是,一个函数在它的定义内,可能在部分范围有界,在部分范围无界.

例如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界,即 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$,但在 $(0,1)$ 内,$y=\dfrac{1}{x}$ 无界. 当然它在定义域内无界.

2. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上**单调增加**,称区间 I 为**单调增加区间**;如果当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上**单调减少**,并称区间 I 为**单调减少区间**. 单调增加函数的图形随着 x 的增大,呈现上升趋势,单调减少函数的图形随着 x 的增大,呈现下降趋势. 单调递增、单调递减函数统称为**单调函数**.

例如,$y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)\subset D_f$ 内单调增加,在 $(-\infty,0]\subset D_f$ 内单调减少,但在 $D_f=(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称,若对任意的 $x\in D_f$,函数 $f(x)$ 恒满足 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**;若对任意的 $x\in D_f$,$f(x)$ 恒满足 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 偶函数的图形关于 y 轴对称;奇函数的图形关于原点对称. 但是,有时函数 $f(x)$ 有可能既不是偶函数,又不是奇函数,即为**非奇非偶函数**. 例如,$y=x^2$ 是偶函数,$y=x^3$ 是奇函数,$y=x^2+\sin x$ 是非奇非偶函数.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f,如果存在非零实数 T,使得对任意 $x\in D_f$,有 $x+T\in D_f$,且

$$f(x+T)=f(x).$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 为 $f(x)$ 的**周期**. 通常周期函数的周期是指它的**最小正**

周期. 但也有例外,即不是任何函数都有最小正周期.

例如, $y=\sin x$, $y=\cos x$ 都是周期函数,周期都是 2π; $y=\tan x$, $y=\cot x$ 也都是周期函数,周期都是 π.

周期函数的图形具有在每一个周期长度的区间内形状相同的特点,所以,只要画出一个周期长度区间内的图形,再通过图形的左、右平移即可得到整体图形,并且可以研究一个周期长度区间内函数的性质,推及整体性质.

例 5 指出函数 $f(x)=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$ $(a>0, a\neq 1)$ 的奇偶性.

解 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq 0$ 的一切实数,并且

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\frac{1+a^x}{1-a^x}=-\frac{a^x+1}{a^x-1}=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

五、反函数与复合函数

1. 反函数的概念

定义 2 **设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f,值域为 R_f. 若对任意 $y\in R_f$ 通过 $y=f(x)$,总有确定的 $x\in D_f$ 与之对应,这时得到以 y 为自变量,x 为因变量的新函数 $x=\varphi(y)$,称这样确定的新函数为 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$,并称原来的函数 $y=f(x)$ 为直接函数.**

习惯上, $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$,且定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$,值域 $R_{f^{-1}}=D_f$.

反函数也有单值与多值之分,除特别指明外,主要研究直接函数与反函数都是单值的情况. 即这时直接函数才有反函数,否则,直接函数就没有反函数. 例如,函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内有 $x=\pm\sqrt{y}$,所以反函数为多值函数,也就是说 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内没有反函数.

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称,从图形上可以了解它们将有十分相似的性质. 例如,有如下定理:

定理 1 **若直接函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单值,则它的反函数必存在,且也是单值的. 证明从略. 本定理称为反函数存在定理.**

2. 复合函数的概念

定义 3 **设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ,且 R_φ 与 D_f 的交集非空,即 $R_\varphi\cap D_f\neq\varnothing$,则变量 y 通过变量 u 确定为变量 x 的函数,并称这一函数是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$. 称变量 u 为中间变量.**