

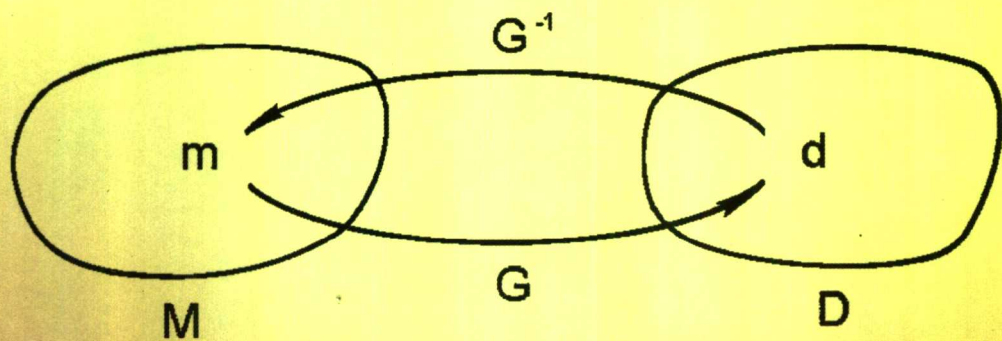
● 中国地质大学「211」工程建设重点资助  
『地球物理勘查系列课』教材

# 地球物理反演

## 基本理论与应用方法

姚 姚 主编

中国地质大学出版社



中国地质大学“211”工程建设重点资助“地球物理勘查系列课”教材

# 地球物理反演基本理论 与应用方法

姚 姚 主编

中国地质大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

地球物理反演基本理论与应用方法/姚姚主编. —武汉: 中国地质大学出版社, 2002. 8  
ISBN 7-5625-1708-8

- I. 地…
- II. 姚…
- III. 地球物理-反演-理论-方法
- IV. P312

地球物理反演基本理论与应用方法

姚 姚 主编

责任编辑: 高勇群

技术编辑: 阮一飞

责任校对: 张咏梅

出版发行: 中国地质大学出版社 (武汉市洪山区鲁磨路 31 号)

邮编: 430074

电话: (027) 87483101 传真: 87481537 E-mail: cbo@cug.edu.cn

开本: 787mm×1092mm 1/16

字数: 234 千字 印张 9.25

版次: 2002 年 8 月第 1 版

印次: 2002 年 8 月第 1 次印刷

印刷: 中国地质大学出版社印刷厂

印数: 1—1 000 册

ISBN 7-5625-1708-8/p·584

定价: 20.00 元

如有印装质量问题请与印刷厂联系调换

# 序 言

地球物理勘查系列课程是地球物理学专业和应用地球物理专业的主干专业课程，也是新调整后的地矿类工科本科专业的主要专业基础课之一。

自 20 世纪 50 年代初到 90 年代末，我国的应用地球物理专业课程的课程体系基本上与前苏联类似，专业课程主要按重力、磁法、电法、地震和测井五门课分别讲授，学科和专业分得较细，教学内容较窄。结果培养的科研人员越来越专，这对促进科技快速纵向发展起到了积极作用，但不利于学科交叉和学科综合的发展。另外，重力、磁法、电法、地震、测井五门课程内容之间也存在着某些重复。随着科学技术的发展，专业课的教学内容也需进一步更新。

随着我国由计划经济逐渐向市场经济过渡，国内应用地球物理专业为适应市场经济的需要，都在积极地进行拓宽专业、加强基础和增强适应性的教学改革和研究。长期以来，中国地质大学（武汉）地球物理系应用地球物理专业的教学人员为了适应国民经济发展的需要，坚持教学改革，在不同的历史时期，进行了教学思想、内容和方法的改革，课程结构有所变化，教学内容有所更新。这些改革促进了师资队伍的建设，为深入教学改革打下了基础。经过广泛调研和充分地讨论，我们认为以系列课的建设来优化地球物理专业课程体系和教学内容是比较好的，并以教学立项促进教材建设，以张胜业为负责人的“应用地球物理系列课程建设”教学研究项目已列入 1997 年湖北省教委的研究项目和中国地质大学重点教学改革研究项目。

所谓系列课程的建设，是指为了向学生传授某一方面相对完整的知识或比较全面训练学生某一方面的能力，而把教学内容密切相关、相互之间有必然联系的若干门课程组织在一起，从总体上确定每一门课程的教学目标、教学内容和教学方法。

应用地球物理系列课程建设的指导思想是：①系统地向学生传授应用地球物理的基础知识，使学生知识面较宽、专业基础扎实、适应性较强；②优化课程体系和教学内容，避免不必要的重复，提高学生的学习效率，减轻学生的学习负担；③加强各学科综合和交叉，发挥学生潜能、特长和创造性思维。

应用地球物理专业课程的系列课程建设可分为纵向和横向两种，这套教材为纵向系列课程教材。建立纵向系列课程的目的，就是将重力、磁法、电法、地震、测井五门课中带有基础和共性的内容有机地结合在一起，避免不必要的重复，加强基础、综合和交叉，提高学生的学习效率，拓宽学生的专业知识面，使学生能系统地掌握应用地球物理的专业基础知识，具有一定的综合解决实际问题的能力。

纵向系列课的课程设置，按地球物理勘查原理（60 学时）、地球物理资料的采集与处理（50 学时）、地球物理反演基本理论与应用方法（40 学时）和地球物理方法的综合应用与解释（50 学时），从纵向上分为四门专业系列课程，建立一套面向 21 世纪的新的专业课程体系。

四本系列课程教材的编写工作分工如下：

- 第一篇 地球物理勘查原理 张胜业（主编）
- 第二篇 地球物理资料的采集与处理 刘天佑（主编）
- 第三篇 地球物理反演基本理论与应用方法 姚 姚（主编）

第四篇 地球物理方法的综合应用与解释 李大心（主编）

第三篇（本书）地球物理反演基本理论与应用方法共分七章，参加编写工作的有姚姚教授（第四章、第七章）、昌颜君讲师（第六章）和陈超副教授（第一、二、三、五章），全书由姚姚统编。本教材由地球物理系组织编写。编写、出版过程中得到了中国地质大学（武汉）校领导、教务处以及中国地质大学出版社的大力支持，绘图室文丽丽参加了绘图工作，在此表示谢意。

由于这套教材是第一次按新的课程体系编写，受条件、时间和水平的限制，在新教材里难免会有不妥或错误的地方，欢迎读者批评指正。

编者  
2000年12月

# 前 言

作为地球物理学的一个组成部分，地球物理反演理论的许多思想，不仅能用于解决地球物理问题，而且能用于解决其他领域（如气象预报、经济预测等）中的问题，具有广泛的适用性。因此，对地球物理反演理论的学习，具有重要的实际意义。

地球物理反演理论和方法发展至今，凝聚了历代科学家和实践者的智慧，已成为今天人们用于揭示地球这个人类身边最大自然物体之奥秘的有效工具。人类探索自然的欲望是永无止境的。地球物理反演理论及方法自电子计算机问世以来，如同添翼加翅，得到了迅猛的发展。许多过去难以实现的复杂计算，现在已能迅速而准确地完成。当今的反演理论涉及面广，建立于不同数学理论基础上的反演方法层出不穷，本书不打算作全面的概括。我们的主要目的是结合应用地球物理方法原理的教学，引入地球物理反演理论的基本概念，着重介绍应用方法，便于读者理解，并领会如何应用它解决实际问题。

全书共分七章。第一章论述了反演理论及其相关问题的一般性概念，以及彼此之间的相互关系。第二章介绍了线性反演的基本理论及方法，特别着重讨论目前最为常用的离散线性反演方法。第三章叙述了非线性反演的线性化方法。它们在目前的地球物理反演中十分实用。为了使读者全面地了解反演问题，在第四章中简明地介绍了非线性反演的有关问题和常用的方法。第五、六、七章分别综述了位场勘探、电法勘探和地震勘探中的反演问题。

# 目 录

<b>第一章 地球物理反演问题的一般理论</b> .....	(1)
§ 1.1 反演问题的一般概念 .....	(1)
§ 1.2 地球物理中的反演问题 .....	(5)
§ 1.3 地球物理反演中的数学物理模型 .....	(6)
§ 1.4 地球物理反演问题解的非唯一性 .....	(8)
§ 1.5 地球物理反演问题的不稳定性与正则化概念.....	(10)
§ 1.6 地球物理反演问题求解.....	(12)
思考题与习题 .....	(13)
<b>第二章 线性反演理论及方法</b> .....	(14)
§ 2.1 线性反演理论的一般论述.....	(14)
§ 2.2 线性反演问题求解的一般原理.....	(16)
§ 2.3 离散线性反演问题的解法.....	(24)
思考题与习题 .....	(50)
<b>第三章 非线性反演问题的线性化解法</b> .....	(51)
§ 3.1 非线性问题的线性化.....	(51)
§ 3.2 最优化的基本概念.....	(53)
§ 3.3 最速下降法.....	(55)
§ 3.4 共轭梯度法.....	(57)
§ 3.5 牛顿法.....	(60)
§ 3.6 变尺度法(拟牛顿法) .....	(60)
§ 3.7 最小二乘算法.....	(62)
§ 3.8 阻尼最小二乘法.....	(65)
§ 3.9 广义逆算法.....	(69)
思考题与习题 .....	(71)
<b>第四章 完全非线性反演初步</b> .....	(72)
§ 4.1 线性化反演方法求解非线性反演问题的困难.....	(72)
§ 4.2 传统完全非线性反演方法.....	(73)
§ 4.3 模拟退火法.....	(74)
§ 4.4 遗传算法.....	(76)
§ 4.5 其他完全非线性反演方法简介.....	(79)
思考题与习题 .....	(82)
<b>第五章 位场勘探中的反演问题</b> .....	(83)
§ 5.1 位场资料反演的几个基本问题.....	(83)
§ 5.2 直接法求位场反演问题.....	(88)
§ 5.3 单一和组合模型位场反演问题.....	(90)

§ 5.4	连续介质参数化的线性反演问题·····	(95)
§ 5.5	物性分界面的反演问题·····	(97)
	思考题与习题·····	(99)
<b>第六章</b>	<b>电法勘探中测深曲线的反演·····</b>	<b>(100)</b>
§ 6.1	直流电测深曲线的反演·····	(100)
§ 6.2	交流电测深曲线的反演·····	(110)
	思考题与习题·····	(119)
<b>第七章</b>	<b>地震勘探中的反演方法·····</b>	<b>(120)</b>
§ 7.1	地震资料反滤波处理·····	(120)
§ 7.2	波阻抗反演·····	(126)
§ 7.3	地震波速度反演·····	(130)
§ 7.4	其他地震反演·····	(134)
	思考题与习题·····	(138)
<b>参考文献</b>	·····	<b>(139)</b>



# 第一章 地球物理反演问题的一般理论

## § 1.1 反演问题的一般概念

在物理学范畴中,自然界的客观事物,大到整个宇宙,小到一个粒子,都可以视为一个物理系统。通常,一个物理系统可以用一系列的量来表征,这些量之中一部分能被直接观察或测量,另一部分则无法被直接观察或测量。例如,一块岩石的质量和体积可以直接测量,而其内部各点上的密度、导电率或刚度则无法直接测量。为了完整地认识一个物理系统,总是希望得到足够多的表征系统的量,而可直接得到的量往往十分有限,这就需要不断地发掘和研究系统中那些可直接测量的量与不可直接测量的量之间的关系,进而通过已知信息去获取一些未知信息,最终达到接近真实地描述它。这是认识世界的一个基本规律。作为一种演绎性的学科,地球物理反演问题的研究正是遵循这一规律不断发展的。为了更好地讨论问题,我们先引入几个一般性的概念。

### 1.1.1 模型空间与数据空间

选择什么样的量来描述一个物理系统不是“固有”的,换句话说,量的选择是非唯一的。每一种选择都构成系统的一个形式上的模型,我们把所有的这些“选择”抽象为一个空间(或集合),该空间中每一个点都代表一个系统模型,这个空间称为模型空间,表征系统的量称为模型参数。假设一个系统由  $n$  个实参数完全表征,系统的特征便可通过这  $n$  个实数数值体现出来。任何一个这样的模型都是  $n$  维模型空间( $\in R^n$ ) 中的一个点。可见,定量地描述一个系统,可以通过模型参数数值来实现。这种模型参数的特定选择(具体化)称为模型参数化。参数化的模型参数数量若是有限的,则模型空间是有限维的;若模型参数数量是无限的,则模型空间为无限维。例如,一个均匀的固体,仅用 21 个弹性参数即可全面地描述其弹性性质;而一个非均匀的固体,由于其弹性性质与空间坐标有关,要全面地刻画其弹性特征,则需要无限多个弹性参数。无限维空间理论比有限维空间理论更复杂,但前者的研究更具有一般性。

我们知道,一些模型参数是不容易被直接观测到的量,为获取这些量的信息,可以利用那些可直接观测的量来推测。为此,需要进行实验工作,从中观测到与模型参数有关联的量。实验工作的任务不仅是要尽可能准确地测量,更重要的是要设法使所测量的量最大限度地携带用于确定模型参数的信息。例如地球内部不同深度范围的密度难以直接测量,但地球表面的重力值与之有着密切的关系,通过精确地测量地面、空中和地下重力值,可以依据其特征推测地球内部密度的分布。由于实验的方法、设备以及观测数据的形式不同,观测量的含义有一定的自由度,为了不失一般性,我们称观测量为数据,并引入一个数据空间的抽象概念。任何一个可能的观测数据都是数据空间中的一个点或一个分量。与模型空间一样,数据空间可以是有限维的,也可以是无限维的。在大多数实际问题中,由于实验手段、时间及空间的限制,观测资料总

是有限的。

### 1.1.2 正演问题与反演问题

如果把模型空间中的一个点定义为  $m$ , 把数据空间中的一个点定义为  $d$ , 按照物理定律, 可以把两者的关系写成

$$d = Gm \quad (1-1)$$

式中,  $G$  为模型空间  $M$  到数据空间  $D$  的一个映射(如图 1-1), 亦称为泛函算子, 反映了模型  $m$  与数据  $d$  之间的物理规律。对一个特定的问题,  $m$  可以是一维或多维的参数,  $d$  也可以是一维或多维的数据,  $G$  则可以代表一个积分算子或微分算子, 也可以是一个矩阵或一个函数。通常我们把多维参数或数据表示成向量。若  $G$  是线性算子, 方程(1-1)所表示的问题是线性的, 若  $G$  是非线性算子, 则问题是非线性的。从空间映射来看, 如果存在一个映射  $A$ , 使得

$$m = Ad \quad (1-2)$$

则  $A$  为由数据空间  $D$  到模型空间  $M$  的映射, 即  $A$  为  $G$  的逆映射, 或称逆算子。因此方程(1-2)可写成:

$$m = G^{-1}d \quad (1-3)$$

式中,  $G^{-1}$  为  $G$  广义上的逆(如图 1-1)。若  $G$  为一个微分算子, 则  $G^{-1}$  为一个积分算子; 若  $G$  为一个矩阵, 则  $G^{-1}$  为其逆矩阵; 若  $G$  为一个函数, 则  $G^{-1}$  为其反函数。  $G^{-1}$  有时并不一定是某一算子或函数, 而可能是代表一个过程。

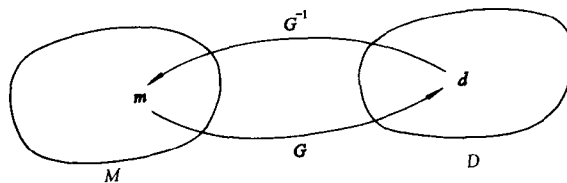


图 1-1 模型空间与数据空间之间映射关系示意图

我们把给定模型  $m$  求解数据  $d$  的过程称为正演问题(简称正问题), 而把给定数据  $d$  求解模型参数  $m$  的过程称为反演问题(简称反问题)。讨论正演问题通常涉及两个方面的内容, 一是通过实验寻求物理定律, 即确定从模型空间到数据空间的正确表达; 另一方面则是运用物理定律通过给定的模型参数对观测数据进行预测。反演问题的研究是建立在正演问题被解决之后基础上的, 若正演问题没有解决(物理定律不清楚), 一般地说, 反演问题的研究就无法开展。然而, 即使正演问题已被圆满地解决, 反演问题也不一定能得到很好地解决, 尤其是在  $G^{-1}$  无法直接确定的情况下。原因是反演问题更复杂, 涉及的问题更多。

著名的反演理论学者罗伯特·珀克(R. Parker, 1970)曾把反演问题的研究归纳为四个方面的问题:

- (1)解的存在性: 给定数据  $d$ , 按照物理定律, 能否找到满足要求的模型参数  $m$ ;
- (2)模型构制: 若解存在, 如何构制问题的数学物理模型使得反演问题的解能迅速而准确地确定;
- (3)解的非唯一性: 若解存在, 其是否唯一;
- (4)解的评价: 若解是非唯一的, 如何从非唯一解中获取真实解的信息。

关于上述四方面问题的研究就构成了地球物理反演的基本理论。

### 1.1.3 反演问题的解

在确定了模型参数与观测数据之间的关系之后,我们总是希望所得到的反演问题的解是唯一的。遗憾的是,事实并非如此。在大多数的反演问题中,都不同程度地存在着解的非唯一性。在实验中,由于受到仪器设备、时间和空间的限制,观测资料总是有限的。就无限维的模型参数而言,用有限维的观测数据去确定实际上为无限维的模型是不可能的,在这种情况下,求得解必然是非唯一的。

为了说明解的非唯一性,我们引入“零空间”的概念。假设对于给定的观测数据  $d$ ,有两个模型参数向量  $m_1$ 、 $m_2$  都满足方程(1-1),即

$$d = Gm_1, d = Gm_2$$

则有

$$Gm_1 - Gm_2 = Gm^0 = 0 \quad (1-4)$$

由于  $m_1$  和  $m_2$  是两个不同解,因此其差不等于零,我们定义满足式(1-4)的  $m^0$  为零向量,由零向量组成的模型空间为零空间。在任何包含零空间的模型空间中,只要反演问题的解  $m$  存在,解都是非唯一的。也就是说,除  $m$  之外,还存在另一个解  $m^*$ ,它与  $m$  同映射到数据的一个点  $d$  上,因为

$$Gm^* = Gm + Gm^0 = d \quad (1-5)$$

由此可见,模型空间可分为两个部分,如图 1-2 所示,它们分别由点  $m$  和  $m^0$  构成。 $m^0$  在映射  $G$  作用下的像为零向量或零函数。

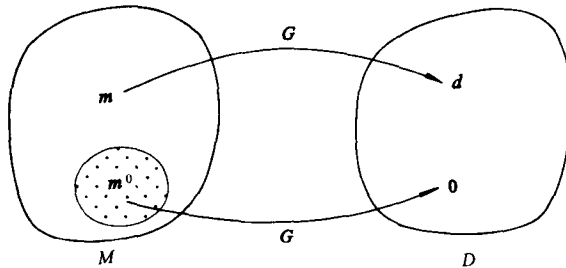


图 1-2 模型空间中零空间与数据空间之间映射关系示意图

现在,我们来分析一个简单的例子。设

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad m = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

且有

$$Gm = \beta$$

其中,  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$  为待定参数。

显然,方程(1-6)有一个解  $m = [\beta \ \beta \ \beta \ \beta]^T$ ,同时至少可以找出三个“零解”:

$$m_1^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, m_2^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, m_3^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

如此一来,作为一般性的通解, $m$  可以表示成

$$m = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

式中, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为任意不为零的参数。虽然这是一个简单的线性问题,但是它说明了反演问题解的非唯一性普遍存在于线性与非线性反演问题之中。

由于可能受到其他因素干扰,实验中的数据往往含有误差,测量到的数据  $d_c$  中包含有真实信号  $d$  和“噪声” $\delta d$  两种成分,即

$$d_c = d + \delta d \quad (1-8)$$

由于误差  $\delta d$  的存在,必将使反演问题的解也产生一个扰动  $\delta m$ ,这样,反演问题的解同样可以表示为

$$m_c = m + \delta m \quad (1-9)$$

这里  $\delta m$  的存在意味着反演问题解是不稳定的,如图 1-3 所示。如果这种不稳定十分严重,则会加剧解的非唯一性程度。

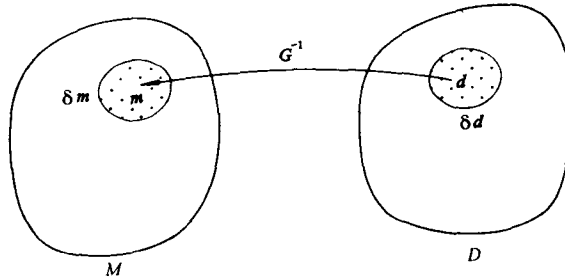


图 1-3 含有误差的观测数据与模型参数估计之间映射关系示意图

无论是反演问题的多解性,还是实验中的测量误差,以及模型参数与观测数据之间关系的不确定性,都会给求解反演问题造成困难,使问题复杂化,但这不等于反演问题无法解决。事实上,反演问题的求解,是利用观测资料结合从理论和实践中总结出的某些“先验信息”,对未知的模型参数进行逻辑推断的过程,其解是经过归纳、演绎而得到的模型参数的估计。所谓“估计”,表示其中含有偏差,估计的同时亦表明指定了一个解的范围。在某些特定的问题中,获得模型参数并不复杂,但这个估计并不一定能解答我们的问题。我们通常用“最佳程度”或“优度”来衡量反演问题的解的优劣。反演理论与方法研究的最终目标就是在同等信息量条件下,最大限度地提高解的优度。

## § 1.2 地球物理中的反演问题

反演问题在地球物理学中占有特殊的地位。由于地球物理学所研究的对象大多在地球内部,有些甚至埋藏在地球深部,而人类目前可能获得的关于地球的信息大都来源于地球表面,仅有少量的信息来自于极其有限的地下空间(如钻井、坑道),因此人们对地球的认识主要还是通过有限的观测资料,对其进行反演而获得。例如,到目前为止,人类对地球内部基本结构的认识都是来源于对地球物理观测资料反演的结果。所以说反演问题是地球物理学中的一个核心理论问题。

地球物理场与场源及两者之间的关系是地球物理学中的三个基本要素。不同物理性质的场源与不同性质的场相对应,它们之间遵循着一定的法则。地球物理场与场源的形式是多种多样的。在勘探地球物理中,研究对象的性质不同,观测的场也不同。例如,在重力勘探和磁法勘探中,通过观测地球重力场和磁场的变化(或异常)来确定地质目标的密度或磁性分布;在电磁法勘探中,通过观测由人工装置或“太阳风”激发的交变电磁场激励下地质目标产生的二次场来研究其导电性;在地震勘探中,则通过记录的地震波及其在传播中遇到地质目标而形成的反射波或折射波来确定其波速特征。上述观测的数据显然是与地质目标的密度、磁化率、导电率、波速及其几何形态有关的,而这些参数通常作为描述场源的模型参数。在某些特定的例子中,由于同一地质目标所具有的各种物理特性在一定的外界条件下可以产生不同的物理场,从而使我们有希望通过各种场的信息来研究同一地质目标。

地球物理场与场源的关系是一种数学物理逻辑关系,具体形式因问题而异。常见的基本形式有三种,即积分方程形式、微分方程形式和矩阵方程形式。

若把式(1-1)表示成积分方程形式

$$d(x) = \int G(x, \zeta) m(\zeta) d\zeta \quad (1-10)$$

式中,  $m(\zeta)$  为描述场源的模型函数,  $G(x, \zeta)$  为积分核函数, 又称格林(Green)函数, 是表征场与场源关系的函数,  $d(x)$  则是表示场的空间分布函数。在反演问题中, 通常要求  $G(x, \zeta)$  是确定的, 而  $m(\zeta)$  为待定函数, 这样, 解反演问题就变成了求解积分方程问题。

在许多地球物理问题中, 尤其是当涉及到场在场源内部的分布的问题时, 可以用微分方程来描述场与场源的关系。广义上说, 地球物理场都满足如下关系:

$$Lu = \begin{cases} 0, & \text{在源外空间} \\ g(x), & \text{在源内空间} \end{cases} \quad (1-11)$$

式中,  $g(x)$  为与场源性质及分布有关的函数,  $u$  为场的分布函数,  $L$  为微分算子。对于不同的场,  $L$  代表不同的算子, 如在重力场或磁场中,  $L$  为拉普拉斯(Laplace)算子, 即

$$L = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1-12)$$

在电磁场中, 若周围介质均匀且各向同性,  $L$  为亥姆霍兹(Helmholtz)算子, 即

$$L = \Delta + k^2, k^2 = \omega^2 \mu \epsilon / c^2 + i 4 \pi \omega \mu r / c^2 \quad (1-13)$$

式中,  $k$  为波数,  $\mu$ 、 $r$ 、 $\epsilon$  分别为介质的磁导率、电导率和介电常数,  $\omega$  为谐变场的角频率,  $c$  为真空中光的传播速度。而在均匀且各向同性的弹性介质的弹性波场中,  $L$  即为波动算子, 即

$$L = \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (1-14)$$

式中,  $v$  为纵波速度,  $t$  为时间。

如果说利用求解积分方程来解地球物理反演问题是一种直接方式的话,那么利用求解微分方程来解地球物理反演问题则是一种间接方式。解微分方程是通过给定的边界条件或初始条件,确定方程的定解,以获得那些不可直接测量的场的分布或重建方程系数,进而确定有关的模型参数。

若方程(1-1)中的  $G$  为一个  $M \times N$  阶矩阵,  $m$  为  $N$  维向量,  $d$  为  $M$  维向量,则方程(1-1)演变为一个简单的矩阵方程,即

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{M1} & G_{M2} & \cdots & G_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

方程(1-15)也可以看作是积分方程(1-10)离散化后的结果。这样,解反演问题就成了求解  $M \times N$  阶线性方程组的问题。

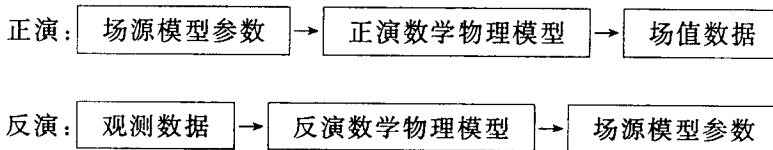
无论采用什么样的方式来表述场与场源的关系,都要依照问题的性质和信息形式而定。总之,人们总是希望用简单的方法去解决复杂的问题,在不丢失信息的条件下最大可能地准确确定未知量。

## § 1.3 地球物理反演中的数学物理模型

### 1.3.1 地球物理数学物理模型

谈到地球物理反演问题时,我们不能不谈到数学物理模型问题。在地球物理研究中,对于不同形式、不同性质的观测数据,怎样运用场与场源之间的逻辑关系,以及如何构制场源模型参数,是数学物理模型所要讨论的内容。所以说数学物理模型是地球物理反演的基础问题,它是运用数学语言和工具对各种物理现象进行描述、归纳和演绎的基础。任何一种反演方法都是建立在这样一种基础之上的。因此,建立数学物理模型是我们开展反演工作的出发点。

求解正演问题和反演问题的流程可以形象地描绘为



形式上两者都是信息“转换”过程,但存在着本质区别。正如前面(1.1节中)所讨论的空间映射问题一样,正演是从模型空间到数据空间的信息转换,反演是从数据空间到模型空间的信息转换,两者是互逆的过程。从解决问题的过程来看,面对具体问题给出明确的正演数学物理模型相对较容易,而给出明确的反演数学物理模型则往往十分困难,在这种情况下,反演工作需要依赖正演数学物理模型来间接地进行。广义上,我们把包含正演计算在内的反演计算流程称为广义反演数学物理模型。显然,正演数学物理模型是反演工作的基础,因此在讨论地球物理数学物理模型问题时,通常是针对正演数学物理模型而言的。

数学物理模型有各种不同的分类。按照描述场源的模型函数或参数与场的关系特征来分类,可分为线性模型与非线性模型;按照描述场源的模型函数或参数的变量特征来分类,可分

为离散模型与连续模型。这些分类不仅反映了解决地球物理问题的出发点和解题思路,而且引导着反演问题理论与方法的研究沿着不同方向发展。

### 1.3.2 线性与非线性数学物理模型

线性模型是指方程(1-1)所确定的场源模型参数  $m$  与观测数据  $d$  的关系中  $G$  为线性映射算子,即对模型空间  $M$  中的两个模型  $m_1, m_2 (\in M)$ , 满足

$$\begin{cases} (1) & G(m_1 + m_2) = Gm_1 + Gm_2 \\ (2) & G(am_1) = aGm_1, \quad G(am_2) = aGm_2 \end{cases} \quad (1-16)$$

式中,  $a$  为任意常量参数。若  $G$  不满足条件(1-16), 则方程(1-1)所确定的数学物理模型即为非线性模型。以球体的重力异常为例, 假设球体是均匀的, 其剩余密度为  $\sigma$ , 半径为  $R$ , 中心埋深为  $D$ , 其在水平地面 ( $z=0$ ) 上的异常表达式为

$$\Delta g(x, y, 0) = f \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \frac{\sigma D}{(x^2 + y^2 + D^2)^{3/2}} \quad (1-17)$$

式中,  $f$  为万有引力常数。若以上述模型反演求解剩余密度  $\sigma$ , 该模型为线性模型。若反演求解中心埋深  $D$ , 则该模型为非线性模型。从这一简单的例子就可以看出, 非线性反演问题的求解要比线性问题复杂。人们为了解决非线性问题, 常常是设法将非线性问题转换成线性问题, 即所谓的线性化, 然后按照解决线性问题的方法去求解, 这种方法也称为广义线性反演方法。关于这方面的问题, 我们将在后面的章节中作详细的讨论。

### 1.3.3 连续与离散数学物理模型

反演理论中所遇到的模型参数既可以是离散值, 也可以是一个或多个变量的连续函数。换句话说, 某一物理系统的模型参数可以用连续函数来描述, 也可以用有限个离散值来描述, 前者称为连续数学物理模型, 后者称为离散数学物理模型。在地球物理反演理论中, 连续反演理论与离散反演理论分属两个不同理论体系分支。连续反演理论主要解决理论前提证明、算子推导以及某些必须用连续函数表征的问题, 在理论上它可以给出精确的答案。离散反演理论是从连续反演理论衍生而来的, 离散模型可用有限个连续函数值适当地逼近连续模型, 它是某种程度的近似, 甚至具有一定的随意性。例如地层岩石弹性性质的变化特征实际上是既有渐变又有突变, 而这一模型可以被离散成由若干层内均匀的层状介质组合来逼近, 显然, 这将给反演带来一定的不精确性。尽管如此, 离散反演仍然是反演理论研究的良好出发点, 因为离散模型可以通过加大采样密度使其接近连续模型, 同时离散模型易于实现数值计算, 从而有助于运用计算机解决实际问题。事实上, 离散反演理论研究主要集中在模型的构制与算法的实现问题上, 因而备受广大地球物理工作者的关注。从另一方面看, 地球物理观测数据大都是离散值, 利用有限数目的观测资料去确定无限数目的模型参数(连续模型)是不可能做到的。可见, 将场源模型离散化已成为求解地球物理反演问题的必要手段。多数地球物理反演问题是通过离散模型来表述的。例如, 若把某一段地下断面分割为若干部分, 每一部分作为一个场源元(如图 1-4(a)所示), 利用场源模型参数与观测数据之间的关系构造一个数学物理模型, 即

$$d = Fm \quad (1-18)$$

式中,  $F$  为与坐标及场源元形态有关的函数,  $d$  和  $m$  分别为观测数据与模型参数向量,  $F$  与  $m$  无关。对于元体  $j$  在  $i$  点上的作用即可表示为

$$d_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} \cdot m_j \quad (1-19)$$

式中,  $F_{ij}$  为第  $i$  点和场源元体  $j$  空间位置有关的  $F$  的函数值。对  $N$  个场源元体在地面  $M$  个观测点中的作用即可用矩阵方程表述

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{M1} & F_{M2} & \cdots & F_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

需要指出, 同一问题可以选择不同的数学物理模型, 这取决于问题的要求和解决问题的方法。对于一个均匀的三度地质体, 我们既可以把它简单地看作一个球体(连续模型), 用形如(1-17)的方程来描述重力异常场与场源之间的关系; 又可以用若干直立长方柱元去拼凑这个形体(离散模型), 并用形如(1-20)的方程来描述其异常场与场源的关系。即使是离散模型, 其离散的方式也有不同, 如图 1-4(a)、(b)、(c)所示。当然, 用不同的数学物理模型进行反演, 所得到的参数以及解的精度是不同的, 但不等于模型越复杂、划分得越精细就越好。如果要反演某小盆地的三维地震勘探资料, 将模型划分为几百层, 可想而知即使用当今世界上最快的计算机计算, 也不可能在短时间内算完。因此, 选择数学物理模型要综合考虑, 应该在满足问题的需要, 达到其精度要求的前提下, 尽可能地选择简单易行的模型。

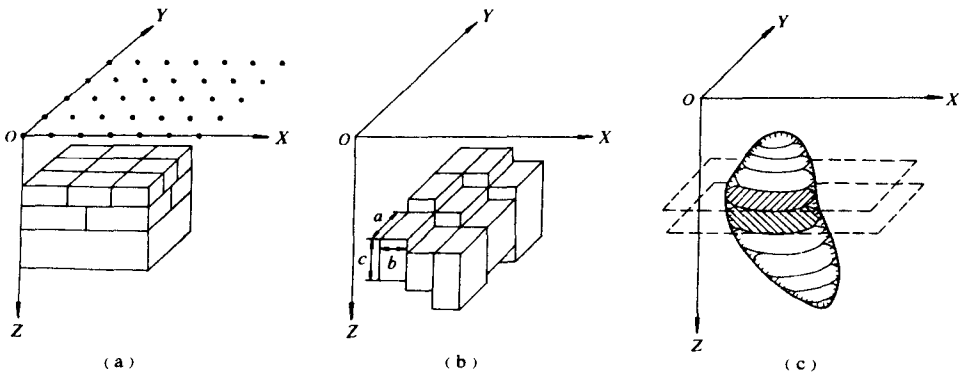


图 1-4 离散化模型的几种形式

## § 1.4 地球物理反演问题解的非唯一性

反演问题解的非唯一性(亦称多解性)是地球物理学中不可回避的问题, 这是由问题的本质所决定的。对于这个问题, 我们在 1.1 节中曾做了一般性的叙述。尽管地球物理场与场源形式各有不同, 但只要场源模型空间存在“零空间”, 反演问题多解性就必然存在。引起多解性的原因可以归纳为两个方面, 一是场的等效性; 另一个是观测资料的局限性。此外, 由于测量和计算中不可避免的误差, 也将导致多解性愈为严重(有些文献也将其视为引起多解性的原因之一)。

场的等效性是指不同的场源分布, 至少在场源外部空间可引起相同的场的分布。这样的现象有很多, 例如相同质量的球体或球壳, 无论其体积大小, 在其外部空间产生的引力场是相同



的；又如，当纵波在传播过程中，如果遇到介质速度分界面，会产生透射波和反射波，透射波的透射角与界面两侧介质速度比值有关，若保持其比值不变，两侧介质速度可以呈比例随意变化。场的等效性是地球物理场的基本特征之一，从这一点来看，仅凭观测到的场源外部空间场值去推断解释场源特征无疑是很困难的。

通常我们所得到的观测资料是数量有限的离散采样数据，而大多数物理场是连续分布的。显然，这样的资料并不能完全反映场的整个特征，具有一定的片面性和局限性。这必将影响我们对场源特征及本质的认识。而研究对象通常埋藏在地面之下，甚至可能位于地下深处，且形状并非规则、性质并非均匀，由此将造成反演结论的不确定性，即多解性。理论上，这样的场源模型属无限维空间的模型，用有限的的数据去确定无限维的模型是不可能的。

任何观测资料都含有一定的误差，其中有些来源于测量仪器设备，有些来源于测量值归算过程。测量误差能使反演计算产生畸变，导致反演结果与实际大相径庭。可以想象，如果待定的场源模型参数的变化所引起的场的变化小于观测误差的尺度，我们的反演将缺乏分辨能力而得出多种解。可见，观测误差的存在，将使地球物理反演的多解性更为严重。

Stells D C (1947)在一篇著名的论文“重力异常解释中的多解性”中指出，对于一个由基底岩石顶面起伏引起的重力异常(如图 1-5 所示)，在给定该面两侧岩石密度差之后，若观测数据中的误差为 $\pm 0.01\text{mGal}$ ，则依据剖面重力异常反演基岩面形态，可以有多种解释结果(见图 1-5)。从这个简单的例子中不难看出，场的等效性、有限的观测数据以及误差使得反演结果非唯一且差异很大。

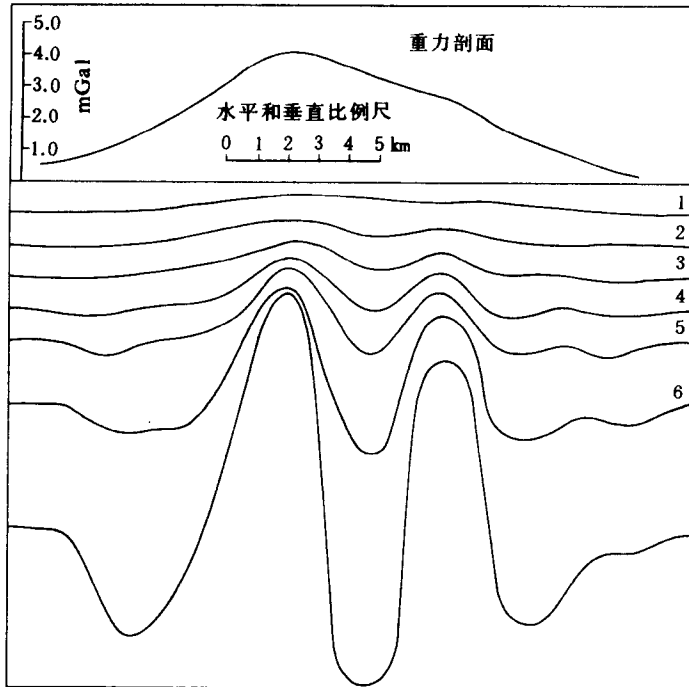


图 1-5 满足给定精度条件下重力剖面基底面起伏的各种解释

解的非唯一性并不意味着地球物理反演工作没有意义。事实上，只要观测数据是可靠的，