高等学校教学用书

概率统计

GAILU TONGJI

刘筱萍 何宝珠 贾 贞 邓光明 编

冶金工业出版社

高等学校教学用书

概 率 统 计

刘筱萍 何宝珠 贾 贞 邓光明 编

北 京
冶 金 工 业 出 版 社
2005

内 容 简 介

本书是按照教育部对高等学校工科本科概率统计课程的基本要求，并结合编者多年的教学实践编写而成。全书共分9章，内容包括：随机事件与概率、离散型随机变量及其分布、连续型随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析。书中各章均配有典型的例题和习题，书末附有习题参考答案。

本书内容符合要求，概念清晰，阐述详细，通俗易懂，便于自学。可作为高等院校工科各类专业的教学用书，也可作为高职高专学校师生的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计/刘筱萍等编．—北京：冶金工业出版社，2005.2

高等学校教学用书

ISBN 7-5024-3642-1

Ⅰ．概… Ⅱ．刘… Ⅲ．①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第109247号

出版人 曹胜利（北京沙滩嵩祝院北巷39号，邮编100009）
责任编辑 王之光 美术编辑 李 心
责任校对 王贺兰 李文彦 责任印制 李玉山
北京兴华印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销
2005年2月第1版，2005年2月第1次印刷
185mm×230mm；12.5印张；270千字；189页
16.00元
冶金工业出版社发行部 电话：(010)64044283 传真：(010)64027893
冶金书店 地址：北京东四西大街46号(100711) 电话：(010)65289081
（本社图书如有印装质量问题，本社发行部负责退换）

前言

本书是按照教育部对高等学校工科概率统计课程的基本要求，并结合编者多年的教学实践编写而成的。

本书力求叙述详细，通俗易懂，例题丰富，便于自学，轻松地掌握概率与统计的基本思想、基本概念和基本方法。

本书由刘筱萍（第一章、第二章）、贾贞（第三章、第四章）、何宝珠（第五章、第六章、第七章）、邓光明（第八章、第九章）编写初稿，全书由邓光明、何宝珠统稿。

本书在编写过程中，得到了桂林工学院数理系领导和高数教研室全体老师的大力支持和帮助，特别得到了吴群英教授的关心和指导，在此，向他们致谢。

由于编者水平有限，书中不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2004 年 5 月

目录

1　随机事件与概率

概率论是研究随机现象的数量规律的学科，本身具有丰富的内容及广泛的应用，是统计学理论的基础．随机事件和概率是概率论中最基本的两个概念．

1.1　随机事件

1.1.1　随机事件

在社会生活与日常生产活动中，带有偶然性的现象随处可见．例如，抛一枚骰子，落地时出现的点数；相同条件下生产出来的灯泡寿命，等等．

概率论中最经典的例子要数向上抛一枚硬币，结果可能是正面也可能是反面，事先无法确定．这些不同的偶然性现象，都有一个共同的特点：在基本条件不变的情况下，一系列的试验或观测会得到不同的结果，以至于人们在试验或观测前无法预料哪一种结果将会发生，这种现象称为**随机现象**．概率论研究的就是这种随机现象所包含的数量规律．

此外，在自然界和现实生活中，还有另一类现象，在一定的条件下，能够明确预言其结果．例如，太阳必然从东方升起；水在冰点以下会结冰；任何一种生物总要经历生长、发育、衰老直至死亡等各个阶段等，这类现象称为**确定性现象**．

一般地，确定性现象与随机现象有本质的区别．但在概率中，为了处理的方便，把确定性现象作为随机现象的特例．

1.1.2　样本空间

对于随机现象，人们现在已认识到，大量的现象表面看无规律，出现哪一个结果无法预料，但当大量重复试验时，每个结果呈现某种规律性，这种规律性称为统计规律性．为了研究随机现象的统计规律性，必须对它们进行观测或试验．这里所说的试验必须满足下述条件：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验前能确定所有可能的结果；

(3) 试验之前不能确定哪一种结果将会出现．

具有上述性质的试验称为**随机试验**，简称**试验**．下面举出一些例子．

例 1.1.1　投掷一枚硬币，观察正、反面出现的情况．

例 1.1.2　检查某商店某柜台某天的营业额．

例 1.1.3　观察某电话交换台在 $[0, t]$ 内来到的电话呼叫数．

例 1.1.4 测量一个工厂生产的灯泡寿命.

例 1.1.5 向上抛一枚骰子，观察朝上一面的点数.

把随机试验的每一个可能结果称为**样本点**，用 ω 表示；全体样本点组成的集合称为样本空间，用 Ω 表示. 要认识一个随机试验，首先必须弄清楚它的所有可能结果. 因此确定样本空间是研究随机现象的第一步.

续例 1.1.1 $\Omega=\{$正面，反面$\}$.

续例 1.1.2 $\Omega=(0, +\infty)$.

续例 1.1.3 在例 1.1.3 中，其结果显然为一非负整数. 故 $\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$.

续例 1.1.4 若我们假定灯泡寿命不超过 4000h，则 $\Omega=[0, 4000]$.

续例 1.1.5 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 若将 6 个面分别涂以红、黄、绿、蓝、白、黑 6 种颜色，则

$$\Omega=\{\text{红、黄、绿、蓝、白、黑}\}.$$

这两个样本空间虽然表面上完全不同，但本质上是一致的，它可以抽象地记为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}.$$

由以上例子可知，样本空间可以是数集，也可以不是数集；可以是有限集，也可以是无限集.

1.1.3 随机事件

对于随机现象，我们总关心的是随机试验中某一结果是否出现，或会出现什么结果.

例如，在例 1.1.5 中，$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，则

$$\text{“得到的点数为偶数”}=\{2,4,6\}.$$

$$\text{“得到的点数至少是 3”}=\{3,4,5,6\}.$$

上述两个结果均由 Ω 的若干样本点构成；而“出现两点”，“出现 5 点”只包含单个样本点.

因此，称一个随机试验的样本空间的子集为**随机事件**. 它是由若干个样本点组成的集合. 称仅含一个样本点的随机事件为**基本事件**；称某个随机事件发生，且仅当该事件所包含的某个样本点出现.

由于随机事件是样本空间的子集，故 Ω 本身也可以当作一个事件，而在任何一次试验中总有 Ω 中的某一样本点出现，即 Ω 总会发生，所以 Ω 为**必然事件**；类似地，不包含样本点的空集 Φ 也可以作为一个事件，由于在任何一次试验中 Φ 总不发生，因此 Φ 是**不可能事件**. 必然事件与不可能事件是随机事件的两种极端情形，它们均属确定性现象.

1.1.4 事件之间的关系及其运算

给定一个样本空间，显然可以定义不止一个随机事件，那么这些事件之间的关系如何？分析它们之间的关系有助于认识事物的本质，并且可以通过对简单事件规律的研究去

了解较复杂事件的规律.

由于事件是用样本空间的子集来表示的，因此，事件的关系和运算也可以用集合之间的关系及运算来表示.

在下面的讨论中，均认为样本空间 Ω 已给定. $A,B,C,\cdots;A_i(i=1,2,\cdots)$ 等表示 Ω 的一些事件.

(1) **包含关系** 事件 A 发生则事件 B 必发生. 此时，A 的所有样本点都在 B 中，称 A 包含于 B(B 包含 A). 记为 $A\subset B$ ($B\supset A$).

例 1.1.6 靶子由 8 个同心圆组成，半径分别为 r_1，r_2，…，r_8，且 $r_1<r_2<\cdots<r_8$，以 A_k 表示事件“命中点在半径为 r_k 的圆内”，则显然有 $A_k\subset A_{k+1}$. 这是因为当 $r_k<r_{k+1}$ 时，落在半径为 r_k 圆内的点，必在半径为 r_{k+1}，r_{k+2}，…的同心圆内.

(2) **相等关系** 对事件 A 与事件 B，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$. 此时，事件 A 与 B 是相等关系，它们包含的样本点完全相同.

例如 $A=\{$至少有一个次品$\}$,$B=\{$不全是正品$\}$,有 $A=B$. 这里可得到同一事件的不同表示.

(3) **并** 给定两个事件 A 与 B，表示“A、B 至少有一个发生”，称为 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$. 显然 $A\cup B$ 发生是指或者 A 发生或者 B 发生（这里包括二者都发生).

例 1.1.7 从通常的一副 52 张扑克牌中随机抽取一张. 若考虑牌的花色，设 A 表示事件 {取到 K}，B 表示事件 {取到梅花}，则 $A\cup B=\{$取到梅花或 K$\}$（样本点“梅花 K”在其中).

并的运算推广：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n = \{A_1,A_2,\cdots,A_n \text{ 中至少有一个发生}\}.$$

对于可列无限个事件 A_1，A_2，…，有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1\cup A_2\cup\cdots = \{A_1,A_2,\cdots \text{ 中至少有一个发生}\}.$$

(4) **交** 给定事件 A 和 B，AB 构成一个新事件，表示“A、B 都发生”，它是由同时属于 A 与 B 的样本点组成的集合，称为 A 与 B 的交（积)，记为 $A\cap B$，简记 AB.

例 1.1.7 中，$AB=\{$取到梅花 K$\}$.

一般地

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n = \{A_1,A_2,\cdots,A_n \text{ 都发生}\}.$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1\cap A_2\cap\cdots = \{A_1,A_2,\cdots \text{ 都发生}\}.$$

显然

$$AB \subset A \subset A \cup B.$$

（5）**互不相容（互斥）关系**　若 $AB=\Phi$，即在一次试验中，A 与 B 不可能同时发生，则称事件 A 与 B 互不相容（互斥）．如果 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，则称这 n 个事件互不相容．更进一步地，若可列无限个事件 A_1，A_2，…两两互不相容，则称 A_1，A_2，…互不相容．

例 1.1.8　取 5 件产品，设 $A=\{$最多 2 件次品$\}$，$B=\{$至少 4 件次品$\}$，$C=\{$都是次品$\}$，$D=\{$都不是次品$\}$，$E=\{$至少有 1 件次品$\}$．问上述事件中哪两个是互不相容的？

解　因为 $AB=\Phi$，$AC=\Phi$，$BD=\Phi$，$CD=\Phi$，$DE=\Phi$，所以 A 与 B，A 与 C，B 与 D，C 与 D，D 与 E 是互不相容的．

（6）**逆（对立事件）**　“事件 A 不发生”的事件，称为 A 的逆（对立）事件，记为 $\bar{A}$．$\bar{A}$ 是由所有不属于 A 的样本点组成的集合．显然 $A\cap\bar{A}=\Phi$，$A\cup\bar{A}=\Omega$．

续例 1.1.8　$\bar{A}=\{$至少 3 件次品$\}$，$\bar{B}=\{$最多 3 件次品$\}$，$\bar{C}=\{$至少有 1 件正品$\}$，且 $\bar{D}=E$，$D\cup E=\Omega$（D，E 为对立事件）．

（7）**差**　给定事件 A 和 B，“A 发生且 B 不发生”这一事件，记为 $A-B$．它是由属于事件 A 但不属于事件 B 的样本点组成的集合，称为事件 A 与 B 的差．显然

$$A-B=A\bar{B}.$$

在例 1.1.7 中，$A-B=\{$取到 K 但不是梅花$\}=\{$红心 K，方片 K，黑桃 K$\}$．

从具体例子中，我们容易理解以上概念，而英国逻辑学家维恩（Venn）（1834～1888 年）为我们提供了更直观的工具，他使用图示法来表示事件之间的各种关系．读者可利用图 1-1 来加深对上述概念的理解．

由集合论的初步知识，我们就不难发现，事件之间的关系及运算与集合论之间的关系

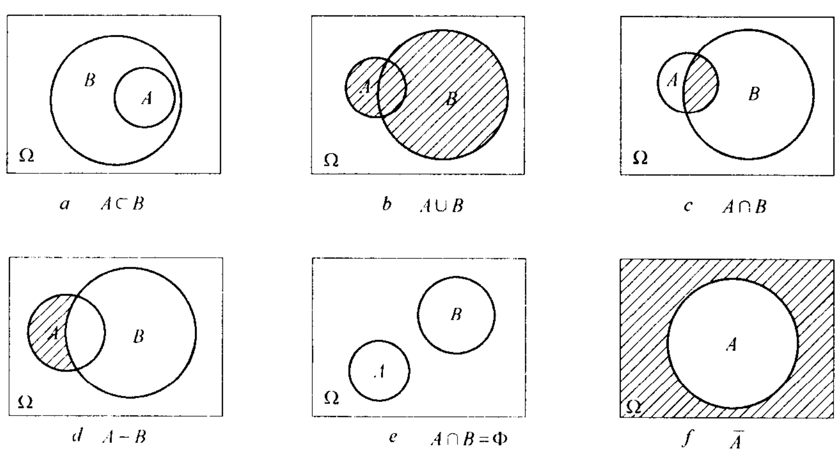

图 1-1

及运算是完全相似的. 但在概率论中，很重要的一点是要学会用事件的语言来表达这些关系及运算，并学会用这些关系与运算来表示各种各样的事件.

事件的运算和集合的运算一样，也满足一系列的运算规律：

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A, AB = BA$；

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$；

(3) 分配律：$(A \cup B)C = AC \cup BC, (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$；

(4) 德莫根（De Morgan）定理：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$，$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. 德莫根定理可推广到任意多个事件.

上述运算规律不作严格证明，读者可结合前面例子，利用维恩图来直观地验证这些规律的正确性.

例 1.1.9 设 A，B，C 为 3 个事件，一些事件的表示方法为：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生：$A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A - B - C$ 或 $A - (B \cup C)$；

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生：$AB\bar{C}$ 或 $AB - C$；

(3) 3 个事件都发生：ABC；

(4) 3 个事件恰好发生 1 个：$A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$；

(5) 3 个事件恰好发生两个：$AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$；

(6) 3 个事件中至少发生 1 个：$A \cup B \cup C$

或 $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup ABC$.

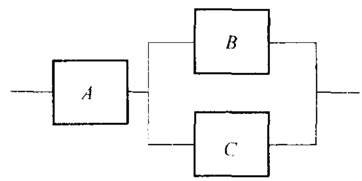

图 1-2

例 1.1.10 已知系统由元件 A，B，C 组成，连接方式如图 1-2 所示. 设 A，B，C 分别表示事件：元件 A，B，C 正常，则"系统正常"可表示为 $A \cap (B \cup C)$；由德莫根定理，"系统发生故障"可表示为：$\overline{A \cap (B \cup C)} = \bar{A} \cup (\bar{B} \cap \bar{C})$.

1.2 古典概型

对于随机现象，我们不仅要知道所有可能发生的结果，更主要的是要了解各种可能结果以多大的可能性发生，这是概率论的一个基本任务，也就是要计算各种随机事件发生的概率.

其实，概率一词早已为大多数人所熟悉：掷一枚均匀硬币，"出现正面"的概率为二分之一，这一结论人们能够接受. 但是，它的确切含义是什么？是否掷 100 次硬币，正面必出现 50 次；又比如，若彩票的中奖率为千分之一，买 1000 张彩票一定会中奖吗？显然不是，那么又怎样来理解这里的二分之一、千分之一？

在本节，我们首先讨论概率论中一类最简单的概率模型——古典概型.

1.2.1 古典概型

上抛一枚均匀硬币出现正面、反面的可能性都是 1/2，这是掷硬币模型的特征. 事实上，这种等可能性并非只有掷硬币模型才具备，而是一大类模型的共同特点. 例如：一般

的摸球模型，设袋中装有各种颜色的球，只要它们外形完全相同，质地分布均匀，在一次摸球时，袋中各球被摸到的可能性是相等的；同样，一个购买房屋的有奖储蓄的居民，也总是相信由摇奖决定的得奖号码不会对任何数字有所偏爱，故他获得一套住房的机会和其它购买者是均等的.

这种等可能性及样本点个数有限，就是古典概型的基本特征. 一般地，称具有下列两个特征的随机试验的数学模型为**古典概型**：

(1) 试验的全部可能结果只有有限个，譬如 n 个，即

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}.$$

(2) 每个样本点 $\omega_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 出现的可能性是相等的，若用 $P(A)$ 记事件 A 发生的概率，则

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

需要说明的是以上谈到的等可能性是对样本点即基本事件而言的. 对一般的随机事件，它是由若干个样本点组成，其概率则由这些样本点的个数所决定. 如果事件 A 包含了 Ω 中的 n_A 个样本点，即 $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_m}\}(m = n_A)$，其中 ω_{i_j} 为 Ω 的基本事件 $(j=1, 2, \cdots, m)$，由于 ω_{i_j} 的出现必然导致 A 的发生，因此它们的出现对 A 的发生有利，故通常称 ω_{i_1}，ω_{i_2}，$\cdots$，ω_{i_m} 为 A 的“有利场合”，则古典概型中事件 A 发生的概率可由下式计算：

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{A\text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点总数}} = \frac{A\text{ 的有利场合数}}{\text{样本点总数}}.$$

上式为概率的一般定义，但只适用于古典概型，因此称它为概率的古典定义.

例 1.2.1 投掷一对均匀骰子一次，求两枚骰子之和为 7 点或 11 点的概率.

解 图 1-3 显示了掷一对骰子一次的样本空间. (a, b) 表示第一枚骰子为 a 点，第二枚骰子为 b 点. 由于骰子是均匀的，故样本点总数为 36. 设 A 表示事件“骰子之和为 7 点或 11 点”，则 A 是图 1-3 中圈出部分. 由于 A 包含 8 个样本点，因此

$$P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

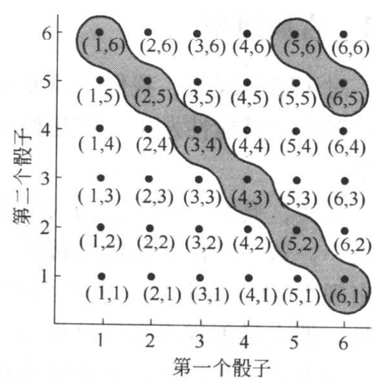

图 1-3

古典概型中概率的许多计算相当困难而富有技巧，计算的要点是先确定样本空间，并计算它的总数，而后再计算有利场合数. 在这些计算中，当样本空间的元素较多时，用上

面直接计算的方法很难求解，此时，需借助于计数的基本方法——排列与组合的原理及公式，这便是古典概型概率计算的难点所在.

例 1.2.2 有 10 个电阻，其电阻值分别为 1Ω，2Ω，…，10Ω. 现从中依次随机地取 2 个电阻，在下列两种情形下分别求两个电阻中恰有一个是超过 6Ω 的概率.

（1）有放回情形；

（2）无放回情形.

解 设事件 A 表示"两个电阻中恰有一个超过 6Ω". 现从中依次取两个电阻，每一种取法视作一个基本事件. 显然，样本空间仅有有限个元素，且每个基本事件发生是等可能的.

（1）有放回情形. 先确定样本点总数 n：第一次取时有 10 个电阻可供选取，有 10 种取法. 由于取后放回，故第二次取时仍有 10 种取法，由计数法的乘法原理，共有 10×10 种取法，即 $n=10^2$.

再确定有利于 A 的场合数 n_A：对于事件 A，有两种情形，一是第一次取到超过 6Ω 的电阻且第二次取到小于等于 6Ω 的电阻，共有 4×6 种取法；二是第一次取到小于等于 6Ω 的电阻且第二次取到超过 6Ω 的电阻，共有 6×4 种取法，由加法原理知，

$$n_A = 4\times6+6\times4, \qquad P(A) = \frac{4\times6+6\times4}{10^2} = 0.48.$$

（2）无放回情形. 先确定样本点总数 n：第一次有 10 个电阻可供选取，由于取后不放回，因此第二次取时还剩 9 个电阻可供选取，按照计数法的乘法原理，共有 10×9 种取法，即 $n=10\times9=P_{10}^2$.

再确定有利于 A 的场合数 n_A：对于事件 A，也有两种情形，故 $n_A=4\times6+6\times4$，所以

$$P(A) = \frac{4\times6+6\times4}{10\times9} = 0.53.$$

在（2）中，也可以从另一个角度来考虑. 我们设想事件 A 与抽取次序无关，即一次取出两个电阻，则

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = 0.53.$$

结果一致. 但请注意：两种方法中，样本空间是不同的.

例 1.2.3 设有 n 个球，每个都能以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 落到 N 个格子（$N\geqslant n$）的每一个格子中，试求：

（1）某指定的 n 个格子中各有一个球的概率；

（2）任何 n 个格子中各有一个球的概率.

解 这是一个古典概型问题，由于每个球可落入 N 个格子中的任一个，所以 n 个球在 N 个格子中的分布相当于从 N 个元素中任取 n 个进行有重复的排列，故共有 N^n 种可能.

在第一个问题中，有利场合相当于 n 个球在指定的 N 个格子中的全排列，总数为 $n!$，因而所求概率为 $P_1=\frac{n!}{N^n}$.

在第二个问题中，n 个格子可以是任意的，即可以从 N 个格子中任意取出 n 个来，这种取法共有 $\binom{N}{n}$ 种，对于每种取定的 n 个格子，有利场合正如第一个问题一样为 $n!$，故所求概率为

$$P_2=\frac{\binom{N}{n}n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

这个例子是古典概型中一个很典型的问题，不少实际问题可以归结为此模型.

概率论历史上一个颇为有名的问题：要求参加某次聚会的 n 个人中没有两个人生日相同的概率. 若把 n 个人看作上面问题中的 n 个球，而把一年的 365 天作为格子，则 $N=365$. 这时，P_2 就给出所求的概率. 例如：当 $n=40$ 时，$P_2=0.109$，这个概率格外的小. 此外类似的还有分房、投信、上下电梯问题等等.

1.2.2 几何概率

对于试验的可能结果有无穷多种情形，概率的古典定义并不适用. 因此，历史上有不少人企图把这种处理推广到无限多个可能结果而又有某种等可能性的场合.

观察下面几个简单的例子.

（1）假设甲地至乙地的快巴每隔 15min 发一趟. 某人来到汽车站前并不知道发车时刻表，求他等车时间少于 10min 的概率.

（2）如果在一个 5 万 km^2 的海域里有表面积达 $40km^2$ 的海域储藏着石油，假如在这海域里随意选定一点钻探，问钻到石油的概率是多少？

（3）在 200mL 自来水中有一个大肠杆菌. 今从中随机取出 20mL 水样放到显微镜下观察，求发现大肠杆菌的概率.

自然会认为（1），（2），（3）答案分别是 $\frac{10}{15}$，$\frac{40}{50000}$，$\frac{20}{200}$. 事实上，在求这些概率时，利用了几何的方法，并假定了某种等可能性.

在这类问题中，首先试验的可能结果是某区域 Ω 内的一个点，这个区域可以是一维的，也可以是二维、三维的，甚至可以是 n 维的，并且，这时的样本空间或感兴趣的事件个数都是无限的；其次，等可能性的意义是：向一有限区域 Ω 内随机地投掷一点 M，点

M 落在 Ω 的任一子区域 g（$\subset\Omega$）内的可能性与 g 的长度（或面积，或体积）成正比，而与 g 的形状、位置无关.

设 $A=\{点M落入g(\subset\Omega)内\}$，我们规定：$P(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$. 其中 $m(\cdot)$ 在一维（二维或三维）情形下，表示长度（面积或体积），这种模型称为**几何概型**.

例 1.2.4 设 O 为线段 AB 的中点，在 AB 上任取一点 M，求三条线段 AM，MB，AO 构成三角形的概率.

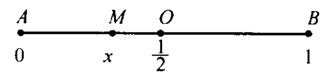

图 1-4

解 设线段 AB 的长度为 1，M 点的坐标为 x，则样本空间为 $\Omega=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}$. 如图 1-4 所示.

线段 AM，MB，AO 的长度分别为 x、$1-x$、$\frac{1}{2}$，它们能构成三角形当且仅当任意两条之和大于第三条. 即

$$\begin{cases} x+(1+x)>\dfrac{1}{2}, \\ x+\dfrac{1}{2}>1-x, \\ (1-x)+\dfrac{1}{2}>x, \end{cases} \qquad 整理得\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}.$$

于是，事件“AM，MB，AO 构成三角形”可表示成 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{3}{4}\right\}$. 故

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=0.5.$$

例 1.2.5 两人约好 7 点到 8 点在某地集合，先到者等候对方 20min，过时可离去. 试求两人会面的概率.

解 如图 1-5 所示，设其中一人到达时间为 x，另一人到达时间为 y，样本空间为

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 60,0\leqslant y\leqslant 60\}.$$

设 A 表示“两人会面”，则

$$A=\{(x,y)\,|\,|x-y|\leqslant 20\}$$

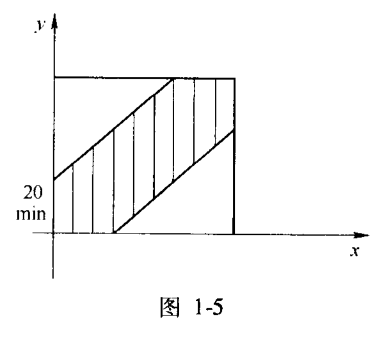

图 1-5

显然，这是一个几何概率问题，所以

$$P(A)=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

同时，还可以计算出“一人等待另一人至少 20min”（图 1-5 中两个三角形部分）的概率

$$P(A) = \frac{40^2}{60^2} = \frac{2}{3}.$$

特别地，若 B 表示事件“两人同时到达”，即 $B = \{(x,y) \mid x = y\}$，则

$$P(B) = \frac{0}{60^2} = 0.$$

但经验告诉我们，两人同时到达是可能发生的，这说明：概率为 0 的事件不一定是不可能事件；相应地，概率为 1 的事件也不一定是必然事件. 关于这点，后面我们将会有更深地体会.

1.3 频率与概率

人们经过长期的实践发现，虽然个别随机事件在某次试验或观察中可以出现也可以不出现，但在大量试验中它却呈现出明显的规律性——频率稳定性.

首先，用事件的语言更严格地叙述这一概念：对于随机事件 A，若在 n 次试验中出现了 μ 次（事件 A 发生的频数），则称 $f_n(A) = \frac{\mu}{n}$ 为事件 A 在这 n 次试验中出现的**频率**.

那么，频率与概率之间又有什么关系呢?

以最简单的掷硬币试验为例. 掷一枚均匀硬币，出现正面或反面的机会应该相等，即在大量试验中出现正面的频率，接近于 0.5，且呈现一定的规律性. 为了验证这点，历史上曾有不少人做过这个试验，结果见表 1-1.

表 1-1

实验者	n	μ	$f_n(A)$	实验者	n	μ	$f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181	K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
浦丰	4040	2048	0.5069	K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

这些试验的结果很有启发性. 虽然事件在一次试验中可能发生也可能不发生，但在大量重复试验中，它出现的频率却非常稳定，而且次数越多，频率越接近于 0.5.

虽然在一次试验或观察中某一个随机事件 A 是否发生是偶然的，但当试验次数 n 很大时，事件 A 出现的频率总在某个固定常数 p 附近摆动，一般来说，n 越大，摆动的幅度越小，则称 p 为随机事件 A 的概率. 这一规律称为频率的稳定性，即前面讲的统计规律性. 同时也给出了概率的统计定义. 频率与概率的上述关系有时还提供了求某事件概率的一种方法，即当 n 足够大时，用它的频率来作为概率的近似值.

频率的稳定性说明随机事件发生的可能性大小是随机事件本身固有的、不随人们意志而改变的一种客观属性，可以对它进行度量，这正是概率论得以建立的现实基础. 可见，频率和概率既有本质区别，又有十分密切的联系.