高等学校经典教材配套辅导丛书

线性代数辅导及习题精解

同济四版

滕加俊 吴 红 罗 剑 主编

◆ 知识归纳 ◆ 习题精解 ◆ 同步测试
◆ 考研真题 ◆ 名师执笔 ◆ 精准解答

陕西师范大学出版社

高等学校经典教材配套辅导丛书

线性代数
辅导及习题精解
（同济四版）

滕加俊 吴 红 罗 剑 主编

陕西师范大学出版社

图书代号:JC4N0114

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(同济四版)辅导及习题精解/滕加俊,吴红,罗剑主编. 一西安:陕西师范大学出版社,2004.7

(高等学校经典教材配套辅导丛书)

ISBN 7-5613-3029-4

Ⅰ.线… Ⅱ.①滕…②吴…③罗… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 065536 号

责任编辑 史 进

装帧设计 王静婧

出版发行 陕西师范大学出版社

社　　址 西安市陕西师大 120# (邮政编码:710062)

网　　址 http://www.snuph.com

经　　销 新华书店

印　　刷 南京人民印刷厂

开　　本 850×1168 1/32

印　　张 8.5

字　　数 180 千

印　　数 5000 册

版　　次 2004 年 8 月第 1 版

印　　次 2004 年 8 月第 1 次印刷

定　　价 11.00 元

开户行:光大银行西安南郊支行 账号:0303070-00330004695

读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。

电 话:(029)85307864 85233753 85251046(传真)

E-mail:if-centre@snuph.com

前　言

《线性代数》是大学工科、经济学、管理学等专业学生必修的一门重要基础课，也是硕士研究生入学考试必考科目，在全国统一的硕士研究生入学考试中，《线性代数》内容占20%左右。

线性代数具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性和工程应用的广泛性。大多数学生在学习过程中感到线性代数抽象难懂，对基本概念及定理结论在理解上感到困难，具体解题时，缺乏思路，难以下手。为了帮助在校大学生及考研的同学能更好地学习线性代数，克服以上困难，我们根据同济大学数学教研室编写的《线性代数》(第四版)编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. 概念、定理及公式：列出了各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容。

2. 重点、难点解答：列出相应章节的重点、难点内容，并对重点、难点内容给出相应的解释说明，以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻。

3. 典型例题解答：精选教材习题中有代表性的题目进行了详细的分析和解答，以方便广大同学学习时对照检查。由于线性代数解题方法具有多样性，大多数例题我们只给出了一种解答。

4. 考研例题精解:精选历年硕士研究生入学考试试题中具有代表性的例题进行了详细地分析和解答。这些例题涉及内容广、题型多、技巧性强,可以使广大同学举一反三、触类旁通开拓解题思路,更好地掌握线性代数的基本内容和解题方法。

5. 同步测试题:根据线性代数课程考试和考研内容,我们精选了适量的典型题目,在每一章末,给出了两套同步测试题,在书后给出了两套仿真模拟试题,并附有详细的解答,在这些同步测试题以及仿真模拟试题中,含有相当一部分历年硕士研究生入学考试题目,读者可以通过这些试题巩固和进一步加深对线性代数基本概念的理解,进一步掌握线性代数的解题要领,检验自己对线性代数知识的掌握程度,培养综合应用能力和应变能力。

本书由滕加俊、吴红、罗剑、王璞等同志编写,郑琴、张亮、史顺文等同志参加了部分编写工作。在本书的策划、编写、审稿等方面得到了陕西师范大学出版社的大力支持和热情帮助,在此表示感谢。由于作者的水平有限,加之时间仓促,书中不足之处敬请广大同行和读者批评指正。

作　者

2004 年 7 月

目　　录

第一章　行　列　式

【主要概念及公式】

一、排列及逆序的定义

n 阶排列：由 n 个不同的元素排成一列所组成的有序数组。

逆序：在一个排列中当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就构成一个逆序。

逆序数：在一个排列中所有逆序的总数，称为该排列的逆序数。

二、排列的性质

（1）对换改变排列的奇偶性。

（2）在全部 n 阶排列中（$n \geq 2$）奇偶排列各占一半。

（3）任意一个 n 阶排列可经过一系列对换变成自然排列并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同。

三、n 阶行列式的定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于 $n!$ 项的代数和。其值是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1_{j_1}} a_{2_{j_2}} \cdots a_{n_{j_n}}$ 的代数和，各项的符号由 n 阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 决定。当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列时，对应项取正号，当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为奇排列时，对应项取负号。

四、行列式的基本性质

（1）行列式的行列互换后，行列式的值不变。

(2) 行列式的两行(列) 互换,行列式改变符号。若行列式有两行(或两列) 完全相同,则行列式的值等于零。

(3) 把一个行列式的某一行(列) 的所有元素同乘以某一数 k,等于以数 k 乘这个行列式。

(4) 若行列式中有两行(列) 元素对应成比例,则该行列式的值为零。

(5) 若行列式的某一行(列) 的元素都是两数之和,则此行列式可写成两个行列式之和,这两个行列式分别以这两组数作为行(列),其余各行(列) 与原行列式相同。

(6) 将行列式某行(或列) 的 k 倍加到另一行(或列),其值不变。

五、行列式按行(列) 展开公式

设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,则

$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, (i = 1,2,\cdots n)$

或 $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, .(j = 1,2,\cdots n)$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式。

六、克拉默法则

若 n 阶线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ (1)

其系数行列式 $D \neq 0$,则线性方程组(1) 仅有一个解

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad (i = 1,2,3,\cdots n)$$

其中 D_i 是系数行列式 D 中的第 i 列元素换以常数项 $b_1,\cdots b_n$,而得到的行列式。

七、n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数行列式为零。

【重点、难点解答】

1. 排列逆序数的计算　逆序的计算有两种算法：(1)$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ = i_1 后边比 i_1 小的数的个数 + i_2 后边比 i_2 小的数的个数 + … + i_{n-1} 后边比 i_{n-1} 小的数的个数；(2)$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ = i_2 前面比 i_2 大的数的个数 + i_3 前面比 i_3 大的数的个数 i + … + i_n 前面比 i_n 大的数的个数。

2. 几个特殊行列式

(1) 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \qquad \text{（上三角行列式）}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \qquad \text{（下三角行列式）}$$

(2) 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 对称和反对称行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{满足 } a_{ij} = a_{ji} \quad \begin{matrix} (i = 1,2,\cdots n) \\ (j = 1,2,\cdots n) \end{matrix}$$

D 称为对称行列式。

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

满足 $a_{ij}=-a_{ji}\quad \begin{matrix}(i=1,2,\cdots n)\\(j=1,2,\cdots n)\end{matrix}$

D 称为反对称行列式。当阶数 n 为奇数时,则 $D=0$。

(4) 范德蒙德行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

3. 计算行列式的方法

这是本章的重点也是本章的难点。计算行列式一般有以下几种常用方法:

(1) 利用行列式的定义计算:但这种方法只适用于一些特殊的行列式或者是大多数元素为零的行列式的计算。

(2) 利用行列式的性质计算:利用行列式的基本性质将行列式化为上(下)三角行列式来计算,这是计算行列式的最常用方法。

(3) 利用行列式展开公式计算:利用按行(列)展开公式将高阶行列式化为低阶行列式来计算。

(4) 利用递推关系计算:利用行列式的性质或展开公式找出递推关系来进行计算。此方法一般适用于含有字母的行列式的计算。

(5) 利用升阶法计算:在行列式值不变的情况下,加上特殊的一行和一列进行计算。

(6) 利用范德蒙德行列式计算:此方法只适用于特殊的行列式的计算。

(7) 利用分解之积法计算:设 A 为 n 阶方阵,则 $\det A$(或 $|A|$)表示对应的行列式,则有 $|A|=|A^T|$,$|AB|=|A||B|$ 但 $|A+B|\neq|A|+|B|$,此方法需要利用矩阵的知识,将在第二章学到。

(8) 其他的一些特殊方法:包括换元法、观察法、线性因子法、辅助行列式法。但是这些方法都不是常用方法。

4. 判断n个未知数n个方程的齐次线性方程组有无非零解的关键是看它的系数行列式是否为零;若为零,则有非零解;反之,无非零解。

【典型例题解答】(习题选讲)

例 1 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项。

【分析】 由行列式的定义知 $D=\sum(-1)^t a_{1_{i_1}} a_{2_{i_2}} a_{3_{i_3}} a_{4_{i_4}}$,其中 i_1,i_2,i_3,i_4 是 1,2,3,4 的某个排列,现在 $i_1=1,i_2=3$,所以 i_3,i_4 分别为 2,4 的某些排列,即为:1324 或 1342。

【解】 四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项为

$(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$,

和$(-1)^{\tau(1342)}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$

例 2 计算$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$

【分析】 观察第一行有公因子 a,第二行有公因子 d,第三行有公因子 f,可先将公因子提取出来后再计算。

【解】 $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix} b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}$

$$=adfbce\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=4abcdef$$

例 3 计算$\begin{vmatrix}a & 1 & 0 & 0\\ -1 & b & 1 & 0\\ 0 & -1 & c & 1\\ 0 & 0 & -1 & d\end{vmatrix}$

【分析】 该行列式零元素比较多，考虑利用行列式展开法来计算，观察该第一行和第一列零元素较多，故按第一行展开来进行计算。

【解】

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 0 & 0\\ -1 & b & 1 & 0\\ 0 & -1 & c & 1\\ 0 & 0 & -1 & d\end{vmatrix}=a\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}b & 1 & 0\\ -1 & c & 1\\ 0 & -1 & d\end{vmatrix}$$

$$+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & c & 1\\ 0 & -1 & d\end{vmatrix}=a\cdot(b\begin{vmatrix}c & 1\\ -1 & d\end{vmatrix}+1\cdot$$

$$(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & d\end{vmatrix})-(-1)\begin{vmatrix}c & 1\\ -1 & d\end{vmatrix}=abcd+ab+ad+cd+1$$

例 4 证明：

$$\begin{vmatrix}ax+by & ay+bz & az+bx\\ ay+bz & az+bx & ax+by\\ az+bx & ax+by & ay+bz\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x & y & z\\ y & z & x\\ z & x & y\end{vmatrix}$$

【分析】 该行列式的每一元素均为两个数的和，且每一列第一子列均具有公因子 a，每一列第二子列均具有公因子 b。故考虑采用行列式的性质五来证明该等式。

【证明】 $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(2)c_2-ac_1]{(1)c_3-bc_1} a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & bz & az+bx \\ z & bx & ax+by \\ x & by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(2)c_3-ac_2]{(1)c_2-bc_3} a^2\begin{vmatrix} x & ay & z \\ y & az & x \\ z & ax & y \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} y & z & bx \\ z & x & by \\ x & y & bz \end{vmatrix}$$

$$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{(2)c_2\leftrightarrow c_3 \\ c_1\leftrightarrow c_2}]{} (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

例 5 证明

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

【分析】 观察该行列式发现，此行列式下半部分除了最后一行以外元素均为零，故考虑采用将行列式化为上三角行列式来证明。但行列式转化过程中涉及到行列式元素除以 x 的情况，因此在证明过程中应该考虑 x 为零和不为零的情况。当然该题除了用此方法外，也可以用其他方法来证明。

【证明】 设 $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = D$

$$D = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x \end{vmatrix}$$

当 $x \neq 0$ 时，有

$$D \xlongequal{i_n - \frac{a_n}{x} i_1} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} + x^n$$

$$\xlongequal{i_n - \frac{1}{x}\left(a_{n-1}+\frac{a_n}{x}\right)i_2} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & a_{n-2}+\frac{a_n}{x^2}+\frac{a_{n-1}}{x} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} + x^n$$

$$= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1+\frac{a_2}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-1}} \end{vmatrix} + x^n$$

$$= a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n + x^n$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

当 $x = 0$ 时，按第一列展开有

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$= a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= a_n(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1} = a_n$$

综合得　$D = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

例 6　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix},\text{其中 } a_1a_2\cdots a_n \neq 0$$

【分析】　此行列式除了对角线外所有元素全为 1，我们可以考虑用加边法求解。如果每个元素减去 1，则值为 1 的元素全变为 0，从而方便计算，因此我们增加一个元素全为 1 的行。为了保持行列式值不变，我们增加列的其余元素全取 0。

【解】

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \overset{i_k - i_1}{\underset{k=2,3\cdots n+1}{=\!=\!=\!=}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \overset{c_1 + \frac{1}{a_k}c_{k+1}}{\underset{k=1,2\cdots,n}{=\!=\!=\!=}}$$