

新世纪高等学校研究生适用教材

# 动态数据建模与处理

## Modelling and Processing of Dynamic Data

曾周末 万柏坤 编著

动态数据建模与处理

 天津大学出版社  
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

新世纪高等学校研究生适用教材

# 动态数据建模与处理

曾周末 万柏坤 编著



天津大学出版社

Tianjin University Press

## 内容简介

全书从现代信号处理技术的理论、实现、应用几个方面着手,重点介绍现代信号处理技术的共性知识,讨论信息获取、处理及传输过程中的基本理论和基本方法,结合仪器科学与技术领域的特点,介绍现代信号处理的应用和实现技术。主要内容全部来源于相近学科近年来科研课题所涉及的实际技术问题,包括时间序列分析、谱分析、自适应信号处理、小波分析、神经网络技术、模式识别技术、模糊信息处理等。本书可作为现代信号处理有关的各专业研究生教材或教师教学参考书,也可作为相关专业的研究工作者和工程技术人员的参考书。

## 图书在版编目(CIP)数据

动态数据建模与处理/曾周末,万柏坤编著. —天津:  
天津大学出版社,2005.2  
ISBN 7-5618-2084-4

I. 动… II. ①曾… ②万… III. 动态数据库 - 数据库系统 - 建立模型 IV. TP311.13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 002337 号

出版发行 天津大学出版社  
出版人 杨风和  
地址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)  
网址 www.tjup.com  
电话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742  
印刷 天津新华印刷三厂  
经销 全国各地新华书店  
开本 185mm × 260mm  
印张 20.75  
字数 531 千  
版次 2005 年 2 月第 1 版  
印次 2005 年 2 月第 1 次  
印数 1 - 3 000  
定 价 26.00 元

## 前 言

随着科学技术尤其是信息技术的飞速发展,仪器科学与技术的内涵较之以往发生了根本性的变化,仪器仪表已从单纯的机械结构、机电结构发展成为集电子技术、光学技术、精密机械、计算机技术与信息技术于一身,信息获取与处理并重,生产过程的在线检测和自动化控制结合,应用于社会生产过程各个环节的高新技术产品的典型代表,仪器科学与技术已成为多学科相互融合、相互渗透的前沿学科,仪器仪表类人才必须面对这种变革,更新知识结构,迎接挑战。

全书从现代信号处理技术的理论、实现、应用几个方面着手,重点介绍现代信号处理技术的共性知识,讨论信息获取、处理及传输过程中的基本理论和基本方法,结合仪器科学与技术领域的特点,介绍现代信号处理的应用和实现技术。主要内容全部来源于相近学科近年来科研课题所涉及的实际技术问题,包括时间序列分析、谱分析、自适应信号处理、小波分析、神经网络技术、模式识别技术、模糊信息处理等。

本书作者注重于内容的广泛性、新颖性和先进性;注重按应用要求组织内容。全书所涉及的科学问题都是研究生们所关心的,或是在以往研究工作中遇到过的。为适应研究生教学的特点,为学生涉猎更广的知识领域打下必要的理论基础,在理论和方法的论述上,侧重于介绍科学问题的理论背景、相关知识及分析问题的基本方法;在应用方面,着重介绍知识的应用条件、效果评价、应用中应注意的技术问题,同时介绍了部分课题研究过程中的体会和心得。

全书以现代信号处理技术在测控技术及仪器等相关学科的应用为主线,体现了仪器科学与技术等领域发展的技术基础,适于测试计量技术及仪器、精密仪器及机械、电子测量与仪器、光学工程、生物医学工程及仪器、自动化仪表、信息与信号处理等与现代信号处理有关的专业硕士、博士研究生或教师作为教学参考书,也可作为有关专业的研究工作者和工程技术人员的参考书。

全书共9章,其中第1、第2、第3、第9章由曾周末教授编著,第4、第5、第6、第8章由万柏坤教授编著,第7章由吕扬生教授编著。全部内容均在天津大学精密仪器与光电子工程学院的研究生课程中多次讲授,此间许多教师和研究生对本书的选材及论述提供了很多建设性的意见,在此谨向他们致以最诚挚的谢意。本书的出版得到天津大学“985行动计划”研究生教材建设立项的资助,天津大学出版社为本书的出版做了大量具体细致的工作,在此表示衷心的感谢。

由于现代信号处理理论和技术的飞速发展,加之作者水平及篇幅所限,本书的选材与论述有不妥之处,恳请诸位专家、同仁和广大读者批评指正。

作者

2004年5月于天津大学

<b>第 1 章 随机信号及其统计描述</b> .....	( 1 )
1.1 随机信号 .....	( 1 )
1.2 随机信号的功率谱 .....	( 4 )
1.3 随机信号通过线性系统 .....	( 5 )
1.4 随机信号参数估计 .....	( 8 )
1.5 相关函数的估计 .....	( 11 )
思考与练习 .....	( 13 )
<b>第 2 章 时间序列及其参数模型</b> .....	( 16 )
2.1 回归与差分方程 .....	( 16 )
2.2 ARMA 模型 .....	( 18 )
2.3 ARMA 过程的自相关函数 .....	( 22 )
2.4 ARMA 模型参数估计 .....	( 26 )
2.5 模型阶数估计 .....	( 34 )
2.6 时间序列预报 .....	( 35 )
思考与练习 .....	( 36 )
<b>第 3 章 谱分析</b> .....	( 40 )
3.1 传统功率谱估计 .....	( 40 )
3.2 ARMA 谱估计 .....	( 51 )
3.3 最大熵谱估计 .....	( 57 )
3.4 最大似然谱估计 .....	( 67 )
思考与练习 .....	( 70 )
<b>第 4 章 匹配滤波器</b> .....	( 73 )
4.1 白噪声背景下的匹配滤波器 .....	( 73 )
4.2 非白噪声下的匹配滤波器 .....	( 76 )
4.3 离散时间序列的匹配滤波器 .....	( 80 )
4.4 信号波形未知时构造匹配滤波器方法 .....	( 80 )
思考与练习 .....	( 83 )
<b>第 5 章 维纳滤波器</b> .....	( 84 )
5.1 维纳-霍夫积分方程及其求解 .....	( 84 )
5.2 维纳滤波器误差与输入信号正交性 .....	( 88 )
5.3 离散维纳滤波器 .....	( 88 )
5.4 维纳滤波用于信号预测 .....	( 92 )
5.5 后验维纳滤波 .....	( 95 )
思考与练习 .....	( 96 )
<b>第 6 章 自适应滤波</b> .....	( 98 )

6.1 绪论	(98)
6.2 自适应最小均方误差(LMS)滤波	(102)
6.3 自适应最小二乘(RLS)滤波	(124)
6.4 自适应信息处理的应用	(145)
思考与练习	(158)
<b>第7章 小波变换与多分辨率分析</b>	<b>(162)</b>
7.1 时变信号与联合时频分析	(162)
7.2 连续小波变换	(165)
7.3 多分辨率分析	(172)
7.4 小波变换的数字计算与滤波器组	(185)
7.5 由滤波器确定尺度函数和小波函数	(189)
7.6 小波变换用于表征信号的突变性质	(193)
7.7 信号的理想重建	(199)
思考与练习	(207)
<b>第8章 人工神经网络</b>	<b>(209)</b>
8.1 绪论	(209)
8.2 人工神经网络基础知识	(214)
8.3 前馈型神经网络	(227)
8.4 反馈型神经网络	(243)
8.5 随机型神经网络模型	(255)
8.6 自组织神经网络模型	(268)
8.7 神经网络软件的实现	(274)
思考与练习	(288)
<b>第9章 模糊信息处理</b>	<b>(290)</b>
9.1 模糊数学基础	(291)
9.2 模糊聚类分析	(298)
9.3 模糊模式识别	(303)
9.4 模糊综合评判	(306)
9.5 模糊推理	(309)
9.6 模糊控制	(314)
思考与练习	(320)
<b>参考文献</b>	<b>(325)</b>

# 第1章 随机信号及其统计描述

作为动态数据分析和处理的基础,本章将主要回顾随机过程(信号)的统计描述方法、基本特性及其功率谱密度函数。

一般而言,信号可分为确定性信号和随机信号。确定性信号可用明确的数学关系式来描述。而随机信号则不能,也无法预测其未来时刻的精确值,只能用概率分布函数或概率密度函数来描述,或用统计平均来表征。对于确定性信号其时域表示是确定的,其频域表示(频谱)可用傅里叶变换求取。对于不满足傅里叶收敛条件的序列可用 $z$ 变换求离散序列的复频域谱函数。随机信号无始无终,具有无限能量,因而不满足绝对可积条件,其傅里叶变换不存在,需要研究其功率在频域上的分布,即功率谱密度或功率谱。

## 1.1 随机信号

随机信号是时间(或其他物理量)的随机函数,它描述了随机变量随时间(或其他参量)的变化。

### 1.1.1 随机信号及其分类

随机信号不能用确定的时间函数来描述,只能用统计方法研究,其统计特性通常用概率分布函数和概率密度函数来描述或用统计平均(均值、方差、相关函数与协方差函数)来表征。随机信号也称为随机函数、时间序列或随机过程,是数学上表示无限能量信号的一个基本概念。在时域离散情况下的随机过程称为离散随机信号。

接收机的噪声电压是随时间而随机变化的,每次观察噪声电压时可得到具体波形。各次观察的结果都不一样,但都是确定的时间函数,称为随机信号的样本函数(简称样本)或实现。无限多个可能样本的集合(或总体)就构成了随机信号。在离散时间的情况下,设 $x(n)$ 是随机信号一个实现的取样序列,则无限多个可能取样序列的总集,就构成了离散随机信号。在某一具体的时刻上,这些样本的集合定义了一随机变量 $x_n$ 。因此随机信号(或离散随机信号)可由随机变量的集合组成,随机信号是随时间变化的随机变量。

随机信号可分为平稳随机信号和非平稳随机信号两大类。

#### 1. 平稳随机信号

平稳随机信号分类如图 1-1 所示。

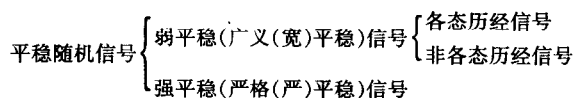


图 1-1 平稳随机信号分类

所谓弱平稳是指均值 $\mu_x$ 和相关 $R_x(m)$ 不随时间变化的随机信号,即 $\mu_x$ 和 $R_x(m)$ 不是 $n$ 的函数。所谓强平稳,是指它的 $n$ 维概率密度(或 $n$ 维分布密度)不随时间起点选择不同而改

变。强平稳性的一个重要推论是过程的全部概率结构仅取决于时差。各态历经信号(Ergodic Signal)是指无限个样本在某时刻所历经的状态,等同于某个样本在无限时间里所历经的状态。对于各态历经信号,只需测量一次就足以描述所有样本的随机特性。因此,为简单,今后对于各态历经随机信号,不再区分随机变量  $x_n$  和它在取样序列中的值  $x(n)$ ,而且凡提到“各态历经”过程,通常皆指弱各态历过程。应该指出,各态历经信号一定是平稳随机信号,但平稳随机信号并不都具备各态历经性。

## 2. 非平稳随机信号

非平稳随机信号是指均值随时间变化的随机信号。

现实的随机信号,大部分可逼近各态历经的平稳随机过程,下面将只讨论各态历经离散随机信号。随机信号可用其概率函数(包括概率密度函数和概率分布函数)、数字特征和功率谱密度函数等来描述。但实际中,要得到某一随机信号的  $n$  维概率密度(或  $n$  维分布密度)是相当困难的,且计算也十分繁琐。事实上,许多问题的解决只要知道随机信号的某些数字特征就够了。

### 1.1.2 离散随机信号的数字特征

离散随机信号常用的数字特征是各种平均特性及相关函数等,实际上相关函数也是一种平均。在各态历经情况下,离散随机信号下的集合平均等于时间平均。实际中遇到的信号都具有因果性,即  $n < 0, x(n) = 0$ ,且  $x(n)$  是实序列。

在各态历经情况下,平均就是某样本幅值的时间平均。平均分为均值(一阶矩)、方差(二阶中心矩)和均方值(二阶矩)3种,其定义式分别为

$$\mu_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = E[x(n)] \quad (1.1)$$

$$\sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - \mu_x]^2 = E[(x(n) - \mu_x)^2] \quad (1.2)$$

$$\mu_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n)]^2 = E[x^2(n)] \quad (1.3)$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2(n)] - \mu_x^2 \quad (1.4)$$

## 1. 相关函数

### (1) 自相关函数

离散随机信号  $x(n)$  在时刻  $n_1$  和  $n_2$  的相关性由自相关函数  $R_x(n_1, n_2)$  来描述

$$R_x(n_1, n_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n_1)x(n_2) = E[x(n_1)x(n_2)] \quad (1.5)$$

若  $m = n_2 - n_1$ , 并令  $n = n_1$ , 则

$$R_x(m) = E[x(n)x(n+m)] \quad (1.6)$$

性质 1: 自相关函数是偶函数, 即令  $n' = n - m$ , 得

$$R_x(-m) = E[x(n)x(n-m)] = E[x(n'+m)x(n')] = R_x(m) \quad (1.7)$$

性质 2: 自相关函数在  $m = 0$  时有最大值

$$R_x(0) \geq |R_x(m)|$$

自相关函数  $R_x(0) = E[x^2(n)] = \mu_x^2$ , 对于不包含任何周期分量的平稳过程,  $R_x(\infty) = \mu_x^2$ 。由以上性质可得计算方差的表达式



$$\sigma_x^2 = R_x(0) - R_x(\infty) \quad (1.8)$$

当序列  $x(n)$  为复数序列时, 则自相关函数为

$$R_x(m) = E[x(n)x^*(n+m)] \quad (1.9)$$

自相关函数  $R_x(m)$  反映了两个波形  $x(n)$ 、 $x(n+m)$  的相似程度。假如信号平均来讲起伏较慢, 则两个相继的样本  $x(n)$  和  $x(n+1)$  将近于相同, 且其乘积为正,  $R_x(1)$  为正。自相关函数的值越大, 这些变量就越相关。因为  $R_x(m)$  把相隔为时滞  $m$  的信号值联系起来, 可以预期自相关函数和  $m$  的依存性与信号的起伏速率有关。

## (2) 互相关函数

互相关函数表示两离散随机信号  $x(n)$  和  $y(n)$  之间的相关性

$$R_{xy}(m) = E[x(n)y(n+m)] \quad (1.10)$$

且有特性

$$\begin{aligned} R_{xy}(m) &= R_{yx}(-m) \\ R_x(0)R_y(0) &\geq |R_{xy}(m)|^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

## 2. 协方差函数

### (1) 自协方差函数

自协方差函数表示去掉均值后序列的相关性, 并用下式表示:

$$C_x(m) = E[(x(n) - \mu_x)(x(n+m) - \mu_x)] = R_x(m) - \mu_x^2 \quad (1.12)$$

当  $m=0$  时

$$C_x(0) = R_x(0) - \mu_x^2 = \mu_x^2 - \mu_x^2 = \sigma_x^2 \quad (1.13)$$

当序列  $x(n)$  为复序列时, 则自协方差函数为

$$\begin{aligned} C_x(m) &= E[(x(n) - \mu_x)(x^*(n+m) - \mu_x^*)] \\ &= R_x(m) - \mu_x\mu_x^* = R_x(m) - |\mu_x|^2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

### (2) 互协方差函数

用互协方差函数来描述两个离散随机信号  $x(n)$ 、 $y(n)$  之间的协方差

$$\begin{aligned} C_{xy}(m) &= E[(x(n) - \mu_x)(y^*(n+m) - \mu_y^*)] \\ &= R_{xy}(m) - \mu_x\mu_y^* \end{aligned} \quad (1.15)$$

自相关函数或自协方差函数可用来检测混有随机噪声的信号。例如, 平稳白噪声的自相关函数仅在  $m=0$  处出现某取样函数值, 便于分离信号。互相关函数或互协方差函数则除了可以用来检测噪声中的信号之外, 还可以通过求一个系统的输入和输出信号序列间的互相关函数最大值出现的位置来确定线性系统的延迟。

**例 1.1** 随机过程  $X(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta)$ ,  $\theta$  为随机变量, 其概率密度函数为

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求  $X(t)$  的均值、相关函数并分析其平稳性。

**解:**  $\mu(t) = E[X(t)] = E[a \cos(\omega_0 t + \theta)]$

$$= \int_0^{2\pi} a \cos(\omega_0 t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \alpha \sin(\omega_0 t + \theta) \Big|_0^{2\pi} = 0 \\
 R(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\
 &= \alpha^2 E[\cos(\omega_0 t_1 + \theta)\cos(\omega_0 t_2 + \theta)] \\
 &= \alpha^2 \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t_1 + \theta)\cos(\omega_0 t_2 + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{\alpha^2}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\theta) + \cos(\omega_0(t_2 - t_1))] \times \frac{1}{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{\alpha^2}{2} \cos\omega_0 \tau
 \end{aligned}$$

式中,  $\tau = t_2 - t_1$ 。可知  $X(t)$  的均值和相关函数均与观察时间  $t$  无关, 因此  $X(t) = \alpha \cos(\omega_0 t + \theta)$  是宽平稳随机过程, 或简称平稳随机过程。今后如不特别说明, 平稳即指宽平稳。

$$\begin{aligned}
 \text{又 } \overline{x(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \alpha \cos(\omega_0 t + \theta) dt = 0 \\
 R(\tau) &= \overline{x(t)x(t+\tau)} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \alpha \cos(\omega_0 t + \theta) \cdot \alpha \cos(\omega_0(t+\tau) + \theta) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta) + \cos\omega_0 \tau] dt \\
 &= \frac{\alpha^2}{2} \cos\omega_0 \tau
 \end{aligned}$$

由于  $X(t)$  对集合的平均与对单个样本函数的时间平均所求得的一阶矩与相关函数相等, 因此它是各态历经的。

**例 1.2** 直流随机过程,  $X(t) = I$ ,  $I$  为随机变量, 表示样本函数  $i_k, k = 1, 2, 3, \dots$  ( $i_k$  为直流) 的集合。可知  $X(t) = I$  是平稳的, 但它不是各态历经的。

## 1.2 随机信号的功率谱

工程实际中总是从时域和频域两个角度去研究信号或系统, 随机信号也不例外。但是, 由于随机信号的任何样本都不能完全描述过程本身, 其谱密度函数(如果傅里叶变换存在的话)也不能体现随机信号的特征。好在随机信号的能量特征是各态历经的, 可以从能量的频域分布角度讨论信号的频域特性。

直接将功率谱密度定义为自相关函数的傅里叶变换。对离散随机信号有

$$\left. \begin{aligned}
 S_x(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) e^{-j\omega m} \\
 R_x(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega
 \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

式中,  $\omega$  表示数字域频率。这就是离散随机信号的维纳-辛钦公式。

与确定性信号序列的谱分析相对应, 可以广义地认为离散随机信号的功率谱密度是自相关函数的  $z$  变换

$$S_x(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) z^{-m} \quad (1.17)$$

由式(1.16)知,由于  $m \rightarrow \infty$  时,  $R_x(m) \rightarrow \mu_x^2$ , 所以只有当  $\mu_x = 0$  时,  $R_x(m)$  的  $z$  变换才存在, 其自相关函数  $R_x(m)$  的傅里叶变换才存在。  $\mu_x \neq 0$  时, 自相关函数的傅里叶变换不存在, 除非把傅里叶变换的定义推广, 容许功率谱在  $\omega = 0$  处有一冲激量。  $\mu_x = 0$  时, 自相关函数和自协方差函数是相同的。

在假设  $\mu_x = 0$  的条件下, 有

$$R_x(0) = \mu_x^2 = E[x(n)^2] = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega}) d\omega \quad (1.18)$$

上式左边的均方值表示序列的平均功率, 右边则表示全部数字频率范围内  $S_x(e^{j\omega})$  的总和。所以  $S_x(e^{j\omega})$  确实可称为“功率谱密度”。

因为平稳随机信号的相关函数是确定性函数, 故其功率谱也是确定的。由于实序列的自相关函数是偶对称的实函数, 按傅里叶变换的性质其功率谱也应是偶对称的实函数

$$S_x(e^{j\omega}) = S_x(e^{-j\omega}) \quad (1.19)$$

功率谱密度是非负的, 因此实信号功率谱密度是偶正实函数,  $S_x(e^{j\omega})$  还是  $\omega$  的以  $2\pi$  为周期的周期函数。对  $R_x(m)$  求离散傅里叶变换, 则得到逼近于  $S_x(e^{j\omega})$  的离散功率谱密度函数  $S_x(\omega)$ 。

**例 1.3** 已知相关函数为  $R_x(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau$ , 求功率谱密度函数  $S_x(\omega)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau}}{2} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j(\omega-\omega_0)\tau} + e^{-j(\omega+\omega_0)\tau}) d\tau \\ &= \frac{1}{2} a^2 \pi (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \end{aligned}$$

应该特别指出, 一般不定义非平稳随机序列的功率谱密度。

互功率谱密度函数定义为两随机序列互相关函数的傅里叶变换, 即

$$\left. \begin{aligned} S_{xy}(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xy}(m) e^{-j\omega m} \\ R_{xy}(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xy}(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

并有下列性质

$$\left. \begin{aligned} S_{xy}(e^{j\omega}) &= S_{yx}(e^{-j\omega}) = S_{yx}^*(e^{j\omega}) \\ S_x(e^{j\omega}) \cdot S_y(e^{j\omega}) &\geq |S_{xy}(e^{j\omega})|^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

### 1.3 随机信号通过线性系统

设  $x(n)$  是广义平稳输入随机序列,  $h(n)$  为一稳定的离散时间线性非时变系统的单位取

样响应,则系统的输出为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (1.22)$$

由于系统是稳定的,若  $x(n)$  有界,则  $y(n)$  必有界。后面还将证明,如果输入是平稳的,则输出也是平稳的。许多情况下,只用均值、方差和自相关等几个参数来描述输入与输出随机序列就足够了。

### 1.3.1 输出过程的均值

$$\mu_y = E[y(n)] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right] \mu_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = \mu_x H(e^{j\omega}) \quad (1.23)$$

式(1.23)说明输出过程的均值等于输入过程的均值与系统直流频率响应的乘积。由于输入是平稳的,输出的均值是一常数。

### 1.3.2 自相关函数

$$\begin{aligned} R_y(n, n+m) &= E[y(n)y^*(n+m)] \\ &= E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(k)h^*(r)x(n-k)x^*(n+m-r)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} h^*(r)E[x(n-k)x^*(n+m-r)] \end{aligned}$$

假设  $x(n)$  是平稳的,所以  $E[x(n-k)x^*(n+m-r)]$  只与时间差  $m+k-r$  有关

$$R_y(n, n+m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} h^*(r)R_x(m+k-r) = R_y(m) \quad (1.24)$$

可见输出自相关序列也仅与时间差  $m$  有关。因此,若线性非时变系统输入激励平稳时,则输出也是平稳的。

令  $l = r - k$ ,代入式(1.24)得

$$\begin{aligned} R_y(m) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_x(m-l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h^*(l+k) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_x(m-l)V(l) \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$V(l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h^*(l+k) \quad (1.26)$$

式中,  $V(l)$  称作  $h(n)$  的非周期性自相关序列。式(1.25)表明,输出序列的自相关函数等于输入序列的自相关函数与单位取样响应自相关的卷积,从而可以实现对离散随机信号的数字相关滤波。

### 1.3.3 功率传递关系

式(1.25)两端取傅里叶变换,则输出随机序列的功率谱密度

$$S_y(e^{j\omega}) = S_x(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2 \quad (1.27)$$

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{S_y(e^{j\omega})}{S_x(e^{j\omega})}} \quad (1.28)$$

假定  $\mu_x = 0$ ,则由式(1.23),也有  $\mu_y = 0$ ,因此

$$R_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_y(e^{j\omega}) d\omega$$

为输出总平均功率。将式(1.27)代入上式,则

$$R_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 S_x(e^{j\omega}) d\omega$$

假设  $H(e^{j\omega})$  是理想带通滤波器,  $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, \omega_a < |\omega| < \omega_b \\ 0, \text{其他} \end{cases}$

$$R_y(0) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_a}^{\omega_b} S_x(e^{j\omega}) d\omega \quad (1.29)$$

即可以用  $\omega_a$  与  $\omega_b$  间  $S_x(e^{j\omega})$  下面包括的面积表示输入在该频带内信号的均方值。因为输出功率必须是非负的,即

$$\lim_{(\omega_b - \omega_a) \rightarrow 0} R_y(0) \geq 0$$

故

$$S_y(e^{j\omega}) \geq 0 \quad (1.30)$$

这就证明了前面指出的功率谱函数是偶正实函数。

#### 1.3.4 互相关函数、互功率谱

线性非时变系统输入和输出间的互相关函数为

$$\begin{aligned} R_{xy}(m) &= E[x(n)y^*(n+m)] \\ &= E\left[x(n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^* x(n+m-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^*(k) R_x(m-k) \end{aligned} \quad (1.31)$$

上式说明输入和输出间的互相关函数是单位取样响应的共轭序列和输入自相关序列的卷积。

设  $\mu_x = 0$ , 式(1.31)两边取傅里叶变换, 则得

$$S_{xy}(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) S_x(e^{j\omega}) \quad (1.32)$$

因为自功率谱是实函数, 互功率谱是一复函数, 于是应用式(1.21)可得

$$S_{yx}(e^{j\omega}) = S_{xy}^*(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) S_x(e^{j\omega}) \quad (1.33)$$

这个公式既含有振幅特性又含有相位特性。由功率密度函数可以确定线性系统的频率特性

$$H(e^{j\omega}) = S_{yx}(e^{j\omega}) / S_x(e^{j\omega})$$

如果将线性系统的频率特性表示为振幅和相位

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\theta(\omega)}$$

则系统的相位特性  $\theta(\omega)$  可由  $S_{xy}(e^{j\omega})$  和  $S_{yx}(e^{j\omega})$  求得, 即

$$\frac{S_{xy}(e^{j\omega})}{S_{yx}(e^{j\omega})} = \frac{H^*(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} = e^{2j\theta(\omega)}$$

当输入是白噪声时, 即  $R_x(m) = \sigma_x^2 \delta(m)$  代入式(1.31)得

$$R_{xy}(m) = \sigma_x^2 h(m) \quad (1.34)$$

上式说明, 对于白噪声输入而言, 线性非时变系统输入与输出间的互相关函数正比于系统的单位取样响应。类似地, 白噪声输入的功率谱是

$$S_x(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi) \quad (1.35)$$

可得

$$S_{xy}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 H^*(e^{j\omega}) \quad (1.36)$$

若能测出系统对白噪声输入的响应,则根据式(1.34)、式(1.36)可分别估计出系统的单位取样响应和频率响应。

## 1.4 随机信号的参数估计

实际中总是根据各态历经信号的一个取样序列的有限数据  $x_n (0 \leq n \leq N-1)$  来估计随机信号的某一参数  $\theta$ , 参数  $\theta$  的估值  $\hat{\theta}$  也是随机变量  $x_n$  的函数, 即

$$\hat{\theta} = F(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \quad (1.37)$$

一般, 均值估计

$$\hat{\mu}_x = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N x_i$$

方差估计

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2$$

**例 1.4** 已知某类灯泡的寿命服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu$  与  $\sigma^2$  都是未知数, 今抽测了 9 个灯泡, 得其寿命(h)分别为

1 421, 1 343, 1 564, 1 144, 1 780, 1 625, 1 238, 1 516, 1 491

问总体的均值  $\mu$  与方差  $\sigma^2$  各为多少?

**解:** 将这 9 个数值看成是随机过程的一个样本, 可求得

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 1\,456$$

$$\hat{\sigma}^2 = 196^2$$

可以理解, 当  $N \rightarrow \infty$  时,  $\hat{\mu} \rightarrow \mu, \hat{\sigma}^2 \rightarrow \sigma^2$ , 即估计值趋向于总体均值与方差。

### 1.4.1 最小均方误差估计

估值  $\hat{\theta}$  是观察样本的函数, 显然希望  $\hat{\theta}$  尽可能地接近真值  $\theta$ 。最小均方误差估计就是使  $\hat{\theta}$  与  $\theta$  的均方误差最小的估计, 即使  $\int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \hat{\theta})^2 p(\theta/x) d\theta$  最小。令

$$\frac{d}{d\hat{\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \hat{\theta})^2 p(\theta/x) d\theta = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta/x) d\theta + 2\hat{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta/x) d\theta = 0$$

考虑到  $\int_{-\infty}^{\infty} p(\theta/x) d\theta = 1$ , 求得  $\hat{\theta}$  的最佳估价值是

$$\hat{\theta}_{ms} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta/x) d\theta \quad (1.38)$$

$\hat{\theta}_{ms}$  是  $\theta$  对于后验概率密度函数  $p(\theta/x)$  的平均值。

**例 1.5** 已知观察值为

$$x_i = \theta + n_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

假设  $n_i$  为独立同分布的高斯随机变量, 其均值为零, 方差为  $\sigma_n^2$ , 信号  $\theta$  为一高斯随机过程, 其均值为零, 方差为  $\sigma_\theta^2$ , 要求根据  $N$  个观察值  $x_1, x_2, \dots, x_N$  估计  $\theta$ 。

**解:** 第一步需求得相应的概率密度函数  $p(\theta/X)$ , 有

$$p(\theta/X) = \frac{p(X/\theta)p(\theta)}{p(X)}$$

已知

$$p(X/\theta) = \prod_{i=1}^N p(x_i/\theta) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(x_i - \theta)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}\right)$$

所以

$$p(X/\theta) = \frac{\left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\right)}{p(X)} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{(x_i - \theta)^2}{\sigma_n^2} + \frac{\theta^2}{\sigma_\theta^2}\right)\right\}$$

令  $\sigma_m^2 = \frac{\sigma_\theta^2 \sigma_n^2}{N\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2}$ , 将上式两边同时乘以  $\exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_m^2}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N x_i\right)\right]$ , 经整理得

$$p(\theta/X) = K(X) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_m^2} \left[\theta - \frac{\sigma_m^2}{\sigma_n^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)\right]^2\right\}$$

式中

$$K(X) = \frac{\left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\right)}{p(X)} \times \exp\left[\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N x_i \left(\frac{\sigma_m^2}{\sigma_n^2} - 1\right)\right]$$

$K(X)$ 是与  $\theta$  无关的系数。 $p(\theta/X)$ 亦是高斯概率密度函数。

$$\hat{\theta}_{\text{ms}} = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \frac{\sigma_n^2}{N}} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right)$$

#### 1.4.2 最大似然估计

另一种直观的估计规则是最大后验概率估计  $\hat{\theta}_{\text{map}}$ , 显然  $\hat{\theta}_{\text{map}}$  应满足

$$\left. \frac{\partial \ln p(\theta/X)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}_{\text{map}}} = 0$$

因为

$$p(\theta/X) = \frac{p(X/\theta)p(\theta)}{p(X)} \quad \left(\frac{\partial \ln p(X/\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta}\right) \Big|_{\theta = \hat{\theta}_{\text{map}}} = 0 \quad (1.39)$$

其中第一项描述了估值对  $X$  的依赖关系, 第二项表示先验信息, 如果  $\theta$  是非随机变量, 第二项无意义, 则有估值方程

$$\left. \frac{\partial \ln p(X/\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}_{\text{ml}}} = 0 \quad (1.40)$$

称上式为极大似然估值方程,  $\hat{\theta}_{\text{ml}}$  为极大似然估值。

**例 1.6** 设有观察值  $x_i, i = 1, 2, \dots, N, x_i = \theta + n_i, \theta$  为非随机变量, 代表确定性信号,  $n_i \sim N(0, \sigma_n^2)$  是噪声, 求似然估值  $\hat{\theta}_{\text{ml}}$ 。

解: 
$$p(X/\theta) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(x_i - \theta)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \theta)^2\right)$$

上式取对数,求微分得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(X/\theta)}{\partial \theta} &= \frac{1}{\sigma_n^2} \left( \sum_{i=1}^n (x_i - \theta) \right) \\ &= \frac{N}{\sigma_n^2} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta) \right) \end{aligned}$$

令上式为 0,求得极大似然估值

$$\hat{\theta}_{\text{ml}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i$$

可知这时的似然估值,实际上是求  $N$  个取样值的平均值。

### 1.4.3 估值的评价

在对同一随机过程的参数进行估值时,由于选取的样本不同,所求得的估值可能不同;即使利用相同的样本,由于采用的估值方法不同,所得结果也有可能不同。因此对估值需有一个评判的标准。通常用下面三个值来评定估计的质量。

#### 1. 偏

估计量的偏定义为参数的真值与估计量期望值的差,即

$$\text{偏} = \theta - E[\hat{\theta}] = B \quad (1.41)$$

若偏  $B = 0$ ,则所得的估计量为无偏估计,估值的期望就是真值。如果

$$\lim_{N \rightarrow \infty} B = 0$$

则称  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的渐近无偏估计。

#### 2. 方差

估计量的方差定义为

$$\text{Var}[\hat{\theta}] = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] = \sigma_{\hat{\theta}}^2 \quad (1.42)$$

估计量的方差可以有效地衡量概率密度函数的展宽程度。小的方差意味着概率密度  $P_{\hat{\theta}}(\hat{\theta})$  集中在其期望值附近。若估计量是无偏的,方差意味着估计量偏离其真值摆动的大小。若  $\hat{\theta}$  和  $\hat{\theta}'$  都是  $\theta$  的无偏估计,它们的方差分别为  $\text{Var}[\hat{\theta}]$  和  $\text{Var}[\hat{\theta}']$ ,且满足

$$\text{Var}[\hat{\theta}] < \text{Var}[\hat{\theta}'] \quad (1.43)$$

则称估值  $\hat{\theta}$  比  $\hat{\theta}'$  有效。

在许多情况下,比较两个估计量是很麻烦的,偏较小的估计量可能有较大的方差,或者方差虽小,偏却很大。因此,研究估计量的均方误差有时会更方便。

#### 3. 均方误差

$$\text{均方误差} = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = \sigma_{\hat{\theta}}^2 + B^2 \quad (1.44)$$

均方误差与偏和方差有关。均方误差最小,就要求  $\sigma_{\hat{\theta}}^2, B^2$  之和最小。如果随着观察次数增大,偏和方差都趋近于零,则称该估计为一致估计。

通常总是希望一种估计方法能尽量满足估计的无偏性、有效性及一致性。



## 1.5 相关函数的估计

### 1.5.1 自相关函数的估计

假定有一离散的广义平稳随机信号  $x(n)$ , 其均值为零, 则自相关函数为

$$R_x(m) = E[x(n)x(n+m)]$$

实际上只能得到过程的有限样本序列  $\{x(n), 0 \leq n \leq N-1\}$ 。因为  $x(n)$  是各态历经的, 因此上式的集合平均可由单一样本  $x(n)$  的时间平均来实现。由于  $x(n)$  只有  $N$  个观察值, 对每一固定延迟  $|m|$ , 可利用的数据只有  $N-1-|m|$  个, 所以可以得到自相关函数的一种估计量

$$R_N(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+|m|) \quad (|m| \leq N-1) \quad (1.45)$$

$R_N(m)$  的下角标  $N$  表明计算中使用的  $x(n)$  的数据长度为  $N$ 。  $m$  很大时, 可能的乘积将非常少。当  $m \geq N$  时, 得不到延迟为  $m$  的取样对, 因此

$$R_N(m) = 0 \quad (m \geq N) \quad (1.46)$$

由于式中取  $|m|$ , 使得自相关函数的估计量和自相关函数一样也具有偶函数特性。

另一种估值

$$R'_N(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+|m|) \quad (|m| \leq N-1) \quad (1.47)$$

$R'_N(m)$  与  $R_N(m)$  的区别仅在于求和号前相乘因子有所不同, 即

$$R_N(m) = \frac{N-|m|}{N} R'_N(m)$$

由有限长样本估计的自相关函数  $R_N(m)$  与其真实自相关函数  $R_x(m)$  并不相等, 二者的偏离带有随机性。这种估计方法的效果如何, 需要通过研究  $R_N(m)$  的统计特性来说明。则

$$E[R_N(m)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E[x(n)x(n+|m|)] = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) R_x(m) \quad (1.48)$$

显然

$$\text{偏} = R_x(m) \frac{|m|}{N} \quad (1.49)$$

$R_N(m)$  是有偏的。

① 对于一固定的延迟  $|m|$ , 当  $N \rightarrow \infty$  时,  $|m|/N$  项趋于零, 所以  $R_N(m)$  是渐近无偏的。

② 对于一固定的延迟  $|m|$ , 只有当  $|m| \ll N$  时,  $R_N(m)$  的均值才接近于真值  $R_x(m)$ 。也即, 当  $|m|$  越接近于  $N$  时, 估计的偏越大。

对于另一种估值  $R'_N(m)$  有

$$\begin{aligned} E[R'_N(m)] &= \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E[x(n)x(n+|m|)] \\ &= \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} R_x(m) \\ &= R_x(m) \end{aligned} \quad (1.50)$$