



普通高等教育“十五”国家级规划教材

数学模型方法与算法

边馥萍 侯文华 梁冯珍 编著



高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材.本书通过大量的实例,详细介绍了数学模型的方法与算法.本书按建模所用的数学方法共分为12章,包括数学模型概论、初等模型、微分方程模型、稳定性问题、线性规划与非线性规划模型、网络与组合优化模型、对策与决策模型、逻辑模型、最优控制模型、概率分布模型、回归分析模型和时间序列模型,模型内容涉及生物、医学、人口、生态、经济管理、军事和体育运动等众多领域的应用问题.内容编排由易到难,由简单到复杂,强调因果关系分析,给出应用软件算例,有助于读者掌握数学建模方法,提高建模能力.读者只需具备高等数学、线性代数、概率统计方面的基础知识就可以阅读、学习本书.

本书可作为高等院校各专业本科生、研究生数学模型课的教材,大学生数学建模竞赛的培训教材及科技工作者和工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学模型方法与算法/边馥萍,侯文华,梁冯珍编著.

北京:高等教育出版社,2005.4

ISBN 7-04-014408-5

I.数... II.①边...②侯...③梁... III.数学模型-高等学校-教材 IV.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 013088 号

策划编辑 马 丽 责任编辑 张耀明 封面设计 刘晓翔 责任绘图 朱 静
版式设计 张 岚 责任校对 王 超 责任印制 孔 源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landracom.com
			http://www.landracom.cn
经 销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		
印 刷	北京四季青印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2005年5月第1版
印 张	24	印 次	2005年5月第1次印刷
字 数	450 000	定 价	27.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 14408-00

前 言

随着科学技术的发展,尤其是计算机技术的飞速发展,数学在科学研究与工程技术中的作用不断增强,其应用范围几乎覆盖了所有的学科分支,渗透到各领域中.当今社会的日益数字化,各学科、各领域对实际问题的研究日益精确化、定量化和数字化,使得数学模型成为解决实际问题的重要工具.

数学模型就是用数学语言、方法近似地刻画要解决的实际问题,并给出数学表达式.对于已建立的模型采用推理、证明、数值计算等技术手段及相应的数学软件求解,并用所得结果拟合实际问题.若结果不能说明实际问题或与实际问题相差较远,则需适当修改模型,使之能合理解释现实问题.一个完整的数学建模过程是综合运用知识和能力,解决现实问题的过程.数学模型课就是一门培养学生的数学素质、提高学生的数学应用能力的基本技能课.

培养学生的数学素质,提高学生的应用能力是当前进行的大学基础数学教学改革中一项重要内容.由于数学建模课程在培养学生能力方面的重要作用,这门课程的建设已经成为数学教学改革的一个重要方面.本书作为数学建模课程教材,在编写过程中特别注意培养和提高学生对现实问题的洞察力,对复杂问题的抽象、简化能力,运用已学到的数学思想和方法对现实问题的综合分析能力、联想能力及应用计算机和相应的数学软件包的能力.本书具有以下特点:模型内容丰富,大量实例来自众多领域的实际问题;模型建立过程注重问题的分析;模型求解中强调数学软件的应用;试图在数学模型课中引入数学实验.

本书内容共分为12章,第1章概括论述了数学模型的基本定义、特点,以实例说明建模过程,建模步骤与建模能力的培养,方法与应用,并对部分常用的数学软件作了简单介绍.第2章至第12章根据建模所用的数学方法不同分为两大部分:确定性模型和随机性模型.确定性模型部分包括了初等模型,微分方程模型,稳定性问题,线性规划与非线性规划模型,网络与组合优化模型,对策与决策模型,逻辑模型,最优控制模型.随机性模型部分包括了概率分布模型、回归分析模型和时间序列模型.确定性模型部分基本上是采用因果关系机理性分析方法建模,随机性模型主要是利用数据分析法建模.为使读者更好地掌握建模思想,我们力图做到在每章的开始论述或强调本章所用的数学方法必备的基础知识,随后的各节给出丰富的建模实例,为读者展示数学模型在不同领域内的应用.本书在多数章的最后一节,给出应用数学软件求解某类模型的算例,有助于读者学会如何应用数学软件求解.每章最后附有一定数量的习题,便于读者模拟、练习、

掌握建模的技巧与方法.

本书作为数学建模课程教材,读者只要具备大学基础数学(即高等数学,线性代数和概率统计)的知识,就可以阅读、学习本书.本书对超出基础数学范围,涉及运筹学、动力学系统平衡及时间序列、排队论等方面的知识均在书中做了深入浅出的介绍,有助于读者掌握相关的建模方法.

编者边馥萍自1983年开始,师从于清华大学萧树铁先生,学习数学模型,得益于萧先生的指教,并于1984年在天津大学讲授此课.二十年来一直从事数学模型课的教学及十多年来组织培训大学生参加数学建模,不断地对数学建模课程的内容、方法进行深入研究和积极探索,在饱尝酸甜苦辣的同时,积累了成功的经验,也吸取了失败的教训,根据亲身体会,在1989年出版的《数学模型》基础上,编写此书.

本书的第1、2、3、4章由边馥萍编写,第5、6、7、8、9章由侯文华编写,第10、11、12章由梁冯珍编写,全书由边馥萍统稿.本书的例子选自书后的参考文献,对1989年出版的《数学模型》的部分章节作了保留,增补、改写其余大部分章节的实际例子,并对建模过程、解法、软件实现及结果均作了新的处理.由于作者的水平有限,对于书中的错误与不妥之处,恳请读者指正.

编 者

2004.3

目 录

第1章 数学模型概论	1
1.1 数学模型的基本概念	1
1.2 两个典型的数学模型	2
1.3 建立模型的步骤与能力	10
1.4 数学模型的方法与分类	13
1.5 数学建模常用的数学软件	14
习题1	17
第2章 初等模型	20
2.1 核竞争模型	20
2.2 实物交换模型	22
2.3 供求问题	23
2.4 量纲分析	28
2.5 四肢动物体形问题	30
2.6 跑步与走路步长的选择	31
2.7 包装成本问题	34
2.8 遗传问题	35
2.9 电脑化断层摄影术的重构	42
2.10 数学软件求解线性方程组	50
习题2	51
第3章 微分方程模型	55
3.1 建模方法	55
3.2 体重与新陈代谢	55
3.3 赝品的鉴定(Vanmeegren 伪造名画案)	57
3.4 新产品的推销与广告	60
3.5 肿瘤的生长规律	63

3.6	传染病的传播	66
3.7	糖尿病的诊断	71
3.8	生物动力学中的一个放射性轨迹问题	75
3.9	国民经济的增长问题	80
3.10	国民收入的稳定问题	84
3.11	应用软件算例	86
	习题 3	89
第4章 稳定性问题		92
4.1	平面稳定性理论	92
4.2	捕食系统的 Volterra 方程	96
4.3	非平凡平衡点存在的条件及无圈定理	100
4.4	较一般的捕食系统的讨论	102
4.5	应用软件算例	104
	习题 4	106
第5章 线性规划与非线性规划模型		109
5.1	生产计划与存储问题	109
5.2	固定成本与厂址选择问题	115
5.3	套裁下料问题	120
5.4	投资问题(I)	126
5.5	算法与软件实现	128
	习题 5	132
第6章 网络与组合优化模型		135
6.1	通讯网络的连接问题	135
6.2	排序与时间表模型	137
6.3	排课表问题与文件的网络传输问题	143
6.4	化学药品的贮藏问题	147
6.5	锁具装箱问题	149
6.6	求解离散模型的方法与算法	150
	习题 6	153

第7章 对策与决策模型	155
7.1 对策问题	155
7.2 企业竞争的对策模型	159
7.3 合作对策	161
7.4 层次分析法	163
7.5 残缺判断与群组决策	168
7.6 应用软件算例	172
习题 7	175
第8章 逻辑模型	178
8.1 物价指数问题	178
8.2 信息模型	182
8.3 公平选举是可能的吗?	190
8.4 邮政编码与解码问题	194
8.5 条形码技术	199
8.6 彩票问题	203
习题 8	205
第9章 最优控制模型	207
9.1 血管几何学	207
9.2 掌舵问题	209
9.3 自然资源的开发	213
9.4 最优城市体制	220
9.5 Severn 堰坝	223
9.6 人口控制模型	227
9.7 投资问题(II)	229
9.8 最优控制模型的变分方法	236
习题 9	242
第10章 概率分布模型	244
10.1 风险决策模型	244

10.2	随机库存决策模型	256
10.3	排队论模型	262
10.4	应用软件算例	276
	习题 10	283
第11章 回归分析模型		285
11.1	一元线性回归模型	285
11.2	一元多重线性回归模型	288
11.3	可化为线性回归的曲线回归	304
11.4	应用软件算例	315
	习题 11	326
第12章 时间序列模型		330
12.1	ARMA 序列的相关分析	330
12.2	ARMA 模型的参数估计	334
12.3	ARMA 模型的定阶与检验	338
12.4	ARMA 建模流程	341
12.5	平稳时间序列的预报	345
12.6	非平稳序列的差分模型	347
12.7	门限自回归模型	355
12.8	应用软件算例	364
	习题 12	371
参考文献		373

第1章

数学模型概论

现代科学技术的飞速发展使得数学科学的地位发生了巨大变化,数学应用范围的迅速扩展已经不再局限于物理领域,而是向经济、生态、人口、环境、医学、社会等各个非物理领域及各工程技术领域深入渗透,各学科对各自领域中的实际问题的研究日益精确化、定量化和数字化使得数学模型已经成为各学科解决实际问题的工具.因此建立一个好的数学模型对解决实际问题至关重要,越来越受到人们的重视.面对复杂的实际问题进行条理性分析,应用某些数学方法描述问题的实质,给出数学结构,进而采用现代化的数学软件进行计算并对结果进行分析、研究,使之能合理的解释实际问题,并且得到更广泛的应用.本章在给出数学模型的基本概念与特点之后,通过两个典型的建模实例说明建立数学模型的一般过程,建模的方法与建模能力的培养,并对常用的数学软件的特点作了简单介绍,使读者对数学模型的方法与算法有初步的了解.

1.1 数学模型的基本概念

模型是实物、过程的表示,是人们认识事物的框架.它可能是对实体的仿造、模拟,也可能是某些基本属性的抽象.数学模型是对所研究的对象进行模拟,是用数学思维方法将要解决的问题进行简化、抽象处理,用数学符号、公式、图表等刻画事物本质属性及内在规律.那么如何给出数学模型的具体定义呢?各教材的提法不尽相同,本书按照 E. A. Bender 的提法,给出数学模型的基本定义:“数学模型是关于部分现实世界和为一种特殊目的而作的抽象、简化的数学结构.”

由数学模型的基本定义,我们可以想像到数学模型是联系实际问题与数学的桥梁.建立一个模型,相当于建立一座桥梁,从现实问题出发,途经这座桥梁,可以使问题得到科学化、严密化及精确化的结果.因此,数学建模是科学研究的重要方法.

由数学模型的基本定义,我们可以认识到数学模型是对部分现实世界的抽象结果.那么不同领域,如社会、经济、环境、生态、医学等领域内绝然不同的问题经过数学抽象,可能会得到类似的数学结构.从这一点看来,数学模型不受其研究对象所在领域的限制,或者说,同一模型可以应用于多个领域,解释不同问题.因此从某种意义上讲,科学技术的本质是数学.

由数学模型的基本定义,我们还可以猜测到如果我们对现实问题所包含的主、次因素有着不同的简化或舍取,那么由问题所抽象出的数学结构也必然不同,因对同一问题的解释、预测也就很可能不同.这就是说,同一问题用不同的数学方法可以构造多种类型的数学模型,人口模型就是模型多样化的典型例子.迄今为止,人们已构造出几百个不同的人口模型并且还在不断修改已有的模型,使之更能合理的解释现实问题.一个较理想的模型,往往要经历反复的修改,不断完善,才能经得起时间与实践的考验.

建立一个理想的数学模型,不仅需要必要的数学知识,还必须了解其他领域内与之相关的内容.很多伟大的科学家都是建立和应用数学模型的大师.他们将各个不同科学领域的知识与数学有机地结合起来,在不同学科取得了辉煌成就.万有引力定律就是典型的例子,牛顿将力学中的第二运动定律与天文学中的开普勒三定律有机结合,成功的建立了行星运动的数学模型.

那么如何建立数学模型呢?我们将以行星运动模型和人口模型的建模过程为例,说明建模的基本步骤.

1.2 两个典型的数学模型

例1 行星运动规律的研究

众所周知,万有引力定律的发现是牛顿在力学上的重要贡献之一,正是为了建立这一定律,他发明了微积分方法.为了了解建模的一般步骤,让我们来观察一下牛顿是怎样得出万有引力定律的.

15世纪中叶,哥白尼提出了震惊世界的日心学说.当然,由于历史和科学水平的限制,他的学说免不了包含一些缺陷.此后,丹麦天文学家第谷花了20年,观察当时已发现的五大行星的运动,记录下了十分丰富而又精确的资料.第谷的学生开普勒在对这些资料进行了9年的分析计算后发现,老师的观察结果与哥白尼学说在运行周期上有 $\left(\frac{1}{8}\right)^\circ$ 的误差,这使他对哥白尼的圆形轨道假设产生了怀疑,他以观察结果为依据,提出了天文学至今仍然十分著名的三条假设(开普勒三定律),这就是:

- (1) 行星轨道是一个椭圆,太阳位于此椭圆的一个焦点上;
- (2) 行星在单位时间内扫过的面积不变;
- (3) 行星运行周期的平方正比于椭圆长轴的三次方,比例系数不随行星而改变.

牛顿认为,行星运动之所以具有上述特征,必定是某条力学规律的反映,他决心找出这条规律来.此外,依据假设(1)、(2)可以看出,行星速度是变化的,这

在当时是无法计算的. 为了表示这变化的速度, 牛顿研究了微积分. 下面我们来看看, 根据开普勒三定律和牛顿第二定律, 怎样用微积分方法推导出万有引力定律.

取坐标系及变动的直角坐标系如图 1.1 所示.

由假设(2), 行星在单位时间内扫过的面积为

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta.$$

进而引入单位向量

$$\begin{cases} \mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \\ \mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \end{cases}$$

则 $\mathbf{r}$ 又可表示为

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r = r\cos \theta \mathbf{i} + r\sin \theta \mathbf{j}. \quad (1.2.1)$$

利用

$$\begin{cases} \mathbf{u}_r = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta, \\ \mathbf{u}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{u}_r, \end{cases}$$

可得出

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

(1.2.2) 式中 $\mathbf{u}_\theta$ 方向的分量为零, 这说明 $\ddot{\mathbf{r}} \parallel \dot{\mathbf{r}}$.

现将椭圆方程改写为

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e\cos \theta}, \\ p = a(1 - e^2), b^2 = a^2(1 - e^2), \end{cases} \quad (1.2.3)$$

其中 a, b 为椭圆的两个半轴, e 为离心率.

对(1.2.3)式中的 r 关于 t 求导两次,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{pe\sin \theta}{(1 + e\cos \theta)^2} \dot{\theta} = \left(\frac{p}{1 + e\cos \theta} \right)^2 \dot{\theta} \frac{e}{p} \sin \theta = \frac{2Ae}{p} \sin \theta, \\ \ddot{r} &= \frac{2Ae}{p} \ddot{\theta} \cos \theta = \frac{2A\ddot{\theta}}{pr} (p - r). \end{aligned}$$

注意到 $\dot{\theta} = \frac{2A}{r^2}$, 故

$$\ddot{r} = \frac{(2A)^2 (p - r)}{pr^3}. \quad (1.2.4)$$

根据(1.2.4)式可计算得

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{(2A)^2 (p - r)}{pr^3} - r \frac{(2A)^2}{r^4} = -\frac{(2A)^2}{pr^2}. \quad (1.2.5)$$

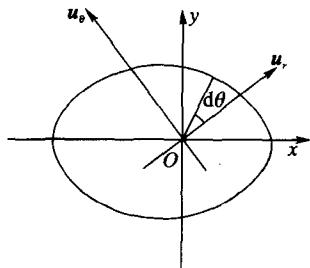


图 1.1

将(1.2.5)式代入(1.2.2)式,并根据牛顿第二定律立即可知,作用力与 r^2 成反比.下面只需证明,比例系数 $(2A)^2/p$ 是一个绝对常数,即与哪一颗行星都无关.事实上,记行星运行周期为 T ,则 $TA = ab\pi$.由假设(3), $T^2 = Ka^3$, K 为绝对常数,故

$$\frac{A^2}{p} = \frac{(ab\pi)^2}{T^2 p} = \frac{(ab\pi)^2}{Ka^3 p} = \frac{\pi^2}{K}.$$

根据以上分析可知,作用于任一行星上的力,方向在太阳与行星的连线上,指向太阳,其大小与两者之间距离的平方成反比,比例系数 $(2A)^2/p$ 是一个绝对常数,这就是万有引力定律.

例2 人口模型

人口模型的研究始于1798年,是由英国神父 Malthus 提出了世界上第一人口模型,称之为 Malthus 模型.而后1838年 P. F. Verhulst 在修正 Malthus 模型基础上,给出了 Logistic 模型.在20世纪初,由于概率论的发展, G. V. Yule 在1924年引入概率论的观点,建立了 Yule 模型,以生灭过程的理论研究人口问题,在1945年 P. H. Leslie 给出按年龄离散化的人口模型, Leslie 矩阵成为研究种群发展的重要工具.在20世纪中期,由于控制论的迅速发展, Van. H. Fpoerster 在1959年提出连续人口发展模型.此后,国内外学者对人口问题的研究一直在不断深入进行,人口模型的构造也越来越精细,迄今为止,已有几百个人口模型问世.

人口模型的构造及发展过程给我们展示了非物理领域数学模型的特点,使我们从中体会到如何不断完善模型构造,使之更有实用价值.下面仅给出几个典型的人口模型.

1. Malthus 模型

英国神父 Malthus 在分析了一百多年人口统计资料的基础上,于1798年提出人口按几何级数增长,并最终会导致瘟疫、灾祸和饥荒的悲观学说. Malthus 模型的基本假设是:人口净出生率 b 和净死亡率 d 均为常数,从而净相对增长率 $r = b - d$ 是一个常数.

记 t 时刻的人口数为 $N(t)$, 初始时刻($t=0$)人口数为 N_0 , 并设 $N(t)$ 是连续可微的,于是由基本假设可导出微分方程

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN, \\ N(0) = N_0. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

此方程的解为

$$N(t) = N_0 e^{rt}. \quad (1.2.7)$$

(1.2.7)式说明人口以 e^r 为公比按几何级数增长.对比已有的人口统计资

料,人们发现 19 世纪以前欧洲某些地区人口情况与 Malthus 模型比较相符,而此后发展情况则相差很大.此外,加拿大法国移民后代的增长与此模型比较相符,而法国本土的情况则相差甚大.对这些现象可作如下解释:随着人口不断增长,环境、自然资源对人口增长的限制越来越明显,Malthus 模型对于人口的短期发展的差异将会越来越明显.可惜的是,在大多数情况下,我们更需要的还是长期预测.因此,我们必须修改 Malthus 所作的基本假设,重新建立模型.

2. Logistic 模型

Verhulst 修改了 Malthus 模型,他认为 r 应为 N 的函数,并且能对人口的净相对增长率起调节作用.令 $r(N) = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$,其中 K 为当地自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量.(1.2.6)式改写为如下形式

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N, \\ N(0) = N_0. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

(1.2.8)式也可以从统计学中找到解释,有人做过实验,发现在鼠数较少时,其增长基本符合 Malthus 曲线,但随着鼠数 N 的增大,争食、咬死小鼠等现象逐渐增多,而根据统计规律,单位时间内两鼠相遇竞争的机会正比于 N^2 . (1.2.8) 的解为

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0 (e^{rt} - 1)} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rt}}. \quad (1.2.9)$$

显然,当 $r < 0$ 时,随着 $t \rightarrow +\infty$,必有 $N(t) \rightarrow 0$; 当 $r = 0$ 时, $N(t) = N_0$; 而当 $r > 0$ 时,由(1.2.9)式可以看出不论 N_0 取何值,均有 $N(t) \rightarrow K$,此曲线如图 1.2 所示(称为 Logistic 曲线).

为了考察何时人口增长速度最快,对 $\frac{dN}{dt}$ 求导,得到

$$\frac{d^2 N}{dt^2} = r\left(1 - \frac{2N}{K}\right) \frac{dN}{dt}.$$

由于在 $N = 0$ 及 $N = K$ 时均有 $\frac{dN}{dt} = 0$,不难看出,当 $N = \frac{K}{2}$ 时, $\frac{dN}{dt}$ 取最大值,此时人口增长率最大.

Logistic 模型指出,人口增长有一个稳定的平衡值 K ,这一点要比 Malthus 模型更符合实

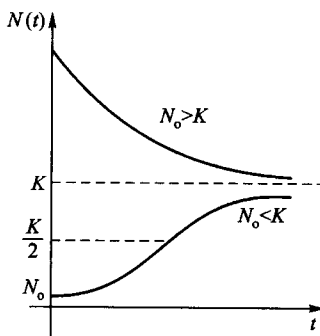


图 1.2

际.事实上 Logistic 模型给出的人口增长曲线也和实际统计资料更加相符.正因为这样,这一模型在生物数量预测中有着十分广泛的应用.

下面的表 1.1 给出本世纪初用 Malthus 模型和 Logistic 模型计算所得的美国人口预测数.初始时刻取为 1790 年,每十年统计一次, $K = 197\,273\,000$, $r = 0.031\,34$,以百万为单位,保留到小数第三位.

表 1.1

年	实际统计人口数 (百万)	Malthus 模型		Logistic 模型	
		人口预测数(百万)	误差(%)	人口预测数(百万)	误差(%)
1790	3.929	3.929	0	3.929	0
1800	5.308	5.308	0	5.336	0.5
1810	7.240	7.171	-0.9	7.228	-0.2
1820	9.638	9.638	0.5	9.757	1.2
1830	12.866	13.088	1.7	13.109	1.9
1840	17.069	17.682	3.6	17.506	2.6
1850	23.192	23.888	3.0	23.192	0
1860	31.443	32.272	2.6	30.412	-3.3
1870	38.558	43.599	13.1	39.372	2.1
1880	50.156	58.901	17.4	50.177	0.4
1890	62.948	79.574	26.4	62.769	-0.3
1900	75.995	107.503	41.5	76.870	1.2
1910	91.972	145.234	57.9	91.972	0
1920	105.711	196.208	85.6	107.559	1.7
1930	122.775	265.074	115.9	123.124	0.3
1940	131.669	358.109	172.0	136.653	3.8
1950	150.697	483.798	221.0	149.053	-1.1

表中第二列给出了实际统计人口数,以便于和预测结果进行比较.

3. Yule 模型

由于人口的增长受许多随机因素的影响,时刻 t 时的人口数 $N(t)$ 应为随机变量,Yule 假设 t 时刻人数为 N 的概率为 $P_N(t)$,建立了 Yule 模型,首先考虑

(1) 纯生过程的概率模型

设人口只生不死,在 Δt 时间间隔内有一人出生的概率为 $\lambda N \Delta t + o(\Delta t)$,有多于一人出生的概率为 $o(\Delta t)$.

根据假设,事件 $\{t + \Delta t \text{ 时刻有 } N \text{ 人}\} \approx \{t \text{ 时刻有 } N - 1 \text{ 人}, \Delta t \text{ 间隔内出生一人} \cup \{t \text{ 时刻有 } N \text{ 人}, \Delta t \text{ 间隔内无人出生}\}$,即

$$P_N(t + \Delta t) = \lambda(N - 1)P_{N-1}(t)\Delta t + (1 - \lambda N\Delta t)P_N(t) + o(\Delta t).$$

故 $P_N(t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{dP_N(t)}{dt} + \lambda NP_N(t) = \lambda(N - 1)P_{N-1}(t), \\ P_{N_0}(0) = 1, P_i(0) = 0 \quad (i \neq N_0). \end{cases} \quad (1.2.10)$$

这是一个微分差分方程.

(2) 纯死过程的概率模型

设人口只死不生,在 Δt 时间间隔内有一人死亡的概率为 $\mu N\Delta t + o(\Delta t)$,并设在这段时间内有多于一人死亡的概率为 $o(\Delta t)$. 类似可得出微分差分方程:

$$\begin{cases} \frac{dP_N(t)}{dt} + \mu NP_N(t) = \mu(N + 1)P_{N+1}(t), \\ P_{N_0}(0) = 1, P_i(0) = 0 \quad (i \neq N_0). \end{cases} \quad (1.2.11)$$

(3) 一般生死过程的概率模型

在同时考虑既有生又有死的情况时,可得出 $P_N(t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{dP_N(t)}{dt} + (\lambda + \mu)P_N(t) = \lambda(N - 1)P_{N-1}(t) \\ \quad + \mu(N + 1)P_{N+1}(t), \\ P_{N_0}(0) = 1, P_i(0) = 0 \quad (i \neq N_0). \end{cases} \quad (1.2.12)$$

(1.2.10)和(1.2.11)可以用递推方法或母函数法求解,读者可以参阅一般的概率书籍.(1.2.12)的求解比较麻烦,解法从略.

4. Leslie 模型

Logistic 模型较好地反映了人口的增长情况,但由于种种原因,对它也存在一些批评意见,其中之一就是人口的增长应当和人口的年龄结构有关. Leslie 在 20 世纪 40 年代建立的一个考虑年龄结构的人口离散模型.

由于男、女性人口通常有一定的比例,为了简单起见只考虑女性人口数.将女性按年龄划分为 $m + 1$ 个组,即 $0, 1, \dots, m$ 组.记 $N(i, j)$ 为 j 时段年龄在 i 组中的女性人口数, b_i 为 i 组每一妇女在一时段中平均生女孩数, P_i 为 i 组女性存活到 $j + 1$ 时段而升入 $i + 1$ 组的人数所占的比例,同时设没有人能活到超过 m 组的年龄.根据以上假设可以得出 $j + 1$ 时段各组人数与 j 时段各组人数之间的关系为

$$\begin{cases} N(0, j+1) = b_0 N(0, j) + b_1 N(1, j) + \cdots + b_m N(m, j), \\ N(1, j+1) = P_0 N(0, j), \\ \cdots \cdots \cdots \\ N(m, j+1) = P_{m-1} N(m-1, j), \end{cases} \quad (1.2.13)$$

其中 $b_i \geq 0, P_i \geq 0$.

$$N_j = \begin{bmatrix} N(0, j) \\ \vdots \\ N(m, j) \end{bmatrix}, \quad N_{j+1} = \begin{bmatrix} N(0, j+1) \\ \vdots \\ N(m, j+1) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m \\ P_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{m-1} & 0 \end{bmatrix},$$

则(1.2.13)可写成矩阵形式

$$N_{j+1} = AN_j, \quad (1.2.14)$$

矩阵 A 称为 Leslie 矩阵(或射影矩阵).

设 $t=0$ 时按年龄分组的种群结构为 N_0 , 则 $N_1 = AN_0, N_2 = AN_1 = A^2 N_0, \cdots, A_j = A^j N_0$.

女性有一定的生育期, 例如 k 组以后的女性不再生育, 则 $b_{k+1}, \cdots, b_m$ 均为零, 此时 A 可简记为 $\begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}$, 其中 A_1 和 A_3 分别为 $k+1$ 阶和 $m-k$ 阶方阵, 于是

$$A' = \begin{bmatrix} A_1' & O \\ f(A_1, A_2, A_3) & A_3' \end{bmatrix}.$$

因为 A_3 是下三角阵, 且对角元素全为零, 由哈密顿-凯莱定理, 当 $j \geq m-k$ 时必有 $A_3^j = O$, 此时 A' 的最后 $m-k$ 列全为零. 其实际意义为 $t=0$ 时已超过生育年龄的女性, 其存在对若干年后的人口分布毫无影响, 这当然是十分显然的.

$f(A_1, A_2, A_3)$ 为某一用 A_1, A_2, A_3 表示的表达式, A' 的这一子块较为复杂, 对它的讨论可以导出避免社会老龄化的条件.

容易看出 A_1 是非奇异的, 因为

$$|A_1| = (-1)^{k-2} P_0 P_1 \cdots P_{k-1} b_k \neq 0.$$

事实上, 不难直接验证

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & P_0^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -b_0 & -b_1 & \cdots & -b_{k-1} \\ \hline b_k & \frac{-b_0}{P_0 b_k} & \frac{-b_1}{P_1 b_k} & \cdots & \frac{-b_{k-1}}{P_{k-1} b_k} \end{bmatrix}.$$

由 $\mathbf{A}'$ 的分块结构可知, 对 $\mathbf{A}_1$ 及 $\mathbf{N}_j$ 的前 $k+1$ 个分量 $\mathbf{N}_j^{(k+1)}$, $\mathbf{N}_{j+1}^{(k+1)} = \mathbf{A}_1 \mathbf{N}_j^{(k+1)}$ 也成立. 为了叙述方便, 不妨仍记 $\mathbf{N}_j^{(k+1)}$ 为 $\mathbf{N}_j$, 并以 $\mathbf{A}$ 记 $\mathbf{A}_1$, 简略说明一下前 $k+1$ 组人数的变化情况.

由于人口生育率和死亡率之间存在着固定的关系, 可以预料, 经过足够多年后, 人口年龄分布应当趋于稳定的比率, 即下时段初与本时段同年龄人数对应成比率. 若人口总数趋于稳定, 即存在 $\bar{\mathbf{N}}$, 使 $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{N}_j = \bar{\mathbf{N}}$, 则存在一个数 λ_1 , 使 $\mathbf{A}\bar{\mathbf{N}} = \lambda_1 \bar{\mathbf{N}}$, 即 λ_1 应为 $\mathbf{A}$ 的特征值, 而 $\bar{\mathbf{N}}$ 则是 $\mathbf{A}$ 的属于 λ_1 的特征向量. 直接计算可得 $\mathbf{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1} - b_0 \lambda^k - P_0 b_1 \lambda^{k-1} - \cdots - (P_0 P_1 \cdots P_{k-1}) b_k.$$

$f(\lambda) = 0$ 等价于

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= b_0 \frac{1}{\lambda} + P_0 b_1 \frac{1}{\lambda^2} + P_0 P_1 b_2 \frac{1}{\lambda^3} + \cdots \\ &\quad + (P_0 P_1 \cdots P_{k-1}) b_k \frac{1}{\lambda^{k+1}} = 1. \end{aligned}$$

当 λ 由 $0^+ \rightarrow +\infty$ 时, $f_1(\lambda)$ 由 $+\infty$ 单调下降地趋于零, 据此可以立即看出 $\mathbf{A}$ 具有惟一的正特征值 λ_1 .

现求 λ_1 对应的特征向量, 记 $\bar{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \bar{n}_0 \\ \vdots \\ \bar{n}_k \end{bmatrix}$, 将 $\mathbf{A}\bar{\mathbf{N}} = \lambda_1 \bar{\mathbf{N}}$ 具体写出:

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{k-1} & b_k \\ P_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{k-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{n}_0 \\ \vdots \\ \bar{n}_k \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \bar{n}_0 \\ \vdots \\ \bar{n}_k \end{bmatrix}. \quad (1.2.15)$$

(1.2.15) 中只有 k 个方程, 但有 $k+1$ 个未知量, 取 $\bar{n}_k = 1$, 可求得

$$\bar{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k / (P_0 P_1 \cdots P_{k-1}) \\ \lambda_1^{k-1} / (P_1 \cdots P_{k-1}) \\ \vdots \\ \lambda_1 / P_{k-1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.2.16)$$