国家工科数学课程教学基地建设系列教材

高等数学立体化系列教材

高等数学学习指导

上册

华南理工大学数学科学学院

张 杰　王全迪　主编

洪潮兴　主审

上

华南理工大学出版社

国家工科数学课程教学基地建设系列教材

高等数学立体化系列教材

高等数学学习指导

上册

华南理工大学数学科学学院

张 杰 王全迪 主编

洪潮兴 主审

华南理工大学出版社

·广州·

内容简介

本书是华南理工大学数学科学学院编写的《高等数学》(华南理工大学出版社,2004)的同步辅导教材,也是“国家工科数学课程教学基地建设系列教材”之一。

本书紧密配合高等数学教材,适应教学改革的需要。每章内容结构是:一、“教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会”颁布的教学基本要求;二、重点、难点内容诠释;三、典型例题解析;四、习题及参考答案。本书精选了大量的典型例题,其中有很多为近几年研究生入学考试试题,本书对这些典型例题进行了系统的归纳和分类,阐述了高等数学的解题方法、解题规律和技巧。

本书分上、下两册。上册包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学与微分方程。下册包括向量代数、空间解析几何,多元函数微分学、多元函数积分学与无穷级数。每章配有习题,书末附有近五年(1999~2003)华南理工大学《高等数学》(上册)统考试题及解答。

本书可作为高等院校理工科学生学习高等数学课程的辅导书,也可作为参加硕士研究生入学考试、自学考试的读者的复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导(上册)/张杰,王全迪主编.—广州:华南理工大学出版社,2004.10
(国家工科数学课程教学基地建设系列教材.高等数学立体化系列教材)
ISBN 7-5623-2142-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①张…②王… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 099837 号

总 发 行:华南理工大学出版社(广州五山华南理工大学 17 号楼,邮编 510640)
发行部电话:020-87113487 87111048(传真)
E-mail:scut202@scut.edu.cn http://www.scutpress.com
责任编辑:詹志青 张 颖
印 刷 者:广东省农垦总局印刷厂
开 本:787×960 1/16 **印张**:16.5 **字数**:370 千
版 次:2004 年 10 月第 1 版第 1 次印刷
印 数:1~6000 册
定 价:23.50 元

总　　序

自1995年以来,华南理工大学应用数学系(现数学科学学院)的老师们为建设国家工科数学课程教学基地不懈努力,在教育改革中做出了显著的成绩。"国家工科数学课程教学基地建设系列教材"的出版,就是这些成果的重要部分。

21世纪是经济全球化、信息化的时代,数学科学在科学技术中占有核心地位,成为直接的生产力。大学数学课程在高等教育中起着关键的作用,对学生素质的提高和创新能力的培养起着越来越重要的作用。提高大学数学的教学质量,是一项艰巨而重要的任务。

大学数学的教学,应该使学生在理解数学思想、数学建模和运算能力等方面,得到最基本的训练。为使学生理解数学思想,必须讲清基本概念,并通过必要的逻辑推理训练使学生理解基本概念和基本定理。通过数学建模的学习,学生可以了解数学的来源,并且学会动用数学。运算能力的培养是以上两种能力的基础。当然,这三种能力的培养是一个有机的整体,根据不同专业的要求和学生的实际情况可以有所侧重。

为了适应新形势,本系列教材力求反映数学与其他学科的最新发展,删减过时的内容,介绍各种数学软件的应用,充分使用多媒体等技术。

本系列教材的出版,反映了我院教师多年来教学改革的成果,也吸取了不少兄弟院校同行的宝贵经验。限于我们的水平,其中疏漏在所难免,恳请国内外专家、同行指正。本系列教材的出版得到华南理工大学校领导与华南理工大学出版社的大力支持,特此表示感谢。

华南理工大学数学科学学院

2004年8月

前　言

高等数学课程是理工科高等学校最重要的基础理论课之一，是学习后继课程的重要基础。

本书参照了原国家教委审定的高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》，章节编排主要参照华南理工大学数学科学学院编写的《高等数学》（华南理工大学出版社，2004），在内容深度、广度上与国内大部分教材（如同济大学《高等数学》（五版））都是适应的。本书既可作为学生课后学习辅导书，也可作为与教学同步的习题课教材，也适合于准备考研的学生系统复习高等数学，备战考试。书中收录了近五年华南理工大学高等数学（上册）期末统考试题，因此，本书也可作为期末考试的复习资料。

本书每章均由以下四个部分构成：

1．教学基本要求——编写该部分的主要目的是让学生了解教学基本要求；以此作为学习的导引，使学生的学习有目标和方向。

2．重点、难点内容诠释——对学生在学习中普遍感到比较困惑的重点、难点问题进行解答。

3．典型例题解析——对每章的常见题型进行归纳分类，总结各种题型的解题方法。

4．习题及参考答案——精选适量的习题，并附有参考答案与提示。

本书具有以下突出特点：

一、注重基本概念、基本方法、基本运算的训练

本书是与“高等数学”课程教学同步的辅导书，需要顾及不同水平的大多数学生，注重体现“高等数学”课程的基本要求，因此，起点并不太高，注重基本概念、基本方法、基本运算的训练，把重点放在讲解基本概念、基本思想和方法上；力图通过比较简单生动的典型题帮助学生消化理解基本概念、掌握基本运算，在此基础上，加深难度，提高要求。

二、精选题目，以题型说明基本概念、方法与原理，点评题目要领

我们在题目的选材取舍上，并不一味追求题目的新颖，同时，也特别避免盲目地罗列和堆积题目。每个题目都是经过反复精心筛选，真正达到“以题型说明概念、方法与原理”的目的。尽可能做到所选题目类型齐全、比较全面地覆盖

所学知识点与方法，使每个典型题都具有一定的针对性与说服性，或是针对一个基本概念，或是针对一个方法，或是针对学生容易混淆与忽视及易犯的概念性错误与解题错误，针对以上问题，在大多数题目的解答之后，都附加了点评。本书题目的深度以中等难度为主，由浅入深，循序渐进，也有少量的难题。另外，还注意选编了适量的应用问题及简单的数学建模问题，旨在培养学生运用数学的能力。总之，我们试图通过对典型题目的剖析和挖掘来启迪学生对数学的悟性和思维，激发学生的学习兴趣，培养学生良好的数学素质。

三、以“高等数学”课程学习辅导为主，考研复习为辅

本书适合不同层次学生的学习需求，学生在课堂上弄不清楚的问题，可以从本书中找到很好的解答。对于学有余力的学生可以在本书中寻找到发展空间，通过对书中较难问题的探讨，开阔视野，拓宽知识面，提高应用数学的能力。本书还兼顾考研辅导，为学生考研搭建平台，将近几年全国硕士研究生入学统一考试的部分微积分试题有机地穿插在例题、习题之中。所以，对在读本科生及跃跃欲试的考研学子，本书都是一本实用的学习参考书。

本书分上、下两册。上册包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学与微分方程。第一章、第二章由张杰编写，第三章、第四章由王全迪编写，参加编写的教师还有蔡健、韩乐、高文华、高丽。我们诚挚地感谢主审人洪潮兴教授，他牺牲了很多的休息时间，对书稿反复认真地审查，并提出了许多宝贵的意见和建议。

本书是“国家工科数学课程教学基地建设系列教材”之一，得到华南理工大学教务处、数学科学学院等领导的关心和支持，在此一并表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，书中的不妥之处在所难免，敬请广大读者和同行批评指正。

编　者

2004 年 8 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

一、教学基本要求

(1)在中学已有函数知识的基础上,加深对函数概念的理解和函数性质(均匀性、奇偶性、单调性、周期性和有界性)的了解.

(2)理解复合函数的概念,了解反函数的概念.

(3)会建立简单实际问题中的函数关系式.

(4)理解极限的概念,了解极限 ε-N,ε-δ 定义(不过分要求学生做给出 ε 求 N 或 δ 的习题,希望在不断的学习过程中加深对极限概念的理解).

(5)掌握极限的有理运算法则,会用变量代换求某些简单复合函数的极限.

(6)了解极限的性质(惟一性、有界性、保号性)和两个存在准则(夹逼准则与数列的单调有界准则),会用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 求极限.

(7)了解无穷小、无穷大、高阶无穷小和等价无穷小的概念,会用等价无穷小求极限.

(8)理解函数在一点连续和在一区间上连续的概念.

(9)了解函数间断点的概念,会判别间断点的类型.

(10)了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的介值定理与最大值、最小值定理.

二、重点、难点内容诠释

问题 1　关于函数的有界性与无界性

若存在正数 M,使得 $\forall x\in X$,都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称 $f(x)$在 X 上有界.

所谓 $f(x)$有界,一定与 x 的范围有关.例如,$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间$[1,+\infty)$上有界,但在区间$(0,1)$上就无界.

$f(x)$在 X 上有界$\Leftrightarrow f(x)$在 X 上既有上界又有下界,即存在实数 m 及 M,使 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

所谓 $f(x)$在 X 上无界,是指对于任何正数 M,总存在 $x_0\in X$,使 $|f(x_0)|>M$.

例如,证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 在其定义域上无界.

证　对任一正数 M,取 $k=[M]+1$,则必有 $k>M$,取 $x_0=\dfrac{1}{k\pi}\neq 0$,有

$$|f(x_0)| = \left|\frac{1}{x_0}\cos\frac{1}{x_0}\right| = k\pi > M\pi > M.$$

所以,$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$在其定义域上无界.

问题 2 复合函数的几种复合情形

设函数 $y=f(u)$,定义域为 U,又有函数 $u=g(x)$在 X 上有定义,值域为 W,若 $W\cap U\neq\varnothing$,可以在 $D=\{x\,|\,g(x)\in U, x\in X\}\subseteq X$ 上确定一个函数$y=f(g(x))$,称为由 $y=f(u)$与 $u=g(x)$复合而成的复合函数.

复合函数主要有以下几种复合情形:

(1)若 $W\subset U$,则可构成复合函数 $y=f(g(x))$,且定义域为 X.

(2)若 $W\cap U\neq\varnothing$,$W\not\subset U$,则可构成复合函数 $y=f(g(x))$,定义域 D 包含在X 中,但 $D\neq X$.

(3)若 $W\cap U=\varnothing$,则不能构成复合函数 $y=f(g(x))$. 例如,$y=\sqrt{1-u}$,$u=2+x^2$,就不能复合成一个复合函数. 因为 $y=\sqrt{1-u}$的定义域为$U=(-\infty,1]$,而 $u=2+x^2$ 的值域 $W=[2,+\infty)$,$W\cap U=\varnothing$,即对任何的 $x\in(-\infty,+\infty)$,所对应的 u 值都使 $y=\sqrt{1-u}$没有意义.

从上面的讨论可以看出,在(1)、(2)两种情形下都可构成复合函数,所以复合函数定义中的条件可放宽为 $W\cap U\neq\varnothing$.

问题 3 如何理解数列极限的 ε-N 定义

极限(包括无穷级数)是一种用有限来表现无穷的形式,更是用以获得无穷结论的手段. 试看$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义:

如果对于任给的正数 ε,总存在正数 N,使得当 $n>N$ 时,都有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立,则称数列$\{x_n\}$以 a 为极限.

理解上述 ε-N 定义的关键是要抓住定义的三个要点:

(1)ε 的任意性. ε 必须是事先给定的任意小的正数,因为只有通过任取 ε,有限的不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 才能表达出x_n 与a 无限接近的过程.

(2)正数 N(可视为某个时刻). 它是在 ε 取定后确定的,所以它依赖于 ε. 一般来说,ε 变小,相应的 N 变大(即时刻变晚). 合乎定义的 N 不是惟一的,这里我们只关心 N 的存在性. 如数列 $x_n=\frac{n-1}{n}$,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

这里,若取 $\varepsilon=0.1$,要使$|x_n-1|=\left|1-\frac{1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<0.1=\frac{1}{10}$,只要 $n>10$;若改取 $N=11$ 或 $N=15$ 等,仍有$|x_n-1|<0.1$ 成立. 总之,取比 10 大的任何正数作为 N 都可以.

(3)不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 并不是对一切的x_n 都成立,而是对 $n>N$(即 N 时刻以后)的

x_n 才成立.如上例中,不等式 $|x_n-1|<0.1$ 是当 $n>10$,即从第 11 项起,对于以后各项不等式成立.

问题 4　数列 $\{x_n\}$ 与数列 $\{|x_n|\}$ 的敛散性的关系

(1)若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{|x_n|\}$ 也收敛,且当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对于任给 $\varepsilon>0$,存在正数 N,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$,所以

$$\big||x_n|-|a|\big|<|x_n-a|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|.$$

(2)若 $\{|x_n|\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 可能收敛,也可能发散.例如,$x_n=(-1)^n$,$\{|(-1)^n|\}$ 收敛,但 $\{(-1)^n\}$ 发散.

(3)如果存在 $N_0>0$,使当 $n>N_0$ 时,$\{x_n\}$ 恒正或恒负,那么,$\{x_n\}$ 与 $\{|x_n|\}$ 有相同的敛散性.

(4)特殊地,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$.

问题 5　无穷大与无界函数的区别与联系

无穷大与无界函数之间的区别是:无穷大是指在自变量的某种趋向下,对应的函数值的变化趋势(其绝对值无限增大),即无穷大量与自变量的"趋向"相联系.而无界函数是指自变量在某一范围内变化时,对应函数值的变化情况,即无界函数与自变量的变化"范围"相联系,所以无穷大定义中的不等式 $|f(x)|>M$,要求适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 或 $|x|>X$ 的"一切"x 都要满足;而无界函数定义中的不等式 $|f(x)|>M$ 只要求在相应的变化范围内"有"x 满足即可.

无穷大与无界函数之间的联系是:如果 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大,则 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内无界;但反过来,当 $f(x)$ 无界时,$f(x)$ 却不一定是无穷大.例如,$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上无界,但当 $x\to0^+$ 时,$f(x)$ 不是无穷大.

证　取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\in(0,1]$,则 $f(x_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$,故函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上无界.

但若取 $y_n=\dfrac{1}{n\pi}\in(0,1]$,则 $f(y_n)=n\pi\sin n\pi=0$,当 $n\to\infty$ 时,$y_n\to0^+$,而

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=0,$$

故当 $x\to0^+$ 时,$f(x)$ 不是无穷大.

问题 6　若在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$),而 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则一定有 $A>0$(或 $A<0$)吗?

答:不一定.例如,$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 的去心邻域内大于零,但 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$,故正确的

结论应是 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

三、典型例题解析

题型一　求反函数

例 1　求 $y=f(x)=\begin{cases}1-2x^2 & 当\ x<-1\\ x^3 & 当\ -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16 & 当\ x>2\end{cases}$ 的反函数.

解　当 $x<-1$ 时,$y=1-2x^2<-1$,则 $x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$ (另一根舍去);

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$y=x^3\in[-1,8]$,则 $x=\sqrt[3]{y}$;当 $x>2$ 时,$y=12x-16>8$,则 $x=\dfrac{y+16}{12}$.

故有

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}} & 当\ y<-1\\ \sqrt[3]{y} & 当\ -1\leqslant y\leqslant 8\\ \dfrac{y+16}{12} & 当\ y>8\end{cases}.$$

因此,所求的反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} & 当\ x<-1\\ \sqrt[3]{x} & 当\ -1\leqslant x\leqslant 8\\ \dfrac{x+16}{12} & 当\ x>8\end{cases}.$$

点评　求反函数的一般方法是,从直接函数 $y=f(x)$ 的表达式中解出 $x=f^{-1}(y)$,然后交换 x 与 y 的位置得到反函数 $y=f^{-1}(x)$. 反函数的定义域为直接函数的值域.

例 2　求函数 $f(x)=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$ 的反函数.

解　$y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1+x^2 & 当\ x>0\\ 0 & 当\ x=0\\ -(1+x^2) & 当\ x<0\end{cases}.$

当 $x>0$ 时,$y=1+x^2>1$,则 $x=\sqrt{y-1}$;

当 $x<0$ 时,$y=-(1+x^2)<-1$,则 $x=-\sqrt{-(y+1)}$.

故

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt{y-1} & 当\ y>1\\ 0 & 当\ y=0\\ -\sqrt{-(y+1)} & 当\ y<-1\end{cases}.$$

因此,所求的反函数为

$$y=\begin{cases}\sqrt{x-1} & 当\ x>1\\ 0 & 当\ x=0\\ -\sqrt{-(x+1)} & 当\ x<-1\end{cases}.$$

题型二 求复合函数

将两个或两个以上函数进行复合,通常采用两种方法,即代入法和分析法.

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}x-1 & 当\ x\leqslant 0\\ 2^x & 当\ x>0\end{cases}$,则 $f(x^2)=($ $)$.

A. x^2-1 B. 2^{x^2} C. $\begin{cases}x^2-1 & 当\ x\leqslant 0\\ 2^{x^2} & 当\ x>0\end{cases}$ D. $\begin{cases}-1 & 当\ x=0\\ 2^{x^2} & 当\ x\neq 0\end{cases}$

解 $f(x^2)=\begin{cases}x^2-1 & 当\ x^2\leqslant 0\\ 2^{x^2} & 当\ x^2>0\end{cases}=\begin{cases}-1 & 当\ x=0\\ 2^{x^2} & 当\ x\neq 0\end{cases}$. 故选 D.

点评 此题的复合方法为代入法.

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}0 & 当\ x\leqslant 0\\ x & 当\ x>0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}0 & 当\ x\leqslant 0\\ -x^2 & 当\ x>0\end{cases}$.

求 $f(f(x)), f(g(x)), g(f(x)), g(g(x))$.

解 $f(f(x))=\begin{cases}0 & 当\ f(x)\leqslant 0\\ f(x) & 当\ f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0 & 当\ x\leqslant 0\\ x & 当\ x>0\end{cases}=f(x)$.

因为 $\forall x\in(-\infty,+\infty), g(x)\leqslant 0$,所以,$f(g(x))=0, x\in(-\infty,+\infty)$.

$$g(f(x))=\begin{cases}0 & 当\ f(x)\leqslant 0\\ -f^2(x) & 当\ f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0 & 当\ x\leqslant 0\\ -x^2 & 当\ x>0\end{cases}=g(x).$$

$$g(g(x))=0,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

点评 此题采用分析法,抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,从而得出复合函数. 该方法适用于普通函数与分段函数,或分段函数之间的复合.

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}e^x & 当\ x<1\\ x & 当\ x\geqslant 1\end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases}x+2 & 当\ x<0\\ x^2-1 & 当\ x\geqslant 0\end{cases}$,求 $f(\varphi(x))$.

解 $f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{\varphi(x)} & 当\ \varphi(x)<1\\ \varphi(x) & 当\ \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$.

(1)当 $\varphi(x)<1$ 时

若 $x<0, \varphi(x)=x+2<1$,即 $\begin{cases}x<0\\ x<-1\end{cases}$,故 $x<-1$;

若 $x\geqslant 0, \varphi(x)=x^2-1<1$,即 $\begin{cases}x^2\geqslant 0\\ x^2<2\end{cases}$,故 $0\leqslant x<\sqrt{2}$.

(2)当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时

若 $x<0,\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即$\begin{cases}x<0\\x\geqslant -1\end{cases}$，故 $-1\leqslant x<0$；

若 $x\geqslant 0,\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，即$\begin{cases}x\geqslant 0\\x^2\geqslant 2\end{cases}$，故 $x\geqslant\sqrt{2}$.

综上所述，有
$$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{x+2} & 当\ x<-1\\ x+2 & 当\ -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1} & 当\ 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1 & 当\ x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}.$$

题型三　求函数表达式(即函数记号所表达的对应法则)

例 6　设 $f(e^{x-1})=3x-2$，求 $f(x)$.

解　**方法一**　令 $u=e^{x-1}$，则 $x=1+\ln u$，于是
$$f(u)=3(1+\ln u)-2=3\ln u+1.$$
因此，
$$f(x)=3\ln x+1\quad(x>0).$$

方法二　由 $f(e^{x-1})=3x-2$ 可得
$$f(e^{x-1})=3(x-1)+1=3\ln e^{x-1}+1,$$
令 $e^{x-1}=u$，则 $f(u)=3\ln u+1$. 因此，
$$f(x)=3\ln x+1\quad(x>0).$$

点评　两种方法的实质都是采用数学上常用的一种方法——变量替换法. 所不同的是方法一是直接作变量替换 $u=e^{x-1}$，方法二是将等式右边表示为 e^{x-1}的函数后再作变量替换.

例 7　已知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，求 $f(x)$的表达式.

解　令 $u=1-x$，得到 $x=1-u$，则
$$2f(1-u)+f(u)=(1-u)^2,$$
即
$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2,$$
与 $2f(x)+f(1-x)=x^2$ 联立，解得
$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}.$$

点评　题中所给条件是关于 $f(x)$和 $f(1-x)$的一个线性组合等式，作变量替换 $u=1-x$，就得到关于 $f(x)$和 $f(1-x)$的另一个线性组合等式，由两个等式就可以求出 $f(x)$的表达式.

题型四　求$\frac{0}{0}$型的极限

求$\frac{0}{0}$型极限的方法有：

(1)通过因式分解约去分子、分母中的零因子(即极限为零的因子)，然后用极限四则运

算法则求解.

(2)利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$及其他几个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\quad(a>0,a\neq 1);$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}\quad(a>0,a\neq 1);$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$$

(3)利用等价无穷小代换.

(4)洛必达法则(此方法将在第二章第二部分中详细讨论).

例 8　求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$.

思路　$x\to 1$时,分子、分母极限均为零,故不能直接用商的极限运算法则.应先将分子、分母分解因式,再约去零因子$(x-1)$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x+3}=-\dfrac{1}{4}$.

点评　(1)对于有理式的$\dfrac{0}{0}$型,通常采用约分、消去零因子$(x-x_0)$的方法.

(2)$x\to 1$的含义是:x无限接近1,可以不考虑$x=1$,故可约去因子$(x-1)$.

例 9　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}$.

思路　属$\dfrac{0}{0}$型.分母中含有趋于零的因式$(x-1)$,为了使因式$(x-1)$能被约去,可以将分子有理化.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)}{(x^2-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3x+1}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3}{(x+1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\dfrac{3}{8}$.

点评　含有根式的$\dfrac{0}{0}$型函数极限,不论根式出现在分子上还是分母上,都可考虑将趋于零的根式有理化,再求极限.

例 10　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin a}{x}$ (a为常数).

思路　属$\dfrac{0}{0}$型,且式中含有三角函数,故利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos\dfrac{2a+x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\cos\left(a+\dfrac{x}{2}\right)\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}=\cos a$.

例 11 求 $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1}(1-x)\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}x}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}(1-x)\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}x}{\sin\dfrac{\pi}{2}(1-x)}$

$$=\lim_{x\to1}\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\lim_{x\to1}\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

例 12 求 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\cdot x=x$.

点评 在计算该极限的过程中,x 是常量,n 是变量.

小结 对于一些含有三角函数或反三角函数的 $\dfrac{0}{0}$ 型(或 $0\cdot\infty$ 型),通常利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,在应用此公式时,一般要凑成下面的形式:

$$\lim_{(\ \ )\to0}\frac{\sin(\ \ )}{(\ \ )}$$

这里需注意:①( )内的变量相同;②( )$\to0$;③( )内的变量 $\neq0$.

例 13 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}$.

思路 属 $\dfrac{0}{0}$ 型,且含有指数函数 e^u,考虑利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ 求解.为凑出此形式的极限,先强行提取公因子 $e^{\sin x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

点评 将指数函数强行提取公因子,此方法具有普遍性.

例 14 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

思路 属 $\dfrac{0}{0}$ 型,且含有对数 $\ln\cos x$,设法利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-\sin^2x)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-\sin^2x)}{-\sin^2x}\cdot\dfrac{-\sin^2x}{2x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

例 15 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$（其中 m,n 为正整数）.

思路 这是含根式的$\dfrac{0}{0}$型，一种解法是先将其有理化，再约去分子、分母中的零因子；另一种解法可考虑利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$.

解 **方法一** 令 $t=x^{\frac{1}{mn}}$，则当 $x\to1$ 时，$t\to1$.

$$原式=\lim_{t\to1}\frac{t^n-1}{t^m-1}=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+t+1)}{(t-1)(t^{m-1}+t^{m-2}+\cdots+t+1)}=\frac{n}{m}.$$

方法二 $$原式=\lim_{x\to1}\frac{[1+(x-1)]^{1/m}-1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{[1+(x-1)]^{1/n}-1}=\frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{m}.$$

小结 某些含指数式、对数式、根式的$\dfrac{0}{0}$型，可利用重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\qquad \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.$$

例 16 求$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

思路 属$\dfrac{0}{0}$型，当 $x\to0^+$ 时，$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}x$，而表达式中 $1-\sqrt{\cos x}$不能用等价无穷小代换，故先将其有理化.

解 $$原式=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{2}.$$

注：当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

例 17(研) 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解 $$原式=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

点评 先将幂指函数$\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x$化为 $\mathrm{e}^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}$，然后利用 $x\to0$ 时，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，