南京大学

研究生毕业论文摘要汇编

理科版(一)

南京大学研究生处

一九八二年四月

目 录

左模张量积函子

代数专业78级研究生 胡述安

指导教师 周伯𡎴教授

K为有么元可换环，R、S均为有么元K·环，$A\in{}_R\mathfrak{M}$，$B\in{}_S m$。周伯𡎴教授1979年定义了左模张量积$A\otimes B$，它是一个左$R\otimes S$一模本文研究左模张量积函子$\sim\otimes B$的性质，主要结果如下。

在§2中，我们证明了定理2.1（伴随同构）。$\forall A\in{}_R\mathfrak{M}$，$\forall B\in{}_S\mathfrak{M}$，$\forall M\in{}_{R\otimes S}\mathfrak{M}$，有自然的同构$\tau$：$\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(A\otimes B, M)\xrightarrow{\cong}\mathrm{How}_K(A,\mathrm{Hom}_S(B,M))$。这个定理有一系列的推论：①，$\sim\otimes B$：${}_R\mathfrak{M}\to{}_{R\otimes S}\mathfrak{M}$与$\mathrm{Hom}_S(B,\sim)$：${}_{R\otimes S}\mathfrak{M}\to{}_R\mathfrak{M}$是一对伴随函子。②，$\sim\otimes B$是右正合函子。③，$\sim\otimes B$保持正向极限。④，$\sim\otimes B$保持直和，其中②、④是周伯壎教授已证得的结果，这儿的证法与其不同。

在§3与§4中，我们分别定义了Zh-平坦模，与Zh^R-平坦模，即是这样的$B\in{}_S\mathfrak{M}$，使$\sim\otimes B$：${}_R\mathfrak{M}\longrightarrow{}_{R\otimes S}\mathfrak{M}$为正合函子。前者对所有的$K$-环$R$，后者对给定的$K$-环$R$。容易看出，Zh-平坦模一定是$\mathrm{Zh}^R$-平坦模，反之不一定，我们证明了Zh-平坦模与古典的K-平坦模是一回事，但是必须指出，与古典的左S-平坦模的熟知性质不一样，S-投射模，甚至S本身都不一定是Zh^R-平坦模，下面我们还要看到：S是Zh^R-平坦模是一个重要的性质。

在§5中，我们定义了$\sim\otimes B$的左导出函子$\mathrm{Tor}_n(\sim,B)$：${}_R\mathfrak{M}\longrightarrow{}_{R\otimes S}\mathfrak{M}$。它具有与古典的Tor函子的类似性质，比如长正合列定理就是成立的。利用这个函子证明了定理5.1：取定K,R,S，其中R是左遗传环，P是${}_R\mathfrak{M}$中的一个投射复形，$C\in{}_S\mathfrak{M}$，则有${}_{R\otimes S}\mathfrak{M}$中的可裂正合列：

$$0\longrightarrow H_n(P)\otimes C\xrightarrow{\sigma_C}H_n(P\otimes C)\xrightarrow{\pi_C}\mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(P),C)\to 0.$$

而且σ_C、π_C都是自然的。著名的同调泛系数定理是这个定理的一个特例。

在§6中，我们研究了模的投射、内射、平坦维数与环的同调维数、弱维数之间的关系。

定理6.3给出了一个自然同构：$\forall M\in\mathfrak{M}_{R\otimes S}$，$\forall A\in{}_R\mathfrak{M}$，$B\in{}_S\mathfrak{M}$，有$M\otimes_{R\otimes S}(A\otimes B)\cong(M\otimes_R A)\otimes_S B$。注意到这与古典张量积的结合律是不一样的。这个定理有推论：如A是左R-平坦模，B是左S-平坦模，则$A\otimes B$是左$R\otimes S$-平坦模。

前面已提到，S是Zh^R-平坦模是一个很重要的性质，它有很多充要条件，我们把一些

比较重要的综合成下列定理（命题4.3的推论2；定理6.4；定理6.5）。

定理：取定K，R，S，则下列条件等价：

i）S作为左S-模是Zh^R-平坦模。

ii）每个左S-投射模是Zh^R-平坦模。

iii）每个左S-平坦模是Zh^R-平坦模。

iv）每个左$R\otimes S$-内射模都是左R-内射模。

v）存在一个${}_{R\otimes S}\mathfrak{M}$中的内射上生成子$X$，使$X$是左$R$-内射模。

vi）每个右$R\otimes S$-平坦模都是右R-平坦模。

vii）$R\otimes S$作为右R-模是古典的平坦模。

viii）$\forall n\geq 0$，有$\mathrm{Tor}_n^{R\otimes S}(M,A\otimes S)\cong \mathrm{Tor}_n^R(M,A)$，$\forall M\in\mathfrak{M}_{R\otimes S}$，$\forall A\in {}_R\mathfrak{M}$。

ix）$\forall n\geq 0$，有$\mathrm{Tor}_n^{R\otimes S}(M,A\otimes B)\cong \mathrm{Tor}_n^R(M,A)\otimes_S B$，$\forall M\in\mathfrak{M}_{R\otimes S}$，$\forall A\in {}_R\mathfrak{M}$，对于任何左$S$-投射模$B$。

x）$\forall n\geq 0$，有$\mathrm{Ext}_{R\otimes S}^n(A\otimes S,M)\cong \mathrm{Ext}_R^n(A,M)$．$\forall M\in {}_{R\otimes S}\mathfrak{M}$，$\forall A\in {}_R\mathfrak{M}$。

xi）$\forall n\geq 0$，有$\mathrm{Ext}_{R\otimes S}^n(A\otimes B,M)\cong \mathrm{Ext}_R^n(A,\mathrm{Hom}_S(B,M))$ $\forall M\in {}_{R\otimes S}\mathfrak{M}$，$\forall A\in {}_R\mathfrak{M}$，对于任何左$S$-投射模$B$。

xii）$\forall n\geq 0$，有$\mathrm{Ext}_{R\otimes S}^n(A\otimes B,M)\cong \mathrm{Hom}_S(B,\mathrm{Ext}_R^n(A,M))$。$\forall M\in {}_{R\otimes S}\mathfrak{M}$，$\forall A\in {}_R\mathfrak{M}$，对于任何左$S$-投射模$B$。

由以上充要条件可从得到一些关于维数的不等式。其中较为简明的有：

定理6.4的推论1：取定K、R、S，其中S是Zh^R-平坦的，则$\forall M\in\mathfrak{M}_{R\otimes S}$，有$fd_R(M)\leq fd_{R\otimes S}(M)$.

定理6.5的推论1：取定K、R、S，其中S是Zh^R-平坦的，则$\forall M\in {}_{R\otimes S}\mathfrak{M}$，有$\lambda d_R(M)\leq id_{R\otimes S}(M)$。

定理6.1：取定K、R、S，S是Zh^R-忠实平坦模，$R\otimes S$是一个左R-投射模，l、$D(R)<\infty$，则有$lD(R)\leq l$、$D(R\otimes S)$。

本文是在周伯埙教授与佟文庭副教授的指导下完成的，谨此致谢。

左模的张量积及其线性映射

代数专业78级研究生　刘迎胜

指导教师　周伯壎教授

设K是有单位元的可换环，R、S是有单位元的K环。周伯壎教授在文[1]中曾将一个R模M与一个S模N的张量积定义为一个左$R\otimes S$模，本文在此基础上讨论了左$R\otimes S$模$M\otimes N$的一些性质及其线性映射。

全文分成五段。第一段主要讨论$H_R(M,M')\otimes H_S(N,N')$与$H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$的关系。其中$M'$是$R$模，$N'$是$S$模，$H_R(M,M')$表示$R$模$M$到$R$模$M'$的所有$R$同态所形成的可换群，等等。首先证明了$H_R(M,M')\otimes H_S(N,N')$同态于$H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$的一个稠密子群，其次证得当$K$是域时，这同态是单的，最后得到关于

$$H_R(M, M')\otimes H_S(N, N')\cong H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$$

的充要条件的命题3：设K是域，$R\otimes S$是K上可除代数，则

$$H_R(M,M')\otimes H_S(N,N')\cong H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$$

的充要条件是下述条件至少有一个成立：

1）M、N分别是R、S上的有限维线性空间；

2）$N\underset{K}{\otimes}N'$是K上有限维线性空间；

3）$M\underset{K}{\otimes}M'$是K上有限维线性空间。

将这三命题综合起来得到定理4。此定理在$R=S=K$，$M=M'$，$N=N'$的殊特情况下即得书[3]第五章§3的定理1，在$R=S=K$以及M,M',N,N'都是有限维的特殊情况下得到书[4]§1.27的结果。此外还得到一些推论，其中推论8得到：当K是域，M是K上线性空间，S是K上可除代数时，$(L_K(M))_S\cong L_S(M_S)$的充要条件是M、S中至少有一个是K上有限维的。（这里$M_S=M\otimes S$可看作扩张算子区K到S，得到S上的线性空间，$(L_K(M))_S=L_K(M)\otimes S$可看作$K$上线性空间$L_K(M)=H_K(M, M)$通过扩张算子区$K$到$S$得到$S$上的线性空间）。此推论在$S$是$K$的扩域的情况下即得书[3]第五章§3定理2。推论9得到$(M^*)_S=(M_S)^*$的充要条件（这里$M^*=H_K(M,K)$）。

第二段讨论了不可约模的张量积，从而将Azumaya—Nakayama的关于不可约模张量积的定理推广到基域是交换环的情况。设K是可换环，A、B是K上代数，M、N分别是A模、B模，其中心化子分别是R、S。则（1）模$M\otimes N$的$A\otimes B$子模的格与$R\otimes S$右理想的

格是格同构。(2) $A\otimes B$ 模 $M\otimes N$ 的中心化子是 $R\otimes S$。在基域是交换环的情况下得到不可约模的张量积仍是不可约模的充要条件。

第三段以非退化的双线性型来定义一般环模的对偶模。证明了 R 模 M 存在对偶模的充要条件是 M 是无挠模(torsionless)。(M, M') 是对偶模的充要条件是 M' 自然同构于 M^* 的全子模(total submodule)。从而得到无挠模的四个等价条件，在 R 可除的情况下，得到自反模的四个等价条件。指出了两种方法定义的对偶模的关系。另外证明了若 (M, M') 是关于纯量积 $\langle ,\rangle_R$ 的对偶模，$\langle N, N'\rangle$ 是关于纯量积 $\langle ,\rangle_S$ 的对偶模，则 $(M\otimes N, M'\otimes N')$ 是关于纯量积。

$$\langle \omega x\otimes y, x'\otimes y'\omega'\rangle = \omega\langle x, x'\rangle_R \otimes \langle y, y'\rangle_S \omega'$$

的对偶模。此命题在 $R=S=K$ 时就得到书[4]中§1.26的结果。由此得到若 M', N' 分别是 M^*, N^* 的全子模，则 $M'\otimes N'$ 是 $(M\otimes N)^*$ 的全子模。最后得到

$$M^*\otimes N^* \cong (M\otimes N)^*$$

的另一个充分条件。

第四段得到当 K 是整环时，两个 K 模的乘积群是张量积的一个充要条件，也就是将判断张量积的无关条件从域上的线性空间推广到整环上的投射模。设 K 是整环，M、N 是投射 K 模，$(P, \otimes)$ 是 M 与 N 的乘积群，则下列三句话等价：

(1) $(P, \otimes)$ 是 M 与 N 的张量积。

(2) 如果 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\otimes\beta_i=0, \alpha_i\in M, \beta_1\cdots, \beta_n$ 是 N 中 K 上的线性无关元，则可得 $\alpha_i=0$，$i=1,\cdots,n$。

(3) 如果 $\sum_{j=1}^{m}r_j\otimes\delta_j=0, r_1,\cdots,r_m$ 是 M 中 K 上的线性无关元，$\delta_j\in N$，则可得 $\delta_j=0$，$j=1,\cdots,m$。

第五段讨论环模对于自同态环的可迁性。当 R 模 M 作为 $H_R(M,M)=R_M{}^*$ 模是不可约模时，定义 R 模为可迁模。首先由 R 上可迁模得到 R 可除的三个充要条件，特别是若 R 上存在一个自由模是可迁模，则 R 可除。其次证明了 R 上存在可迁模的充要条件是 R 能嵌入可除环，从而得到当 R 是可除环 Δ 的子环，则任一 Δ 模作为 R 模是可迁模。最后证得 $R_M{}^{***}=R^*{}_M$ 以及可迁模 M 的中心化子的中心化子是包含 R 的最小可除环。

参 考 文 献

[1] 周伯壎，左环模的张量积及其范畴，南京大学学报(自然科学版)，1(1979) 1—20°

[2] 周伯壎，左模的张量积及其同调维数，数学研究与评论，1981年创刊号 17—24。

[3] Jacobson, Structure of Rings. 1956.

[4] Greub Multilinear Algebra zud cdition 1978,

交换环模上外乘幂的内积、ax+by+cz不能表出的最大整数

数学专业78级研究生　姚天行

指导教师　周伯壎教授

一、交换环模上外乘幂的内积

可查阅到的文献在论及外乘幂的内积时都是在域上的线性空间中讨论的。Blyth的《Module Theory》一书中给出了交换环模上外代数的定义，本文在此基础上给出了交换环模上外乘一的内积的一个定义，它是线性空间上外乘一内积定义的一个自然推广。

命R为交换环，M为R模，M^*为M的对偶模，$x_i\in M, y_i\in M^*, i, j=1,2,\cdots,n$.记

$$\langle y_1\wedge\cdots\wedge y_n, x_1\wedge\cdots\wedge x_n\rangle=det(\langle y_j, x_i\rangle), \tag{1}$$

本文证明了下述的

定理：当M为投射模时，上式给出的$\wedge^n M\times\wedge^n M^*\to R$的双线性映射是非退化的。

定义：当M为投射模时，$\wedge^n M$与$\wedge^n M^*$内积定义由（1）式给出。

在 Greub的《Multilinear Algebra》一书第5章中，关于不同次外乘一内积定义它恒为零，本文对此作了修改，给出了下述定义：

定义：令$\psi_y{}^n:\wedge^n M\to\wedge^{n-1}M$,

$$\psi_y{}^n(x_1\wedge\cdots\wedge x_n)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\langle y, x_i\rangle x_1\wedge\cdots\wedge x_{i-1}\wedge x_{i+1}\wedge\cdots\wedge x_n.$$

设$n\geq m$，令

$$\psi^n{}_{y_1\wedge\cdots\wedge y_m}=\psi_{y_m}^{n-m+1}\ \psi_{y_{m-1}}^{n-m+2}\cdots\psi_{y_1}^n.$$

类似给出$\psi^n_{x_1\wedge\cdots\wedge x_m}$的定义，记$\alpha_n=x_1\wedge\cdots\wedge x_n, \beta_m=y_1\wedge\cdots\wedge y_m$. 定义

$$\langle\beta_m, \alpha_n\rangle=\begin{cases}\psi^n_{\beta m}(\alpha_n) & n\geq n\\ \psi^m_{\alpha_n}(\beta_m) & n<m.\end{cases}$$

定理：当$n\geq m$时，$\psi^n_{\beta m}(\alpha_n)=\sum\limits_{J\in Z_m}(-1)^{(J)}\langle\beta_m, \alpha_J\rangle\alpha_{J'}$.

定理：设$n\geq p+q$，令$\alpha'_q=x_p{}^{+1}\wedge\cdots\wedge x_{p+q}, \beta'_q=y_{p+1}\wedge\cdots\wedge y_{p+q}$,则

$$\langle\beta_n, \alpha_p\wedge\alpha'_q\rangle=\langle\langle\beta_n, \alpha_p\rangle, \alpha'_q\rangle,$$

$$\langle\beta_p\wedge\beta'_q, \alpha_n\rangle=\langle\beta'_q, \langle\beta_q', \langle\beta_p, \beta_n\rangle\rangle.$$

当 $n=p+q$ 时，上两式就是拉普拉斯展式的一个简便表达式，其中一个看着是对的行展开，另一个就是对列的展开。

在此基础上可以给出行数与列数不相等时行列式的一个定义。

定义：设

$$A_{m,n}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn}\end{pmatrix},\ a_{ij}\in R.\ x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j,\ y_i=\sum_{i=j}^{n}a_{ij}e^*{}_i.$$

令

$$|A_{m,n}|=\begin{cases}\langle e_1{}^*\wedge\cdots\wedge e^*{}_n, x_1\wedge\cdots> x_m\rangle & n\geq m \\ \langle y_1\wedge\cdots\wedge y_n, e_1\wedge\cdots\wedge e_m\rangle & n<m.\end{cases}$$

本文还讨论了由上述定义给出的行列式的一些基本性质。

二、ax＋by＋cz不能表出的最大整数

Frobenius 题问，即求 n 元整系数线性齐式不能表出的最大整数是丢番图方程中的重要题问之一，对 $n=2$ 早已解决。$n=3$时，柯召于1955年给出了 $ax+by+cz$ 不能表出的最大整数 $\varphi(a,b,c)$ 的上界：

$$\varphi(a,b,c)\leq\frac{ab}{(a,b)}+c(a,b)-a-b-c,$$

及达到该上界的充分条件，陆文端给出了上述不等式取等号的充分必须条件。

本文在此基础上，提出了一种算法，从而解决了此问题。

设 $\psi(a,b,c)=\varphi(a,b,c)+a+b+c$，则我们有

引理：若$(c,d)=1$，则 $\psi(da,db,c)=d\psi(a,b,c)$.

定理：让 a,b,c 为两两互素的正整数，

$$c=au-bv, 0<u<b,\ 0<v<a.$$

令
$$j=\left[\frac{a}{v}\right],\ K=\left[\frac{b}{u}\right].$$

Ⅰ）若 $j\neq K$，则

$$\psi(a,b,c)=\max\{au+Kc, ab+c-Kbv\}.$$

Ⅱ）若 $j=K$，让 $a=Kv+\gamma$，$b=Ku+s$，$0<\gamma<v$，$0<s<u$，取$\frac{m}{n}$为使不等式$\frac{s}{u}\leq\frac{m}{n}\leq\frac{\gamma}{v}$成立，且分母最小的真分数，如果 $m=1$，则

$$\psi(a,b,c)=\max\{a(u-ns)+b\gamma,\ as+(nK+1)c\}.$$

Ⅲ）同Ⅱ)所设，$m\neq1$。若 λ 为使下列同余式成立且小于 n 的正整数：

$$\lambda m\equiv1\pmod n,$$

则

$$\psi(a,b,c)=(K+1)c+$$

$$+\max\left\{bv\left\{\frac{(n-1)\gamma}{v}\right\}-au\left\{\frac{(n-\lambda-1)s}{u}\right\},\right.$$

$$\left.bv\left\{\frac{(\lambda-1)\gamma}{v}\right\}-au\left\{\frac{(n-1)s}{u}\right\}\right\}.$$

上述三种情况可以统一在一个公式里：

$$\psi(a,b,c)=(K+1)c+\max\{bh_{n-m}-ag_{n-m-1},bh_{n-m+1}-ag_{n-m}\}.$$

这里 h，g 的含义参见毕业论文引理 7。

本文最后给出了求上述定理中$\frac{m}{n}$的方法。

定理：设 $0<\frac{s}{u}<\frac{\gamma}{v}<1$，这里 $(s,u)=(\gamma,v)=1$. 记 $\gamma_0=v,\gamma_1=\gamma$，

让 $\gamma_{i-1}=j_i\gamma_i+\gamma_{i+1}$，$0<\gamma_{i+1}<\gamma_i$，$i=1,2,\cdots,\mu,\cdots$. 记 $s_0=u,s_1=s$
让 $s_{i-1}=K_is_i+s_{i+1}$，$0<s_{i+1}<s_i$，$i=1,2,\cdots,\mu,\cdots,\cdots$. 若 $j_1=K_1,\cdots,j_{\mu-1}=K_{\mu-1}$，但 $j_\mu\neq K_\mu$，令

$$m_\mu=1,\quad m_{\mu-1}=\begin{cases}K_\mu+1 & \text{当 } 2|\mu,\ s_\mu\neq 1,\\ K_\mu & \text{当 } 2|\mu,\ s_\mu=1,\\ j_\mu+1 & \text{当 } 2\nmid\mu,\ \gamma_\mu\neq 1,\\ j_\mu & \text{当 } 2\nmid\mu,\ \gamma_\mu=1.\end{cases}$$

让 $m_{i-1}=K_im_i+m_{i+1}$，$i=\mu-1,\cdots,2,1$，那么若取$\frac{m}{n}=\frac{m_1}{m_0}$，则$\frac{m}{n}$为满足不等式$\frac{s}{u}\leq\frac{m}{n}\leq\frac{\gamma}{v}$且分母 n 最小的分数。

射影平面上的微分方程定性理论

数学专业78级研究生　陈一元

指导教师　叶彦谦教授

考虑定义在正方形 $S:[0,a]\times[0,a]$ 上的微分方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y) \tag{1}$$

其中 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 S 上连续，具有一阶连续偏导数，且满足以下诸关系式：

$$
\begin{aligned}
&P(0,y)=P(a,a-y) \qquad Q(0,y)=-Q(a,a-y)\\
&P(x,0)=-P(a-x,a) \qquad Q(x,0)=Q(a-x,a)\\
&\qquad\qquad (x,y)\in S
\end{aligned} \tag{2}
$$

由于我们把射影平面视作是由等同正方形S上一些点而形成的，所以射影平面上的一条闭曲线在这正方形上看是由若干段构成的，我们以其段数来称呼这闭曲线，由偶数段构成的曲线称为是偶类的，由奇数段构成的闭曲线称为是奇类的（特别在S中的闭曲线称为0类，它属于偶类）。

［Ⅰ］**引理**1 射影平面上的一条偶类闭曲线能把射影平面分成两部分，而奇类闭曲线不可能。

其实偶类闭曲线是零伦的，而奇类闭曲线不是零伦的，在环面上非零伦的闭轨线可以有若干条，Klein 瓶上也是这样，但对射影平面却有

［Ⅱ］**定理**1 若方程(1)有奇类闭轨线存在，那末只能有一条奇类闭轨线。

［Ⅱ］**定理**2 设L是方程（1）的一条偶类闭轨线，由它把射影平面分成的两部分中，若其中一部分不含奇点，则在这部分中必有奇类闭轨线。

由于闭轨线的类型很多，在具体讨论中若能确定出可能出现的闭轨线的类型是很有用的。

［Ⅰ］**引理**2 若Γ是方程（1）的闭轨线，且它是由定向轨线段族构成，那么Γ最多是2类的闭轨线。

要判别射影平面上的1,2类闭轨线的存在，可用文［Ⅰ］中的定理1.1.1和1.2。

要判别射影平面上的方程不存在闭轨线，我们可把平面定性理论中的Bendixsion、Dulac等定理推广如下：

［Ⅰ］**定理**2 若方程（1）的发散量在射影平面上的区域G中保持常号，且使$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0$成立的子集不含任何2维区域，则方程（1）不存在其相对内部或外部在G中的偶类闭轨线和偶类奇异闭轨线，（本定理对环面和Klein瓶也成立，只要把“偶类”改为“零伦”即可）

［Ⅰ］**定理**3 设G为射影平面上的区域，在G中存在单值连续可微函数$B(x.y)$、使$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}$在$G$中保持常号，而使$\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=0$的子集不含任何2维区域，则方程（1）不存在其相对内部或外部在G中的偶类的闭轨线或奇异闭轨线。

［Ⅰ］**定理**4 设$F(x.y)=0$是一曲线族，$F(x,y)$是定义在射影平面上的单值连续可微函数，若在区域G中$P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}$保持常号且使$P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}=0$的子集不含方程（1）的任何整条闭轨线，则方程（1）在G中不存在任何类型的闭轨线。

我们讨论了射影平面上的多项式系统。

［Ⅱ］**定理**3 射影平面$P^2([0,a]\times[0,a])$上的多项式系统具有形式：

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt}=x(x-a)A(2x-a,2y-a)+y(y-a)B(2x-a,2y-a)\\
&\frac{dy}{dt}=x(x-a)C(2x-a,2y-a)+y(y-a)D(2x-a,2y-a)
\end{aligned} \tag{3}
$$

其中 $A(\cdot,\cdot)$，$D(\cdot,\cdot)$ 是 $(2x-a)$，$(2y-a)$ 的奇次多项式，不含常数项，$B(\cdot,\cdot)$．$C(\cdot,\cdot)$ 是 $(2x-a)$，$(2y-a)$ 的偶次多项式，可含常数项。

［Ⅱ］**定理4** 射影平面上的多项式系统(3)当 $B(\cdot,\cdot)$ 与 $C(\cdot,\cdot)$ 为常数时，只可能有 0 类，1 类或 2 类闭轨线。

［Ⅱ］**定理5** 系统

$$\frac{dx}{dt}=x(x-a)A)2x-a,2y-a)+By(y-a)$$

$$\frac{dy}{dt}=Cx(x-a)$$

其中 B、C 为常数，$B\neq 0$，总是有 1 类闭轨线或 1 类奇异闭轨线。

［Ⅱ］**定理6** 射影平面上的多项式系统当 $A(\cdot,\cdot)=D(\cdot,\cdot)=0$ 时，只可能有 0 类，1 类和 2 类闭轨线。

文中定义了射影平面上的 C^K 系统和解析系统。

［Ⅱ］**定理7** 多项式系统 (3) 当 $A(2x-a,2y-a)$ 不含 $(2y-a)$ 时，不是解析的。

文中考虑了位于正方形边界上的奇点分支出闭轨线的问题。

文中研究了同一方程确定的在不同流形上的解析系统的性质。

［Ⅱ］**定理8** 若方程 (1) 同时是由 $[0,a]\times[0,a]$ 形成的射影平面和 Klein 瓶上的解析系统。若 Ω 是构造射影平面上所有闭轨线的轨线段的集合，且 Ω 中轨线段的条数为有限，那末构成 Klein 瓶上所有闭轨线的轨线段的集合也是 Ω。反之亦然。

对一个同时是环面和 Klein 瓶上的解析系统得到和以上类似的结论。即［Ⅱ］**定理9**.

附 ［Ⅰ］,［Ⅱ］分别表论文中的第Ⅰ部分和第Ⅱ部分。

论由周期核产生对应非周期核的几类方法

数学专业79级研究生 周克成

指导教师 郑维德副教授

Hardy, G. H. 定理[1] [2]的直接结果是下述

命题H 设给定非周期核 $\chi(x;\rho)\in NL^1\cap BV$，$\rho\in A(\sigma,\infty)$，对每个 $\rho\in A1$，令

$$\chi\rho(x)=\sqrt{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\chi(x+2k\pi;\rho) \tag{1}$$

则级数 (1) 绝对一致收敛，且函数 $\chi_\rho(x)\in L^1_{2\pi}\cap BV_{loc}$，并满足

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_\rho(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(x;\rho)dx=1, \tag{2}$$

$$\|\chi_\rho(\cdot)\|L^1_{2\pi}\le\|\chi(\cdot;\rho)\|L^1, \tag{3}$$

$$I_\rho(f;x)=I(f;x;\rho)\quad f\in\chi_{2\pi},x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

此外，若 $\chi(x;\rho)$ 在直线群上 $\mathbb{R}$ 逼近恒同，则 $\chi_\rho(x)$ 在园周群 T 上逼近恒同。

显然，命题H的含义是对任何非周期核 $\chi(x;\rho)\in NL^1\cap BV$ 总可由 Poisson 求和公式(1)构造一对应周期核 $\chi_\rho(x)\in L^1_{2\pi}\cap BV_{loc}$。本文讨论这一命题的逆。

文中引进有界周期核 $\chi_\rho(x)$ 产生对应非周期核 $\chi(x;\rho)$ 的乘子法，证明对任何 $\chi_\rho(x)\in L^\infty{}_{2\pi}$ 可构造一 $\chi(x;\rho)\in NL^1\cap L^\infty$，使满足命题H中的 (1)—(4)（其中(3)成为等式）；并且若 $\chi_\rho(x)$ 在 T 上逼近恒同，则 $\chi(x;\rho)$ 也在 $\mathbb{R}$ 上逼近恒同。此外，文中给出了称为推广整函数型乘子的一类重要乘子函数的一般形式。

文中还给出具适当形式的周期核构造对应非周期核的待定系数法，并证明了解的存在唯一性定理。由待定系数法可以获得 Fejér、Jackson、Jackson-de la Yallée Poussin、Rogosinski、Abel-Poisson、Zheng Weixing、Angheluta 等核如所已知的非周期核，特别地，还可给出 Fejér-Кероькйн、Ghermanesco 扰动 Fejér 型非周期核，且由乘子法证明了逼近恒同性。

文中采用乘子法研究对应奇异积分 $I_\rho(f;x)$ 与 $I(f;x;\rho)$ 逼近性质的相互关系，讨论 $I_\rho(f;x)$ 的逼近性质向 $I(f;x;\rho)$ 的传递问题。

文中证明了对应奇异积分能够有同阶的正逼近定理。在一定条件下，分别就 $0<\alpha<1$，$0<\alpha<2$，$\alpha=2$ 三种清形，证明了对应该的 α 阶绝对矩的精緻关系：

$$m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)=m(\chi_\rho;\alpha)+0(ml\chi_\rho;\alpha))\quad(\rho\to\infty)。$$

此外，给出了逼近度量 $\Delta(\chi(\cdot;\rho);\alpha)$ 与 $\Delta^*(\chi(\cdot;\rho);\alpha)$ 的渐近性质。

文中建立了对应该 C. H. Бернштейн 型不等式的等价过渡。从而，对应奇异积分能够有类同的逆逼近定理

在本文的结尾，给出一张乘子函数表与一张常用周期核由乘子法产生对应非周期核的表，它可视为 poisson 求和公式的逆。指出本文给出的一些定理可用来发掘对应非周期奇异积分的某些逼近性质。事实上，若干常用奇异积分的结构与正、逆逼近定理是本文所有方法的特例。此外，还给出了 Fejèr—Коровкйн 与 Chermanesco 非周期奇异积分的正、逆逼近定理与渐近展式。

本文在郑维行教授的指导与鼓励下完成。

主要参考文献

[1] Butzer P. L., Nessel R. J., Fourjer Analysis and Approximation, I, One-dimensional theory, Basel-stuttgart, 1971.

[2] 阿赫叶惹尔，逼近论讲义，科学出版社，1957。

[3] Тиман А. Ф., Теория Приближения функчий Бействитеиьного перемейного, ГИФМЛ, 1960.
[4] 郑维衍，论算子 $B_{\sigma}(f;x)$ 的极性，数学学报 15(1965)，54—62。
[5] Stark E. L., Erzeugung und strukturelle Verknüppungen von kernen singulärer faltungsintegralle, Lecture Notes in Mathematics (556), Springer—Verlag. Berlin Heidelberg. N. r., 1976, 390—402.
[6] Pólya G., Szegö G., Problems and theorems in analysis, Vol Ⅱ, Part Ⅸ, Ⅶ, 1972.

半拓扑半群理论的一些问题
泛函分析在控制论中的应用

数学专业78级研究生　王体翔

指导教师　王声望副教授

本文由四篇独立的论文组成，分编为四章，现将各章的内容作以下简介，供审阅时参考。

第一章的主要内容是把 C. T. Taam（谭才德）教授在山东大学举办的"动力体系控制论研究班"上所讲授的在紧距离空间上对单参数算子半群的概周期分解定理推广到紧距离空间上的两参数算子半群的情况。为了实现这个目的，我们先对一般的两参数半拓扑半群的构造进行研究。给出了某些一般的结果，例如把两参数半群的核及其单位元和固定一个参数后所得到的单参数算子半群的核及其单位元统一起来了。并给出了关于这个核及其单位元的一些重要性质（定理1.1～1.5）由于这些讨论，可以把两参数算子半群的概周期分解借助于关于单参数算子半群的已获得的结果来实现，从而证明了两参数半拓扑算子半群的概周期分解定理(定理 1.6），即把空间分解为相对于这个半群的概周期部分和"微小部分"，关于一般的两参数半拓扑半群的构造的这些结果还可得出其它应用。定理 1.7 就利用这些结果给出两参数半群对角极限元的 Wold 分解。

关于两参数半拓扑算子半群的概周期分解是 C. T. Taam 在上述研究班上提出的问题之一。

第二章解决了 C. T. Taam 提出的另一个问题。C. T. Taam 原先提出的问题是讨论紧距离空间X上全体连续函数空间$C(X)$相对于X上的单参数算子半群的遍历状态空间中每个元的积分表达形式(即定理 2.3 当 $F=C(X)$ 时)。在本章中，我们对一般的拓扑空间X，和X上的全体有界连续函数空间 $C(X)$的任一C^*一子代数F，在某些条件下，给出了F上相对于X的半拓扑算子半群的遍历状态的积分表达形式(定理2.2)。这个积分是借助于 Haar 积

分给出的，而所须的条件当 $F=C(X)$ 时，一般都能满足。对于X为紧距离空间时，则给出了 F 相对于X上的半拓扑单参数算子半群的遍历状态的 Riemanu 积分表达形式。即对用F代替$C(X)$时证明了 C. T. Taam 的猜想(定理 2.3)。以上两个结果目前从能看到的文献中尚未见到类似或相近的结论，对于紧距离空间上的单参数算子半群，我们还可得到关于概周期性的两个结论，这两个结论实现了F相对于这个半群的概周期分解。

第三章是讨论具有离散谱的线性无界算子的摄动问题，并给出在线性定态控制系统上的应用。

王康宁、关肇直、宋健、于景元诸位先生自1974年以来陆续在“中国科学”、“数学学报”上发表了多篇关于弹性振动的控制问题的论文，其中关于镇定问题都归结为讨论在 Hilbert 空间中，方程

$$x(t)=Ax(t)+bu(t),\ x(0)=x_0 \qquad (*)$$

在线性反馈：$u(t)=\langle x(t),g\rangle, b \cdot g$ 为空间中的元. (**) 下的解的渐近稳定问题。

早在1969年，D. J. Russell 在 J. M. A. A. V01.25 上就讨论了上述渐近稳定解的题问，证明了当A为正定自伴算子，其所有谱点都为单重点谱，且满足一些离散条件，此时，固定 g，且当 $b=-\varepsilon g$，ε 为充分小的正数时，解渐近稳定。

1975，孙顺华在四川大学学报上用不同的方法讨论了类似于 Russell 的形式的反馈下解的渐近稳定性。

以上提到的诸位先生的论文也都限于讨论A为正定自伴算子，其谱为满足某些离散条件的单重点谱的情况。

孙顺华1978年在数学学报上发表了以下结果：

当A为无界离散谱算子，其谱分解为：

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k E(\lambda_k),\ \lambda_k\neq\lambda_j\ (\forall k\neq j)\ \dim E(\lambda_k)=1\ (k\geq 1)$$

设 $E(\lambda_k)$ 之规格化本征矢为 ϕ_k，且

$$\inf_{i\neq j}|\lambda_i-\lambda_j|=\delta>0,\quad \sup_{1\leq k<\infty}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_j-\lambda_k|^2}=\tau<\infty$$

那么对任意给定的复数列$\wedge=\{\nu_1,\nu_2,\cdots\}$，存在 g 使得：

$$\sigma(A+\langle\cdot,g\rangle b)=\sigma_p(A+\langle\cdot,g\rangle b)=\wedge$$

的充要条件为：$\langle\phi_k,b\rangle\neq 0(k\geq 1$，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_k-\nu_k}{b_k}\right|^2<\infty$$

由上述结果，孙顺华又得出以下定理：

当A满足上面条件，且存在指算集J使

$$\begin{cases} R_e\lambda_k>0 & k\in J \\ R_e\lambda_k\leq 0 & k\not\ni J \end{cases}\quad (\forall k\geq 1).$$

则存在 b，g 使得系统（$*$）在反馈（$**$）下镇定的充要条件为：

$$\sum_{k\in J} R_e\lambda_k < \infty$$

在上面所引诸文中，都基于J. T. schwartz 1954年在 Pacific. J. Math (4) 上发表的谱算子摄动理论的。

本章不再限于考虑 Hilbert 空间上的具有离散谱的谱算子，而考虑 Banach 空间中的一般具有离散谱的无界算子，使用的方法是与以上诸文不同的，我们先讨论了这类算子在一维摄动后谱的性状，给出了在定理3.2条件下，摄动后谱的判别法(定理3.1, 3.3, 3.4)。在这基础上，再给出类似于孙顺华1978年给出的并行的结果，我们所获得的结果包含了除孙顺华以外的其它已有的结果。而与孙的结果互不包含(由于对算子的限制互不相同)，由于我们是先讨论摄动下的谱的性状。因此提示我们还可以进一步讨论具有限重离散谱的算子在有限维摄动下的镇定问题，我们已得出部分结果（定理3.1′,3.3′），因限于篇幅，不再一一叙述了。

第四章讨论的是 Hilbert 空间上压缩算子半群的强稳定问题。R. E. O′Brien 在他的博士学位论文（1977）中讨论了 Hilbert 空间中压缩算子半群的弱稳定问题。其证明是基于 S. Foguel 1963 年在 Pacific. J. Math. (13) 上证明的定理，本章则在给出条件
$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^2=Q=Q^2$ 下证明了在强稳定情况下类似于 Foguel 的定理（定理 4.1)。并且证明了条件 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^2=Q=Q^2$ 在摄动下的稳定性（定理 4.2），在这基础上，我们得出了压缩算子半群的强稳定的一些结果。具有性质 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^2=Q=Q^2$ 的算子类显然比正规算子类要广（正规算子具有上述性质），事实上，如 A 为任一非正规线性算子，它生成一个 Co 类压缩算子半群 $\{T(t),t\geq 0\}$.
令 $s(t)=e^{-t}T(t)$，$t\geq 0$。显然 $s(t)$ 为 Co 类压缩算子半群。由于对每个

$$x\in H,\ \|s(t)x\|\to 0,\ \|s(t)^*x\|\to 0\ (t\to\infty).$$

故相应于 $s(t)$ 之 P_S,Q_S，有 $P_S=P_S{}^2=Q_S=Q_S{}^2=0$.
但 $s(t)$ 无穷小母元为 $A\text{-}I$，由于 A 为非正常算子，故 $A\text{-}I$ 也为非正规算子。

在 C. D. Benchimol 的论文(S. IAM. J. Control &Optimization. Vol 16 (1978))的基础上，我们证明了 $-B^*$ 为系统 (A,B) 的“最好”反馈算子之一，并证明了有相当多的“最好”反馈算子存在（定理4.7, 4.8, 4.9）。

本章最后，我们以 Dunford-Schwartz 意义下的标量型算子为例，说明前面所引入的条件：$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^2=Q=Q^2$ 对强稳定问题未必是必要的，从而提示了在这一方面可以再做进一步的工作。

Banach空间的几何参数问题

泛函分析专业78级研究生　高　继

指导教师　王声望副教授

本文讨论Banach空间单位球的度量参数。

本世纪六十年代和七十年代J. J. Schäffer、R. Whitley、C. A. Kottman分别引进了单位球的围长(qirth)、厚度(thickpess)、薄度(thinness)、存储(packing)等度量参数，指出两个Banach空间近似等距的必要条件是这些参数值相等；引进了一类特殊空间——平坦空间的概念，在平坦空间的单位球面上存一条简单对称连续的封闭曲线，其长度为4；在二维情况下，用L表示单位球周长的一半，则$3\leq L\leq 4$，并且$L=3\Longleftrightarrow S(X)$为仿射正六边形。$L=4\Longleftrightarrow S(X)$为平行四边形。

本文分二部分，在Ⅰ里，作者证明了n维空间的packing几个公式：

$$0.4285<P_*(3,\mathscr{X}_2)<0.4643.$$

$$P_*(5,\mathscr{X}_2)=P_*(6,\mathscr{X}_2)=P_*(7,\mathscr{X}_2)=\frac{1}{3}.$$

$$P_*(4,\mathscr{X}_3)\geq 0.4.$$

$$P_*(9,\mathscr{X}_3)=\frac{1}{3}.$$

$$P_*(2^n,\mathscr{X}_n)\geq\frac{1}{n+1}.$$

$$P_*(2n+1,\mathscr{X}_n)\geq\frac{1}{3}.$$

并且指出了上述关系式在欧氏空间的实际意义，例如$P_*(4,\mathscr{X}_3)\geq 0.4$，表明在空间中任一对称凸集内放四个与之位似的小对称凸集，当它们度量之比不大于0.4时，四个小凸集不会相交。

在Ⅱ里，作者引进了Banarh空间单位球的一种新度量参数——均匀度(uniform degree)的概念，分别表为$g(X)$、$G(X)$、$j(X)$、$J(X)$：

$$g(X)=\inf_{x\in S(X)}\left\{\inf_{t\in S(X)}\{\max[d(x,t),d(-x,t)]\}\right\}$$

$$G(X)=\sup_{x\in S(X)}\left\{\inf_{t\in S(X)}\{\max[d(x,t),d(-x,t)]\}\right\}.$$