面積与對数

原著者 А. И. 馬爾庫什維奇
譯者 趙根榕

上海中外書局出版

面積與對數　32開本　68用紙面　定價¥3,700

原書名	Площади и Логарифмы
原著者	А. И. Маркущевич
原出版社	Гостехиздат
原出版版次	1952年版
譯者	趙根榕
出版者 發行者	中外書局 上海中山東一路18號
印刷者	協興印刷廠 上海海寧路788號

★全國各地公私營書店均有出售★

書號：0031　1954年1月初版(印數)0001—2000册
1954年5月再版(印數)2001—4000册

內容大要

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社所出版的"數學普及演講集"(Популярные Лекции По математике)第九册 A. И. 馬爾庫什維奇 (Маркущевич) 所著的"面積與對數"(ПлощаДи и Логарифмы) 譯出的。本書由幾何觀點從面積出發導入對數概念及其基本性質，並介紹了積分學的最簡單的概念及事實，可作爲中學高年級與大學初年級同學的課外讀物，也可以供對數學有興趣的同等程度的同志的參攷。

如對本書譯文有指正意見，請寄交譯者(西安西北大學)，則不勝感謝。

序

1951 年秋，我曾在莫斯科大學給要參加數學比賽會的中學九年級與十年級的學生大批聽衆作了一次講演，講“面積與對數”。講演的目的是敍述對數的幾何理論，按這個理論來說，對數是面積，而且對數所有的性質都可以由面積的性質推出來。講演並順便介紹了一些積分學的最簡單的概念與事實。

這本小册子就是這個講稿稍加補充而成的。開始讀時，讀者可以不知道：什麼是對數，他只要稍微知道一些最簡單的函數與它們的圖象表示法，幾何級數與極限概念就可以了。所有這些知識，九年級學生自學年的四分之二起就已經具備了。

如果讀者想要進一步鑽研這本小册子中所得出來的關於對數的知識，那麼他可以去看阿別爾遜 (И. Б. Абельсон) 的書“對數的產生”與馬爾庫什維奇 (А. И. Маркушевич) 的書“級數”。第二本書的最後一章包含與這本小册子不同的對數理論的建立法。

作者

面積與對數

1. 假設給出一個函數，這就是說，指出了一個方法，按這個方法對於每一個 x 值，可以求出來與這個 x 相對應的 y 值（函數值）。函數最常用公式表示出來。 例如，公式 $y=x^2$ 定義 y 是 x 的函數。 這兒，對於每個數 x（例如 $x=3$）將這個數平方就得到對應的 y 值（$y=9$）。

公式 $y=\frac{1}{x}$ 定義另外一個函數。 這兒，對於每個不等於零的 x，對應的 y 值是 x 的倒數；如果 $x=2$，則 $y=\frac{1}{2}$，如 $x=-\frac{1}{2}$，則 $y=-2$。

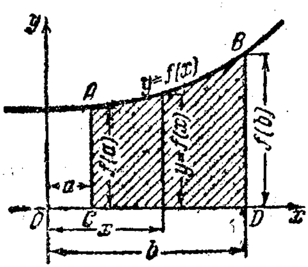
當談到函數時，如果不說明：究竟所討論的是什麼樣的函數，那麼就寫：$y=f(x)$（唸："y 是 x 的 f"）。 這也就是說，y 是 x 的某一個函數（可能 $y=x^2$ 或 $y=\frac{1}{x}$，或別的任意函數）。函數的這種表示法與用字母表示數的觀念一樣。 要知道，可以說數 2、$-\frac{1}{2}$、$\sqrt{2}$，也可以說數 a，a 指數 2、$-\frac{1}{2}$、$\sqrt{2}$ 或者別的任意數。 與可以用不同的字母來表示數一樣，除了 $y=f(x)$ 這種寫法以外還可以用別的寫法，例如 $y=g(x)$，$y=h(x)$ 等等來表示函數。

這樣，如果在同一個問題裏必須談到兩個函數時，一個要

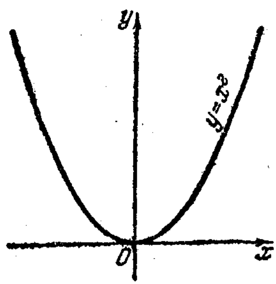
用 $y=f(x)$ 表示，那麼另外一個就得用 $y=g(x)$ 等等來表示。

函數 $y=f(x)$ 可以用圖象來表示。 爲了這個目的，取兩個互相垂直的直線 Ox 與 Oy——坐標軸（第1圖）——選擇一個量度單位後，並在 Ox 上截取 x 值，而在 Ox 的垂線（在 xOy 平面上）上截取對應的值 $y=f(x)$。 同時遵從符號律：用（沿着 Ox 軸）向右邊所截取的線段或向（Ox軸的）上方所截取的線段表示正數，而用左邊或向下方的表示負數，我們想起，由 O 點起在 Ox 上所截取的有向線段叫做橫坐標，而由 Ox 起與這個直線垂直所截取的線段叫做縱坐標。

如果對於所有可能的 x 值施行以上所說的作法，那麼縱坐標的端點就在平面上畫一條曲線——函數 $y=f(x)$ 的圖象（在函數 $y=x^2$ 的情形，圖象是拋物線，示於第2圖中）。



第 1 圖



第 2 圖

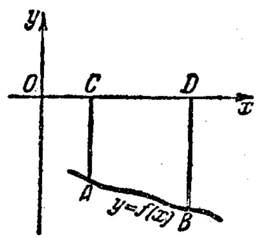
在圖象（第1圖）上取任意兩個點 A 與 B，並由這兩個點

向 Ox 軸作兩條垂線 AC 與 BD。 得到圖形 $ACDB$；這個圖形稱爲曲線梯形。 如果在特別情形，弧 AB 要是不平行於 Ox 軸的直線段就得到平常的而且是直角的梯形。 但如果 AB 是平行於 Ox 的直線段，則得到矩形。

於是，直角梯形與矩形是曲線梯形的特例。

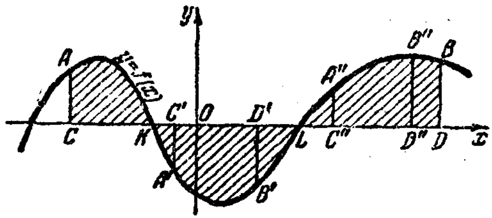
第 1 圖上所表出的函數圖象在 Ox 軸的上方。 這樣的位置只有當函數値是正數時纔有可能。

如果函數値是負的，則圖象在 Ox 軸的下方（第 3 圖）。這時我們規定將曲線梯形的面積寫上負號，並將看它成負的。



第 3 圖

最後，可能在 x 變化的不同區間上，函數有不同的符號。 這時它的圖象一部分在 Ox 軸的上方；而一部分在 Ox 軸的下方；類似的情形示於第 4 圖。 這兒曲線梯形 $A'C'D'B'$ 的面積應當看成負的，而 $A''C''D''B''$ 的面積則應當看成正的。 如果這時在圖象上取如圖所示的二點 A 與 B 並由它們向軸 Ox 作垂線 AC 與 BD，則得這兩個垂線間的圖形，在第 4 圖上用陰影表示出來的就是。 這個圖形依然稱爲曲線梯形；它由弧 $AKA'B'LA''B''B$、兩個縱坐標 AC 及 BD 與橫坐標軸的線段 CD 所圍成。 我們把它的面積看成圖形 ACK，$KA'B'L$ 與 $LA''B''BD$ 的面積的和而且



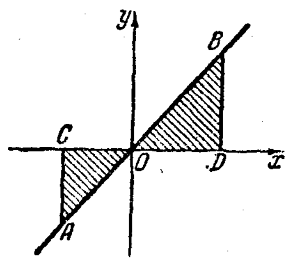
第 4 圖

其第一、三兩個的面積是正的，而第二個的是負的。

讀者容易了解：在這些條件下，全曲線梯形 $ACDB$ 的面積可以是正的，也可以是負的，而在某些情形，還可以等於零。例如，函數

$$y=ax\ (a>o)$$

的圖象是直線；這兒圖形 $ACDB$ (第 5 圖)的面積當 $OD>OC$ 時是正的，當 $OD<OC$ 時是負的而且最後如 $OD=OC$ 則等於零。



第 5 圖

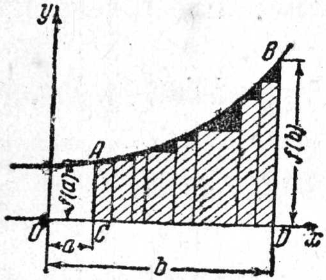
2．現在來研究求定曲線梯形的面積 S 的問題。 因為這種面積的計算在數學、物理以及力學的各種問題中常常有遇到之必要，故有專門的科學——積分學——研究這個問題的解法。 我們先來擬訂問題的解法大綱，將全部解法分爲兩部分。 第一部分，我們求面積的近

似值，使近似誤差隨意地小；第二部分，由面積的近似值過渡到精確值。

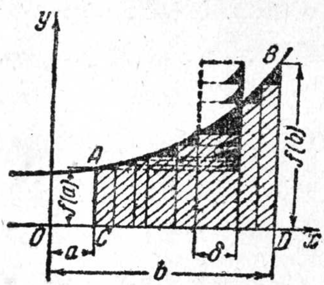
當着手第一部分時，我們用形式如第 6 圖上所示的階梯圖形(這個圖形畫有陰影)來代替曲線梯形 $ACDB$。階梯圖形的面積容易計算，因爲它等於矩形的面積的和。我們將這個和看成所求面積 S 的近似值。

當用階梯圖形的面積代換 S 時，我們作了某一個誤差 α；誤差由我們圖上全部塗黑了的曲線三角形的面積所組成。爲了估計誤差的大小，茲選擇最寬的矩形，並延長它，使它的高等於函數的最大值(在第 6 圖的情形等於 BD)。更進一步將所有的三角形都平行着 Ox 軸搬到矩形內；它們在矩形內組成一個鋸齒圖形(第 7 圖)。因爲這個圖形全在矩形內，故等於鋸齒面積的和的誤差 α [1] 必須小於矩形的面積。如果它的底是 δ(希臘字母，唸“代爾他”)，就得到 $|\alpha|<|\delta\cdot BD$。由此可見：如將第 6 圖中矩形取的使其中最寬的一個的底 δ 爲十分小的數，則可使誤差 α 變爲隨意地小。例如，如果

1) 在第 6 圖與第 7 圖中，函數的圖象有上山的形式(或下山的形式)。如果圖象有更複雜的形式，一會兒升高，一會兒降低的話(例如，見第 4 圖)，則曲線三角形當搬到一個矩形裏以後可能互相碰着，而且這時它們的面積之和可能大於矩形的面積。要將我們的討論應用於這個較複雜的情形，應當將全圖形分爲幾部分，使各部分或者有升的形式，或者有降的形式，並個別地將我們的討論應用於此各部分。



第 6 圖



第 7 圖

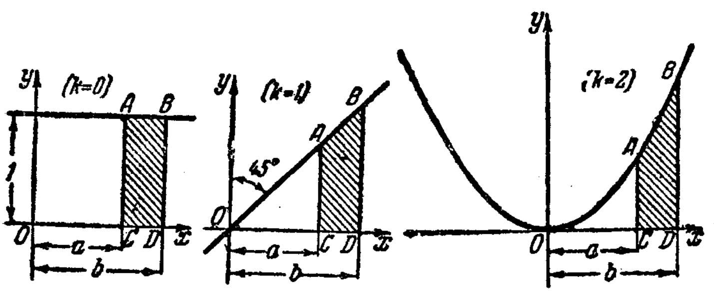
$BD=20$,而我們想使階梯圖形的面積與S的差小於0.001,則取$\delta\times BD=20\delta$小於0.001,即$\delta<0.00005$就夠了;這時

$$|\alpha|<\delta\cdot BD<0.001。$$

然而，無論我們使δ多麼小，每次總都得到——縱使是非常小的——誤差α，這是因爲曲線梯形的面積不等於階梯圖形的面積的緣故。問題解法的第二部分,也就是最後一部分是求極限。假設我們要討論的不是一個,也不是兩個,而是無限多個第6圖所示的階梯圖形。矩形的數目愈來愈大,使它無限地增大,而這個矩形中最寬的一個的底δ愈來愈小,使它無限地接近於零。這時當將曲線梯形的面積換以階梯圖形的面積時所產生的誤差α變得愈來愈小，也無限地接近於零。於是得到了所求面積爲階梯圖形面積的極限。

3. 茲按照上節所說的方法來計算下列重要的特別情形

的曲線梯形的面積，即當函數 $y=f(x)$ 是指數爲非負整數的冪 $y=x^k$ 時的情形。 對於指數 $k=0$、1、2 我們得到 $y=x^0=1$，$y=x^1=x$，$y=x^2$。 它們的圖象容易作出：是平行於 Ox 且在 Ox 上方距離爲 1 的直線(第 8 圖)，角 xOy 的平分線(第 9 圖)與拋物線(第 10 圖)。



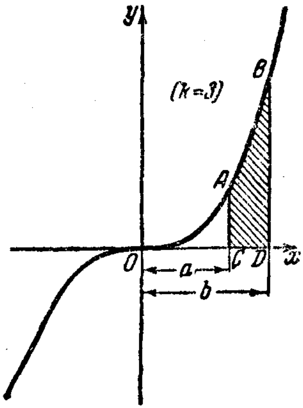
第 8 圖　　第 9 圖　　第 10 圖

如果取更高的冪指數，則得函數 $y=x^3$，$y=x^4$，$y=x^5$，它們的圖象示於第 11、12、與 13 圖中。

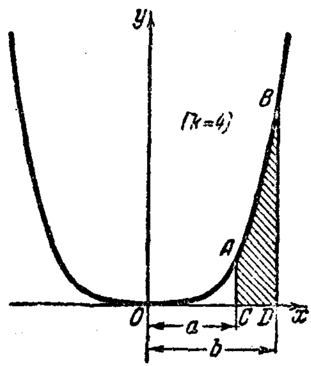
如 k 是奇數，則圖象關於 O 點對稱（第 9、11、13圖），但如 k 是偶數，則它們關於 Oy 軸對稱(第 8、10、12 圖)。

如 $k\geqslant 1$，則圖象經過 O 點。 這時，k 愈大，它們在 O 點的近旁與 Ox 軸靠的愈近，同時按離開 O 點的程度愈急劇地上升(或下降)。

在第 8—13 圖中，曲線梯形用陰影標誌出來。 當 $k=0$ 與



第 11 圖



第 12 圖

$k=1$時,它們面積容易求出來。 即如 $k=0$, 則 $ACDB$ 的面積等於

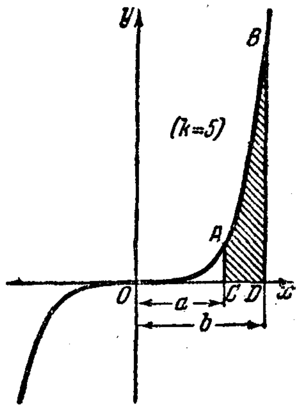
$$CD \cdot AC = (b-a) \cdot 1 = b-a,$$

但如 $k=1$, 則$ACDB$的面積等於

$$CD \cdot \frac{AC+BD}{2} = (b-a)\ \frac{a+b}{2}$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2}。$$

現在來證明: 如 $k=2$, 則 $ACDB$ 的面積等於 $\frac{b^3-a^3}{3}$; 如 $k=3$, 則 $ACDB$ 的面積等於

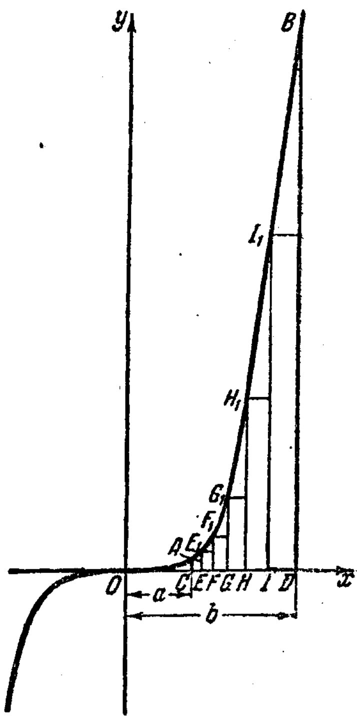


第 13 圖

$\frac{b^4-a^4}{4}$等等。在一般情形，當 k 爲隨意非負的整數時，我們要來證明所對應的曲線梯形的面積等於$\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$。顯然，這個一般結果包括着前面那些特例。

爲了使以下計算容易起見，玆取指數 k 的確定數值，比如說取 $k=5$。此外，更假設 $0<a<b$。因此我們就來考察函數 $y=x^5$ 的圖象並實行第2節所擬的大綱以證明曲線梯形 $ACDB$（第14圖）的面積等於$\frac{b^6-a^6}{6}$。

4. 我們必須要計算很多個矩形——階梯圖形的部分——的面積的和（第14圖）。爲了使我們的工作簡化起見，玆選取面積成幾何級數的矩形。爲了這個目的，在 Ox 軸上取點 E、F、G、H……、



第 14 圖

I 使長度 $OC=a$, OE、OF、OG、……OI、$OD=b$ 成幾何級數；這個幾何級數的項數用 $n+1$ 來表示，而其公比用 q (因 $b>a$, 故 $q>1$) 來表示，這時等式

$$OC=a、OE=aq、OF=aq^2 OG=aq^3、……、OI=aq^{n-1}、OD=aq^n=b$$

成立。在第14圖中，表出了6個矩形，因此，$n+1=7$，然而今後我們假設 n 爲隨意大的數，比如說 $n=1\,000$、$10\,000$、$100\,000$ 等等。

矩形的底也作成公比爲 q 的幾何級數：

$$CE=OE-OC=a(q-1), EF=OF-OE=aq(q-1), FG=OG-OF=aq^2(q-1), ……, ID=OD-OI=aq^{n-1}(q-1)$$

(這個級數與以下那些級數的項數都等於 n，而不等於 $n+1$)。

縱坐標 CA、EE_1、FF_1、GG_1……、II_1 爲矩形的高；它們各等於與它們對應的橫坐標的五次冪(須知我們取$y=x^5$)。因此，

$$CA=OC^5=a^5,\ EE_1=OE^5=a^5q^5,\ FF_1=OF^5=a^5q^{10}, GG_1=a^5q^{15}, ……, II_1=OI^5=a^5q^{5(n-1)}。$$

可見，矩形的高也作成公比爲 $q^5(=q^k)$ 的幾何級數。

因爲矩形的底作成公比爲 q 的級數，而高作成公比爲 q^5 $(=q^k)$ 的級數，故矩形的面積應當作成公比爲 $qq^5=q^6$

$(=q^{k+1})$ 的級數：

$$CE \cdot CA = a(q-1)a^5 = a^6(q-1);$$

$$EF \cdot EE_1 = aq(q-1)a^5 q^5 = a^6 q^6(q-1);$$

$$FG \cdot FF_1 = aq^2(q-1)a^5 q^{10} = a^6 q^{12}(q-1);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$ID \cdot II_1 = aq^{n-1}(q-1)a^5 q^{5(n-1)} = a^6 q^{6(n-1)}(q-1)。$$

所以矩形的面積的和——等於階梯圖形的面積——是首項為 $a^6(q-1)$，末項為 $a^6 q^{6(n-1)}(q-1)$，而公比為 q^6 的幾何級數的和：

$$\frac{a^6 q^{6(n-1)}(q-1)q^6 - a^6(q-1)}{q^6-1} = [(aq^n)^6 - a^6]\frac{q-1}{q^6-1}$$

$$= \frac{b^6-a^6}{q^5+q^4+q^3+q^2+q+1}。$$

（我們曾利用 $b=aq^n$ 與 $\frac{q^6-1}{q-1}=q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$）。

5. 使矩形的數目 n 無限制地增加。 因為矩形的底作成增加幾何級數 $(q>1)$，故這些底中的第一個較所有其餘的都小。 但所有這 n 個底的長的和等於 $b-a$；故部份 CE 必須小於 $\frac{b-a}{n}$，即 $aq-a<\frac{b-a}{n}$，由此，$q-1<\frac{b-a}{na}$。

當 n 無限制地增加時，上列不等式的右邊趨近於零；因為左邊是正的，故它也必須趨近於零，即 q 趨近 1。

由此進而推出：q^2、q^3、q^4 與 q^5 也趨近於 1，和 $q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$ 趨近於 6，因而，階梯圖形的總面積——等於

$$\frac{b^6-a^6}{q^5+q^4+q^3+q^2+q+1}$$

——趨近於極限

$$\frac{b^6-a^6}{6}。$$

所求曲線梯形的面積也應當等於這個極限：

$$S=\frac{b^6-a^6}{6}。$$

這個結果是當 $k=5$ 時我們所得到的。如果我們對於任意自然數 k 的一般情形施行以上的計算，那麼我們就得到

$$S=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}。$$

這樣，我們就證明了：上面由函數 $y=x^k$ 的圖象的弧與橫坐標爲 a 與 b 的縱坐標間所圍成的曲線梯形的面積等於

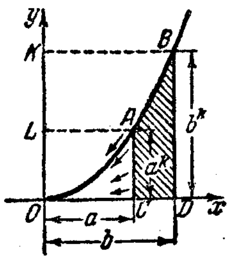
$$\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}。$$

6．上一節的結果是在 $0<a<b$，即曲線梯形在 Oy 的右方的假設下所得到的。當 $a<b<0$ 時也可以用同樣方法來證明。然而如果依舊將級數的公比 q 取爲正的大於 1 的，那麼現在就應當將 b 看成級數的首項，而將 a 看成末項（因爲 $|a|>|b|$）。再計算一次，也就得出同一結果：

$$S=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}。$$

如果 k 爲奇數，則 $k+1$ 爲偶數，因而 b^{k+1} 與 a^{k+1} 爲正數，而且前者小於後者。所以，這時所得到的 S 爲負數。而這是必得如此的，因爲當 k 是奇數的時候，所對應的曲線梯形在 Ox 的下方（見第 11、13 圖的左半）。

現在返來談 $0<a<b$ 的情形。如果命 b 保持不變，而命 a 趨近於零，則曲線梯形向左伸展，而當 a 等於零時變爲曲線三角形 ODB（第 15 圖）（我們假設 $k\geqslant 1$）。



第 15 圖

顯然，當 a 趨近於零時，曲線梯形的面積趨近於曲線三角形的面積。事實上，第二個面積與第一個面積的差小於面積 $OCAL$，後者本身趨近於零。由另外一方面來看，當 a 趨近於零時，曲線梯形面積（這由所求出的公式可以看出來）趨近於 $\frac{b^{k+1}}{k+1}$。所以曲線三角形 ODB 的面積等於 $\frac{b^{k+1}}{k+1}$，即較矩形 $ODBK$ 的面積小 $k+1$ 倍，或者同樣的爲"直角三角形 ODB 的直角邊"乘積少 $k+1$ 倍（我們加引號，是因爲我們說的不是平常的，而是曲線的三角形）。當 $k=1$ 時我們得到函數 $y=x$，圖象變爲直線（見第 9 圖），三角形變爲平常的