

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

■ 汪仁官 刘婉如 冯 泰 编

概率统计讲义 习题解答



高等教育出版社

大学数学学习辅导丛书

概率统计讲义习题解答

汪仁官 刘婉如 冯 泰 编

高等教育出版社

内容提要

本书是北京大学陈家鼎等编写的《概率统计讲义》(第三版)教材全部习题的解答。

本书按主教材各章习题顺序编排,与教材的题号一致。本书对全部题目都给出了解答,少数题目是一题多解,有些作了题目分析、解题思路分析和解题方法归纳,并指出易犯的错误,究其原因,澄清不正确的想法。

通过对本书的参考和学习,可使读者提高分析问题和解题的能力,加深对基本内容的理解和掌握。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计讲义习题解答/汪仁官,刘婉如,冯泰编.

北京:高等教育出版社,2004.8

ISBN 7-04-014405-0

I. 概… II. ①汪…②刘…③冯… III. ①概率论—高等学校—解题②数理统计—高等学校—解题

IV. 021-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 054951 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京印刷集团有限责任公司 印刷二厂		
开 本	850×1168 1/32	版 次	2004 年 8 月第 1 版
印 张	3.5	印 次	2004 年 8 月第 1 次印刷
字 数	80 000	定 价	5.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

目 录

习题一	1
习题二	5
习题三	10
习题四	14
习题五	16
习题六	19
习题七	23
习题八	34
习题九	37
习题十	40
习题十一	47
习题十二	54
习题十三	61
习题十四	67
习题十五	72
习题十六	76
习题十七	84
习题十八	91
习题十九	93
习题二十	97

习 题 一

1. 求例 1.2 及例 1.3 中的 $P(A)$, $P(B)$.

例 1.2 投掷两枚分币, 则 A = “两个都是正面朝上”, B = “两个都是正面朝下”, ……

解 投掷两枚分币共有四种可能情况: 上上, 下下, 上下, 下上. 在分币匀称的前提下, 它们构成一等概基本事件组. 由古典概型(2.1)式, 有

$$P(A) = P(\text{上上}) = \frac{1}{4}, P(B) = P(\text{下下}) = \frac{1}{4}.$$

例 1.3 从 10 个同类产品(其中有 8 个正品, 2 个次品)中, 任意抽取 3 个. 那么

A = “3 个都是正品”, B = “至少 1 个是次品”. ……

解 由古典概型(2.1)式, 我们有

$$P(A) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}.$$

为求 $P(B)$, 按古典概型(2.1)式, 分母还是 C_{10}^3 ; 而分子应是 B , 即“至少 1 个是次品”的情况数. 这个事件相对复杂些, 一般有两种方法:

(1) 分解法 将“至少 1 个是次品”分解为“恰有 1 个是次品”, “恰有 2 个是次品”这两种情况, 情况数分别为 $C_2^1 \cdot C_8^2$ 与 $C_2^2 \cdot C_8^1$. 于是由(2.1)式, 有

$$P(B) = \frac{C_2^1 C_8^2 + C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{8}{15}.$$

(2) 逆向法 注意到在 C_{10}^3 个基本事件中, 除了“至少 1 个是次品”, 就是“3 个都是正品”, 而后者情况数是容易数出的, 它是 C_8^3 . 因此由(2.1)式有

$$P(B) = \frac{C_{10}^3 - C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{8}{15}.$$

评注 (1) 在用古典概型(2.1)式解题时,首先要正确找出一个等概基本事件组.在例 1.2 中,“上上”、“下下”、“一上一下”就不是一个等概基本事件组.

(2) 分解法与逆向法相比,本例中,后者简单得多.

2. 袋中有红、黄、白色球各一个,每次任取一个,有放回的抽三次,求下列事件的概率: A = “三个都是红的” = “全红”, B = “全黄”, C = “全白”, D = “颜色全同”, E = “全不同”, F = “不全同”, G = “无红”, H = “无黄”, I = “无白”, J = “无红且无黄”, K = “全红或全黄”.

解 有放回的抽取三次.共有 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 种情况,它们构成了一个等概基本事件组.为求出那些事件的概率,按(2.1)式.现只需数清它们相应的情况数.显然, A, B, C 的情况数都是 1,因此,

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{27}, \text{ 而 } P(D) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}.$$

E 的情况数应是一个排列总数,是 $3! = 6$,所以 $P(E) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

F = “不全同”,采用逆向法,其情况数为 $27 - 3 = 24$,因此,
$$P(F) = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}.$$

G = “无红”,只有黄、白两种,情况数为 $2 \times 2 \times 2 = 8$,因此,

$$P(G) = P(H) = P(I) = \frac{8}{27}.$$

至于 J = “无红且无黄”,由字意即“全白”,所以

$$P(J) = P(C) = \frac{1}{27}.$$

显然有

$$P(K) = \frac{2}{27}.$$

3. 从一副扑克的 52 张牌中,任意抽取两张,问都是黑桃的概率有多大?

解 记 A 为所求事件.由于 52 张牌中有 13 张是黑桃,则

$$P(A) = \frac{C_{13}^2}{C_{52}^2} = \frac{1}{17}.$$

4. 在例 2.4 中, 求至少有两件次品的概率.

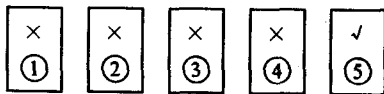
例 2.4 100 件产品中, 有 5 件次品, 从中任取 50 件, ……

解 用逆向法. 除了“至少有两件次品”, 就是“至多有一件次品”. 再将后者分解为“没有次品”与“恰有一件次品”. 于是有

$$\begin{aligned} P(\text{“至少有两件次品”}) &= \frac{C_{100}^{50} - (C_{95}^{50} + C_{95}^{49} C_5^1)}{C_{100}^{50}} \\ &= 1 - \frac{1739}{9603} \approx 0.82. \end{aligned}$$

5. 五人排队抓阄, 决定谁取得一物 (即五个阄中有四个是白阄, 只有一个是有物之阄). (1) 问第三人抓到有物之阄的概率是多少? (2) 前三人之一抓到有物之阄的概率是多少? (3) 如果有两物 (即五个阄中有两个是有物之阄), 问后两个人都抓不到有物之阄的概率是多少?

解 不妨先将五张阄编号如下:



五人排队抓阄, 无非有如下结果:



它们构成一等概基本事件组. “第三人抓到有物之阄”, 即第三人抓到“✓”, 也即第三人抓到⑤, 应由其中的①②⑤③④, ①②⑤④③, …, ④③⑤②①所构成, 共 $4! = 24$ 个基本事件. 按 (2.1) 式,

$$P(\text{第三人抓到有物之阄}) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}.$$

同理,

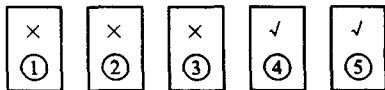
$$P(\text{第一人抓到有物之阄}) = \frac{1}{5},$$

$$P(\text{第二人抓到有物之阄}) = \frac{1}{5},$$

所以

$$P(\text{前三人之一抓到有物之阄}) = \frac{1+1+1}{5} = \frac{3}{5}.$$

为解(3),先将阄编号如下:



还是前面的 120 种情况构成一等概基本事件组. 问题的关键是找出构成事件“后两个人都抓不到有物之阄”的基本事件数 m .

稍作具体分析便知,“后两个人都抓不到有物之阄”=“④、⑤在前三个位置”,而后者可分解为“④、⑤在第一、二个位置”,“④、⑤在第一、三个位置”,“④、⑤在第二、三个位置”;利用排列组合知识得它们所含的基本事件数都是 $2 \times 3! = 12$. 于是按(2.1)式

$$P(\text{后两个人都抓不到有物之阄}) = \frac{12+12+12}{120} = \frac{3}{10}.$$

习 题 二

1. 某产品 40 件,其中有 3 件次品. 现从中任取两件,求其中至少有一件次品的概率.

解法一 设 A = “至少有一件次品”.

B = “没有次品”.

则 $A = \bar{B}$, 于是 $P(A) = 1 - P(B)$. 而

$$P(B) = \frac{C_{37}^2}{C_{40}^2} = \frac{111}{130}.$$

故

$$P(A) = 1 - P(B) = \frac{19}{130} \approx 0.146.$$

解法二 A = “至少有一件次品” = “恰有一件次品” $\cup$ “恰有两件次品”, 上式右边两事件是互不相容的, 由加法公式, 有

$$P(A) = \frac{C_3^1 C_{37}^1}{C_{40}^2} + \frac{C_3^2 C_{37}^0}{C_{40}^2} = \frac{19}{130}$$

2. 对立与互不相容有何异同? 试举例说明.

答 事件 A 与 B 不能同时发生, 或说 $AB = V$ (不可能事件). 称它们为互不相容或互斥; 再加上限制 $A \cup B = U$ (必然事件) 才称 A 与 B 对立. 这就是说, 两事件对立一定互不相容, 而互不相容不一定对立.

如上题中, 记 A_1 = “恰有一件次品”, A_2 = “恰有两件次品”. 显然, A_1, A_2 互不相容, 但它们并不对立, 因为 $A_1 \cup A_2 \neq U$.

3. A, B, C 三事件互不相容与 $ABC = V$ 是否是一回事? 为什么?

解 不是一回事. 如图 1, 事件 A, B, C 分别表示打靶打中图形 A, B, C , 显然有 $ABC = V$; 但由于 A, B 是相容的. 因此 A, B, C 三事件不是互不相容的.

4. 从一副扑克牌的 13 张黑桃中, 一张接一张地有放回地抽取 3 次, 问没有同号的概率?

解 用古典概型求解. $13 \times 13 \times 13$ 个不同结果构成一等概基本事件组. 事件 A = “没有同号”, 由其中的 $13 \times 12 \times 11$ 个 (13 中取 3 的排列数) 基本事件构成. 按 (2.1) 式,

$$P(A) = \frac{13 \times 12 \times 11}{13^3} = \frac{132}{169} \approx 0.781.$$

5. 同第 4 题, 问抽到有同号的概率?

解 显然, B = “有同号” = “没有同号” = $\bar{A}$, 则

$$P(B) = 1 - P(A) = \frac{37}{169} \approx 0.219.$$

6. 同第 4 题, 问抽到的 3 张中最多只有两张同号的概率?

解 “最多只有两张同号” = “三张全同号”, 而

$$P(\text{三张全同号}) = \frac{13}{13^3} = \frac{1}{169},$$

所以

$$P(\text{最多只有两张同号}) = 1 - \frac{1}{169} \approx 0.994.$$

7. 将习题一第 2 题中的条件改为: 盒中有四个球, 其中两个红球、一个黄球、一个白球, 其他不变, 求 $A, B, \dots, K$ 的概率. 并求事件 L = “无红或无黄” 的概率.

$$\text{解 } P(A) = \frac{2^3}{4^3} = \frac{1}{8}, \quad P(B) = P(C) = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64},$$

$$P(D) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{5}{32},$$

$$P(E) = \frac{2 \cdot 3!}{4^3} = \frac{3}{16}, \quad P(F) = 1 - P(D) = \frac{27}{32},$$

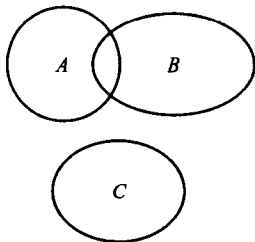


图 1

$$P(G) = \frac{2^3}{4^3} = \frac{1}{8}, \quad P(H) = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64} = P(I),$$

$$P(J) = P(C) = \frac{1}{64},$$

$$P(K) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{9}{64},$$

$$\begin{aligned} P(L) &= P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(GH) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{27}{64} - P(C) = \frac{17}{32}. \end{aligned}$$

8. 利用加法公式(2)导出三个事件的概率加法公式.

解 首先 $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$, 对 $A \cup B, C$ 这两个事件, 用加法公式(2)得

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B)C) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC \cup BC). \end{aligned}$$

再对 AC, BC 这两个事件用加法公式(2)得

$$\begin{aligned} P(AC \cup BC) &= P(AC) + P(BC) - P(AC \cdot BC) \\ &= P(AC) + P(BC) - P(ABC), \end{aligned}$$

代入前式得

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

9*. 利用加法公式(2)和数学归纳法证明下列若尔当(Jordan)公式: 设 $A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 2)$ 是 n 个事件, 则

$$P\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P\left[\bigcap_{l=1}^k A_{i_l}\right]. \quad (0.1)$$

证 $n=2$ 时, (0.1)式即为加法公式(2).

现设(0.1)对某个特定的 n 成立, 要证(0.1)对 $n+1$ 也成立, 即要证

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right] = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1} P\left[\bigcap_{l=1}^k A_{i_l}\right]. \quad (0.2)$$

(0.2)式左边

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right] &= P\left[\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \cup A_{n+1}\right] \\
&= P\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] + P(A_{n+1}) - P\left[\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \cap A_{n+1}\right] \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P\left(\bigcap_{l=1}^k A_{i_l}\right) + P(A_{n+1}) - \\
&\quad P\left[\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})\right] \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P\left[\bigcap_{l=1}^k A_{i_l}\right] + P(A_{n+1}) - \\
&\quad \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P\left[\bigcap_{l=1}^k (A_{i_l} \cap A_{n+1})\right] \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P\left[\bigcap_{l=1}^k A_{i_l}\right] + P(A_{n+1}) - \\
&\quad \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P\left[\left[\bigcap_{l=1}^k A_{i_l}\right] A_{n+1}\right]
\end{aligned}$$

(0.2)式右边

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1} P\left[\bigcap_{l=1}^k A_{i_l}\right] = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k = n+1} \\
&P\left[\bigcap_{l=1}^k A_{i_l}\right] + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P\left[\bigcap_{l=1}^k A_{i_l}\right] \triangleq \text{I} + \text{II},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{其中, I} &= \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} P\left[\bigcap_{l=1}^{k-1} A_{i_l} \cdot A_{n+1}\right] + P(A_{n+1}) \\
&= - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} P\left[\bigcap_{l=1}^{k-1} A_{i_l} \cdot A_{n+1}\right] + P(A_{n+1});
\end{aligned}$$

而对 II, 注意到 k 取 $n+1$ 时, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ 不可能成立, 所以

$$\text{II} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P\left[\bigcap_{l=1}^k A_{i_l}\right]$$

因此, (0.2) 式左边 = (0.2) 式右边. 由数学归纳法. 若尔当公式得证.

评注 本题的证明部分, 非数学类读者可略过不看; 不过, 对 $n=3$ 的情况, 即第 8 题要掌握. 若尔当公式, 是若尔当在研究平面图形的面积时首先发现的.

习 题 三

1. 一个工人看管三台机床,在 1 h 内机床不需要工人照管的概率:第一台等于 0.9,第二台等于 0.8,第三台等于 0.7. 求在 1 h 内三台机床中最多有一台需要工人照管的概率(机床是否需要照管是相互独立的).

解 记 B = “三台机床中最多有一台需照管”,

A_i = “第 i 台机床不需要照管”, $i=1,2,3$.

已知 $P(A_1)=0.9, P(A_2)=0.8, P(A_3)=0.7$. 为求 $P(B)$, 我们注意到事件 B 与 A_1, A_2, A_3 有如下关系(为什么? 请读者自行思考):

$$B = A_1 A_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup A_1 A_2 \bar{A}_3.$$

上式右边的四个事件是互不相容的(为什么?). 由加法公式有

$$P(B) = P(A_1 A_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(A_1 A_2 \bar{A}_3)$$

由于 A_1, A_2, A_3 相互独立, 则按乘法公式有

$$\begin{aligned} P(B) &= 0.9 \times 0.8 \times 0.7 + 0.1 \times 0.8 \times 0.7 + 0.9 \times 0.2 \times 0.7 + \\ &\quad 0.9 \times 0.8 \times 0.3 \\ &= 0.902. \end{aligned}$$

评注 找出 B 与 A_1, A_2, A_3 的关系是本题的关键.

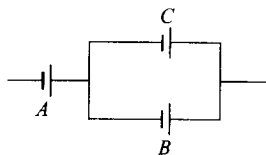
2. 电路由电池 A 与两个并联的电池 B 及 C 串联而成. 设电池 A, B, C 损坏的概率分别是 0.3, 0.2, 0.2, 求电路发生断电的概率(电池是否损坏是互不影响的).

解 记 A = “电池 A 损坏”,

B = “电池 B 损坏”,

C = “电池 C 损坏”,

D = “电路断电”.



注意到 D 与 A, B, C 有如下关系(为什

图 2

么? 请思考):

$$D = A \cup BC,$$

因此 $P(D) = P(A) + P(BC) - P(ABC)$.

再由 A, B, C 的相互独立性, 得

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= 0.3 + 0.2 \times 0.2 - 0.3 \times 0.2 \times 0.2 = 0.328. \end{aligned}$$

3. 某机械零件的加工由两道工序组成. 第一道工序的废品率为 0.015, 第二道工序的废品率为 0.02. 假定两道工序出废品是彼此无关的, 求产品的合格率.

解 首先注意, 所谓一批产品的废品率是废品在该批产品中占的比例, 即废品数/产品总数; 数值上它等于: 从该批产品中任取一个, 取到废品的概率. 这就是为什么该类问题可用概率方法来讨论解决的逻辑依据. 现设想从该批产品中任取一个. 记

A = “第一道工序产生的废品”,

B = “第二道工序产生的废品”,

C = “合格品”.

注意到 C 与 A, B 有如下关系:

$$C = \bar{A} \cap \bar{B},$$

由独立性, $P(C) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B))$
 $= (1 - 0.015)(1 - 0.02) \approx 0.965$.

4. 在 $1, 2, \dots, 100$ 中任取一数, 问它既能被 2 整除又能被 5 整除的概率是多少? 又它能被 2 整除或能被 5 整除的概率是多少?

解 记 A = “被 2 整除”, B = “被 5 整除”, 则

$$\begin{aligned} P(\text{既能被 2 整除又能被 5 整除}) &= P(AB) \\ &= P(\text{被 10 整除}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}; \\ P(\text{被 2 整除或被 5 整除}) &= P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{50}{100} + \frac{20}{100} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

5. 加工某一零件共需经过四道工序. 设第一, 二, 三, 四道工

序的次品率分别是 2%, 3%, 5%, 3%. 假定各道工序是互不影响的. 求加工出来的零件的次品率.

解 记 A_i = “第 i 道工序产生的次品”, $i=1, 2, 3, 4$,

B = “合格品”,

则有

$$B = \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \overline{A_4}.$$

由独立性,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) P(\overline{A_3}) P(\overline{A_4}) \\ &= (1-0.02)(1-0.03)(1-0.05)(1-0.03) = 0.876. \end{aligned}$$

所以, 加工出来的零件的次品率为 0.124 (或写作 12.4%).

6. 当掷五枚分币时, 已知至少出现两个正面, 问正面数刚好是二个的条件概率是什么?

解 记 A = “至少出现两个正面”,

B = “恰好出现三个正面”.

要求的是 $P(B|A)$.

由条件概率公式 (5.1),

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)},$$

注意到有关系 $B \subset A$, 所以 $AB = B$; 因此上式右边的分子可改为 $P(B)$.

先求 B 的概率. 将五枚分币编号为 1, 2, 3, 4, 5, B 可分解为

$\left\{ \begin{array}{l} \text{正, 正, 正, 反, 反; (1, 2, 3 号分币为正面, 4, 5 号分币为反面. 下类推.)} \\ \text{正, 正, 反, 正, 反;} \\ \text{.....} \\ \text{反, 反, 正, 正, 正.} \end{array} \right.$

共 C_5^3 个基本事件, 而它们的概率, 按独立性都是 $(1/2)^5$. 所以

$$P(B) = C_5^3 (1/2)^5 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

至于 $P(A)$, 先对 $\overline{A}$ = “至多出现一个正面”, 进行分解:

$\bar{A}$ = “恰出现 0 个正面” $\cup$ “恰出现一个正面” $\equiv C \cup D$. 类似上面求 $P(B)$ 的方法可得:

$$P(C) = (1/2)^5 = \frac{1}{32},$$

$$P(D) = C_5^1 (1/2)^5 = \frac{5}{32},$$

因此

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) = 1 - (P(C) + P(D)) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{32} + \frac{5}{32} \right) = \frac{13}{32}, \end{aligned}$$

所以

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{5}{13}.$$