大学数学名师导学丛书

6

线性代数与应用

名师导学

《大学数学名师导学丛书》编写组 编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

大学数学名师导学丛书

线性代数与应用

名师导学

《大学数学名师导学丛书》编写组　编

本书编写　　郑素文

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是以大学理工科的《线性代数与应用》的教学大纲为依据，结合大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题与自测。

本丛书具有三“导”合一的特点：集中知识要点“导”学，典型例题与习题“导”讲，知识点学习和自测紧密“导”练。

本书适合学习《线性代数与应用》的大学理工科学生使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与应用名师导学 /《大学数学名师导学》编写组编．—北京：中国水利水电出版社，2004

（大学数学名师导学丛书）

ISBN 7-5084-2256-2

Ⅰ．线… Ⅱ．大… Ⅲ．线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．0151．2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 071617 号

书　　名	大学数学名师导学丛书 **线性代数与应用**
编　　者	《大学数学名师导学丛书》编写组编　本书编写　郑素文
出版、发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路 6 号　100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010)63202266（总机）、68331835（营销中心）
经　　销	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	中国人民大学出版社印刷厂
印　　刷	北京市优美印刷有限责任公司
规　　格	787×1092mm　16 开本　23.75 印张　406 千字
版　　次	2005 年 1 月第 1 版　2005 年 1 月北京第 1 次印刷
印　　数	0001-6000 册
定　　价	**31.00**

《大学数学名师导学丛书》编写组

主　　编：牛庆银

副 主 编：董玉才

编写人员：牛庆银　董玉才　杨万利
郑素文　刘文学　陈建华

前 言

大学数学是理工科院校的重要基础课程。在教学改革后，由于授课时间的减少，很多学生陷入了“上课能听懂，课后解题却不知如何下手，考试更无所适从”的困境。为帮助学生摆脱困境，我们对辅导方式进行了积极创新，希望以有效的名师指导式辅导，使学生轻松学数学，牢固并灵活地掌握知识，从而取得优异的考试成绩。

本丛书根据目前大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成，由数位工作在教学一线的、教授级的中青年教师编写。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本套丛书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和提出学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题与自测，学生灵活运用所学知识进行实践，使学生“知其然，更知其所以然”，巩固所学知识，从而能够协助学生顺利通过相应的日常学习和严格的考核。

本丛书具有三“导”合一的特点：

1）集中知识要点“导”学。通过把知识要点串联在一起，将大纲和知识要点分层讲解，方便学生查找，有的放矢地学习，避免遗漏。

2）典型例题与习题“导”讲。针对典型例题和习题，结合知识点进行精讲，给出多种解题思路、方法，使学生能触类旁通，从而轻松学习、解题和通过考试。

3）知识点学习和自测紧密“导”练。结合老师课堂练习必考和可能考的知识点以及考试要求，给出极具针对性的习题与自测，方便学生自我测试和掌握学习情况 。

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，书中如有错漏之处，敬请广大读者批评、指正。

编　者

2004年6月

目 录

第一章 行列式

一、知识要点

排列　逆序　逆序数　排列的奇偶性　对换　n 阶行列式的定义　n 阶行列式的性质　余子式　代数余子式　行列式按行(列)展开定理　拉普拉斯定理　克拉姆法则

二、知识要点分析

1. 排列、逆序及对换

(1) n 元排列

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $q_1q_2\cdots q_n$ 称为一个 n 元排列. 不同的 n 元排列共有 $n!$ 个,其中排列 $12\cdots n$ 称为自然排列.

(2) 逆序、逆序数及排列的奇偶性

在一个排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 中,如果一个大数排在一个小数之前,就称这两个数组成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数,记为 $\tau(q_1q_2\cdots q_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

自然排列是偶排列,其逆序数是 0.

(3) 对换

把一个排列中的某两个数互换位置,而其他的数保持不动,就得到另一个排列,这样的变换称为一个对换.

对换改变排列的奇偶性,任意一个排列都可以经过若干次对换变成自然排列,并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

2. n 阶行列式的定义

n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{1.1}$$

其中 $\sum\limits_{q_1q_2\cdots q_n}$ 表示对所有 n 元排列求和. a_{ij} 称为行列式的 i 行 j 列的元素.

二阶和三阶行列式适用对角线法则

上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. 行列式的性质

性质 1.1 行列式的行列互换,行列式的值不变.

该性质表明,在行列式中行与列具有相同的地位,故凡是有关行的性质对列同样成立.

性质 1.2 互换行列式的两行(列),行列式的值改变符号.

性质 1.3 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘以此行列式.

推论 行列式某一行(列)的各元素有公因子 k,则 k 可提到行列式之外.

性质 1.4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式的值为零.

性质 1.5 若行列式的某一行(列)中各元素均为两项之和,则此行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.6 将行列式的某一行(列)乘以一个常数 k 加到另一行(列),行列式的值不变.

4. 行列式展开定理

(1) 余子式与代数余子式

把 n 阶行列式中元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 行列式按一行(列)展开定理

n 阶行列式等于它的任意一行(列)的各元素与对应于它们的代数余子式的乘积的和,即

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},(i=1,2,\cdots,n), \\ D &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},(j=1,2,\cdots,n). \end{aligned} \tag{1.2}$$

行列式中任一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn} &= 0,(i\neq j), \\ a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj} &= 0,(i\neq j). \end{aligned} \tag{1.3}$$

范德蒙德行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j). \tag{1.4}$$

其中“Π”表示全体同类因子的乘积.

(3) 拉普拉斯(Laplace)定理

在 n 阶行列式中,任选 k 行 k 列,其交叉位置上的元素(不改变相对位置)组成的 k 阶行列式称为原行列式的一个 k 阶子式.而余下的行列所组成的 $n-k$ 阶行列式称为该 k 阶子式的余子式,记为 M.设该 k 阶子式所在的行与列分别为第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行和第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列,则称 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M$ 为该 k 阶子式的代数余子式.

Laplace 定理 $n(>1)$阶行列式等于某 $k(1\leqslant k<n)$行(列)中所有 k 阶子式与它们对应的代数余子式乘积之和.

Laplace 定理的两个特殊情形:

① $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

② $$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

5.克拉姆(Cramer)法则

(1) Cramer 法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.6}$$

的系数行列式 $D \neq 0$,则该方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}. \tag{1.7}$$

其中 $D_j (j = 1, 2, \cdots, n)$是把系数行列式 D 中第j 列的元素用方程组的常数项替代后所得到的 n 阶行列式.

(2) 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

的系数行列式 $D \neq 0$,则该方程组只有零解.或者说,如果方程组(1.8)有非零解,

那么它的系数行列式 $D=0$.

三、学习要求

(1) 了解排列、逆序、对换及排列的奇偶性等概念.

(2) 掌握 n 阶行列式的定义与性质.

(3) 掌握行列式按行(列)展开定理,了解拉普拉斯定理.

(4) 会用对角线法则计算二阶和三阶行列式,掌握常用的行列式(三角行列式、范德蒙德行列式、Laplace 定理的特殊情形等).

(5) 掌握计算和证明有规律的行列式的方法.

(6) 理解克拉姆法则,掌握应用克拉姆法则解线性方程组的方法.

四、典型例题与方法解析

1. 排列的逆序数和奇偶性

例 1 求下列排列的逆序数:

(1) 342651,

(2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

分析 求一个排列的逆序数一般有两种做法:

方法一 按此排列的次序分别算出每一个数的后面比它小的数的个数,然后求和.

方法二 按自然数的顺序分别算出排在 1,2,3,…前面的比它大的数的个数,然后求和.

解 (1) **解法一**(用方法一)

3 的后面有 2 个数小于 3:2,1.

4 的后面有 2 个数小于 4:2,1.

2 的后面有 1 个数小于 2:1.

依此方法,6,5,1 的后面分别有 2 个,1 个,0 个数小于它本身,故此排列的逆序数为 $\tau(342651)=2+2+1+2+1+0=8$.

解法二 (用方法二)

1 的前面有 5 个数比 1 大:3,4,2,6,5.

2 的前面有 2 个数比 2 大:3,4.

3 的前面没有大于 3 的数.

依此方法,4,5,6 的前面分别有 0 个,1 个,0 个数大于它本身,故此排列的逆

序数为 $\tau(342651)=5+2+0+0+1+0=8$.

(2) 此排列中，前 n 个数 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$ 之间没有逆序，后 n 个数 $2,4,6,\cdots,(2n)$ 之间也没有逆序，只在前 n 个数与后 n 个数之间有逆序.

解法一(用方法一)

$$\begin{aligned}\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))&=0+1+2+\cdots+(n-1)+0+0+\cdots+0\\&=\frac{1}{2}n(n-1)\end{aligned}$$

解法二(用方法二)

$$\begin{aligned}&\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=0+(n-1)+0+(n-2)\\&+0+\cdots+0+1=(n-1)+(n-2)+\cdots+1\\&=\frac{1}{2}n(n-1).\end{aligned}$$

例 2 选择 i 与 j，使 $3i265j$ 为奇排列.

分析 由排列的定义，i,j 只能在 1 与 4 中选择，故只要看 i,j 选 1 与 4 时排列是否为奇排列即可.

解 不妨设 $i=4,j=1$. 由例 1 知 $\tau(342651)=8$. 故排列 342651 是偶排列. 由于对换改变排列的奇偶性，因此应取 $i=1,j=4$. 此时得到的排列 312654 为奇排列.

2. n 阶行列式的概念

例 3 在 4 阶行列式中，项 $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 应带什么符号？

分析 在行列式中，项所带的符号一般有两种计算方法：

方法一 将该项的行(列)指标按自然顺序排好，然后判断列(行)指标所构成的排列的奇偶性. 如果是奇排列. 该项应带负号，否则，带正号.

方法二 直接计算该项的行指标和列指标所构成的排列的逆序数. 如果它们的和为奇数，该项应带负号，否则，带正号.

解法一 将 $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 按行标的自然顺序排列为 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$. 由于 $\tau(4123)=3$，即排列 4123 是奇排列，故该项前面应带负号.

解法二 $\tau(2314)+\tau(1243)=2+1=3$ 是奇数，故该项应带负号.

注意 若 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 与 $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$ 是 n 阶行列式中的同一项，则 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 与 $\tau(k_1k_2\cdots k_n)$ 有相同的奇偶性.

例 4 在 4 阶行列式中，写出带负号且包含 $a_{23}a_{31}$ 的项.

分析 由行列式的定义知，行列式展开式中的每一项的元素均取自不同的行不同的列. 含 $a_{23}a_{31}$ 的项应具有 $a_{1j_1}a_{23}a_{31}a_{4j_4}$ 的形式，其中 j_1,j_4 应取自 2, 4. 故含有 $a_{23}a_{31}$ 的项有两个. 然后根据要求选出带负号的项.

解 因为含有 $a_{23}a_{31}$ 的项具有 $a_{1j_1}a_{23}a_{31}a_{4j_4}$ 的形式，其中 j_1,j_4 取自 2，4，不妨设 $j_1=2,j_4=4$. 此时 $\tau(2314)=2$. 排列 2314 是偶排列. 故项 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 带正号，因此应取 $j_1=4,j_4=2$. 由于对换改变排列的奇偶性，此时项 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 带负号，即为所求.

例 5 求 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2 \\ 2 & x & 0 & 1 \\ 3 & 2 & x & 6 \\ 1 & 4 & 5 & x \end{vmatrix}$$

的展开式中 x^3 的系数.

分析 在该行列式中，共有 5 个 x，分别是 $a_{11},a_{12},a_{22},a_{33},a_{44}$. 其中 a_{12} 与 a_{11} 同行，a_{12} 与 a_{22} 同列，故不能同时出现在某一项中.

在 a_{11},a_{12},a_{22} 中，最多可以出现 2 个 x，即 $a_{11}a_{22}$. 要考虑 x^3 的系数，a_{33} 与 a_{44} 必须至少出现一个. 如只取其中的一个，那么为凑成 3 个 x，必须取 $a_{11}a_{22}$，这样，此项只能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，不合题意. 故 $a_{33}a_{44}$ 必须同时选取，那么 a_{11},a_{12}，a_{22} 中，只能选取一个，自然是 a_{12}，因此，选取的项是 $a_{21}a_{12}a_{33}a_{44}$.

解 根据行列式的定义和题目要求，只有在 $a_{21}a_{12}a_{33}a_{44}$ 项中出现 x^3，该项应带的符号是负号，也就是 $-a_{21}a_{12}a_{33}a_{44}=-2x^3$，即含 x^3 的项的系数是 -2.

例 6 用行列式的定义计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

分析 从一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 入手，讨论列标 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 的取值，其中 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 是一个 5 元排列.

解 设此行列式的展开式中，一般项的形式为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$. 其中 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 是一个 5 元排列. 由此行列式知，j_1,j_4,j_5 只有等于 2 和 3 时，对应的元素可能非零. 由抽屉原理，j_1,j_4,j_5 必须有一个既不等于 2，也不等于 3，只能取 1，4，5，对应的元素是零. 则此行列式展开式中所有项都等于零，所以 $D=0$.

评注 行列式展开式中的每一项必须取自不同行不同列，这一要求是解决此类题目的关键.

3. n 阶行列式的计算

例 7 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

分析 该行列式中各行(列)的元素之和均为 $x+(n-1)a$,通常将第 2 到 n 行(列)加到第一行(列),之后提出公因子,再利用行列式的性质 6,对行列式作恒等变形,化为三角行列式.

解 (三角化法)

$$D_n \xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1} [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

评注 r_i 表示行列式的第 i 行,c_i 表示行列式的第 j 列,对换 i 行与 j 行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$,第 i 行乘以 k 记作 kr_i,i 行的 k 倍加至 j 行记作 $r_j + kr_i$,列变换的记号类似于行变换.

例 8 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix}.$$

分析 对于低阶的行列式,可以利用行列式的性质对其进行变换,以出现较多的零元素,然后利用行列式按一行(列)展开公式,将行列式降阶,直至得出结果.

解 (降阶法)

$$D \xlongequal[\substack{r_2-r_3\\ r_3-r_4}]{r_1-r_2} \begin{vmatrix} x & -x & 0 & 0 \\ 0 & x & -x & 0 \\ 0 & 0 & x & -x \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+c_1} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -x & 0 \\ 0 & 0 & x & -x \\ a & 2a & a & a+x \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} x & -x & 0 \\ 0 & x & -x \\ 2a & a & a+x \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+c_1} x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & -x \\ 2a & 3a & a+x \end{vmatrix}$$

$$= x^2\begin{vmatrix} x & -x \\ 3a & a+x \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+c_1} x^2\begin{vmatrix} x & 0 \\ 3a & 4a+x \end{vmatrix}$$

$$= x^3(4a+x) = x^4 + 4ax^3.$$

注意 用降阶法必须考虑代数余子式前面的符号.

对行列式进行逐行(列)相加减(本例中的第一步)是行列式计算中常用的方法.

例 9 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

分析 此类行列式称为三对角行列式.计算三对角行列式的基本方法是利用行列式按一行(列)展开公式,将行列式降阶,得出递推公式,最终求出结果.

解 (递推法)

将 D_n 按第一行展开,得

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta\begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & & & & \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \alpha\beta \\ & & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2},$$

即
$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}),$$

由上式递推得

$$\begin{aligned} D_n - \alpha D_{n-1} &= \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) \\ &= \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) \\ &= \cdots = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1). \end{aligned}$$

将

$$D_2=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta\\ 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2, D_1=\alpha+\beta$$

代入上式,得

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n,\text{即 } D_n=\alpha D_{n-1}+\beta^n.$$

再由此递推得

$$\begin{aligned}D_n&=\alpha D_{n-1}+\beta^n=\alpha(\alpha D_{n-2}+\beta^{n-1})+\beta^n=\alpha^2D_{n-2}+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n\\&=\cdots=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n\\&=\begin{cases}\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha},\text{当 } \alpha\neq\beta \text{ 时};\\(n+1)\alpha^{n+1},\text{当 } \alpha=\beta \text{ 时}.\end{cases}\end{aligned}$$

评注 在寻求递推关系时,应根据题目的特点,决定将行列式的哪一行(列)展开.

例 10 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a+x_1 & a & \cdots & a & a\\ a & a+x_2 & \cdots & a & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & a\\ a & a & \cdots & a & a+x_n\end{vmatrix}.$$

分析 如果第 n 行第 n 列的元素为 a,则可将行列式代为三角行列式,现为 $a+x_n$,故考虑将其拆成两项之和,正好得到两个行列式,一个可化为三角行列式,另一个与 D_n 有递推关系.

解 (拆项法)

按最后一列,将 D_n 拆成两个行列式之和,有

$$D_n=\begin{vmatrix}a+x_1 & a & \cdots & a & a\\ a & a+x_2 & \cdots & a & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & a\\ a & a & \cdots & a & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a+x_1 & a & \cdots & a & 0\\ a & a+x_2 & \cdots & a & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a & a & & a+x_{n-1} & 0\\ a & a & & a & x_n\end{vmatrix}$$